Université Grenoble Alpes
Année académique 2017-18

L3 Math

Examen de rattrapage
27 juin 2018

Durée 3h. Téléphones, ordinateurs, documents interdits. Toute réponse doit être justifiée. Barème indicatif: 4/3/4/5/4

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)e^{x+y+z}$.

(1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner un développement de Taylor d'ordre 2 pour f au point $(0, 0, 0)$.
(3) Trouver tous les points critiques de f, et déterminer leur nature.
(4) f admet-elle un maximum global? un minimum global?

Exercice 2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soient $v, w : I \to \mathbb{R}^3$ deux applications différentiables. On définit $f : I \to \mathbb{R}^3$ par $f(t) = v(t) \wedge w(t)$ pour tout $t \in I$.

(1) Rappeler la définition du produit vectoriel $a \wedge b$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que l'application $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui envoie (a, b) sur $a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique ($a \wedge b = -b \wedge a$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}^3$).
(3) Montrer que l'application f est différentiable sur I, et donner une formule pour sa différentielle en un $t \in I$ quelconque (on pourra utiliser la bilinéarité du produit vectoriel).

Exercice 3. On considère le système différentiel $Y' = AY$, où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & 1 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}.$$

(1) Rappeler la définition de l'exponentielle e^B d'une matrice B.
(2) Calculer $M(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$.
(3) Les colonnes de $M(t)$ sont-elles solutions du système $Y' = AY$?
(4) Donner la solution du problème de Cauchy $Y' = AY, Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

T.S.V.P

Exercice 4. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe plane définie par $\gamma(t) = (\cos t, \frac{\sin^2 t}{2+\sin t})$.

(1) Montrer que l'image de γ admet une symétrie axiale par rapport à l'axe vertical.
(2) Déterminer les points singuliers de γ.
(3) Rappeler la définition de la tangente à γ en un point quelconque, et montrer que γ admet une tangente en tout point (y compris ses points singuliers).
(4) Déterminer la tangente aux points singuliers.
(5) Donner un développement limité à l'ordre 3 autour de $x = 0$ de la fonction $f(x) = x^2/(2 + x)$.
(6) En déduire un développement limité, toujours à l'ordre 3 autour de $x = 0$, de la fonction $g(x) = f(\sin(x))$ (justifier votre réponse).
(7) Déduire des points précédents un développement de Taylor pour γ à l'ordre 3 autour de $t = 0$.
(8) Déterminer la nature des points singuliers.
(9) Faire un dessin de la courbe.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = z^5 + (x^2 + y^2)z^3 + x^4 - 1$, et S son ensemble de niveau 0, c-à-d. $S = f^{-1}(\{0\})$.

(1) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(x, y, z) = 0$. On note $\varphi(x, y)$ cette valeur de z.
(2) Montrer que la fonction φ définie dans la question précédente est de classe C^∞ sur $]-1, 1[\times\mathbb{R}$. Est-elle C^∞ sur $\mathbb{R}^2$?
(3) On note $\alpha = \varphi(0, 1)$. Montrer que S est une surface régulière près de $(0, 1, \alpha)$, et donner son plan tangent en ce point.
(4) Déterminer les points critiques de φ sur $]-1, 1[\times\mathbb{R}^2$.