Université Grenoble Alpes
Année académique 2018-19

L3 Math

# Examen
## Jeudi 23 mai

*Durée 3h. Téléphones, ordinateurs, documents interdits. Toute réponse doit être justifiée.*

*Exercice* 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^4 + (6-4y)x^2 + 5y^2 - 16y + 16$.

(1) Déterminer les points critiques de $f$.
(2) Calculer la matrice hessienne de $f$ en chacun de ces points critiques, et en déduire leur nature (max/min local, pt de selle).
(3) Montrer que $f(x,y) - 3 \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire sur la globalité des extrema trouvés ci-dessus?
(4) Montrer que $f(x,y) \longrightarrow +\infty$ lorsque $||(x,y)|| \to +\infty$, et retrouver le résultat précédent.

*Exercice* 2. On considère le système différentiel $Y' = AY$, où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1+\sin t & 1 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}.$$

(1) Rappeler le résultat du cours sur la structure de l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$.
(2) Donner la solution générale du système (par la méthode de votre choix).
(3) Exprimer la solution du problème de Cauchy $Y' = AY$, $Y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.
(4) Rappeler la définition de l'exponentielle $e^B$ d'une matrice $B$.
(5) Rappeler le résultat du cours relatif à la résolution des systèmes linéaires homogènes (à coefficients *non*-constants) en termes d'exponentielles de matrices.
(6) Déduire de ce qui précède la valeur de $M(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$, pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque.

*Exercice* 3. Soit $V = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ rélles, et $|||\cdot|||$ la norme triple déduite de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $U$ un ouvert de $V$ et $f : U \to V$ une application différentiable.

(1) Décrire une norme $||(H, K)||$ sur l'espace vectoriel $V \times V$, et montrer qu'il s'agit bien d'une norme.
(2) Rappeler la définition de $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$ et montrer, en utilisant la norme du point précédent, que $HK = o_{(H,K)\to(0,0)}(||(H, K)||)$.
(3) Montrer que l'application $\Psi : V\times V \to V$ définie par $\Psi(A, B) = AB$ est différentiable sur tout $V \times V$, et donner une formule pour sa différentielle $d\Psi(A, B)$.
(4) Soit $\Phi : U \to V \times V$ définie par $\Phi(A) = (A, f(A))$. Montrer que $\Phi$ est différentiable sur $U$, et décrire sa différentielle.
(5) Ici et dans la suite de cette exercice, on note $U \subset V$ le sous-ensemble de matrices inversibles. Montrer que $U$ est un ouvert.

Dans la suite ce cet exercice, $f : U \to V$ désigne l'application qui envoie $A$ sur son inverse $A^{-1}$. On admet ici que $f$ est différentiable (ceci découle des formules pour l'inverse en termes de cofacteurs, qui sont des fonctions polynomiales en les coefficients).

(6) En utilisant les questions précédentes et le fait que $A \cdot f(A) = I_n$ pour tout $A \in U$, donner une formule pour $df(A)$.
(7) Montrer que $f(U) = U$, et que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^1$.
(8) Montrer que $f$ est un difféomorphisme de classe $C^\infty$.

Pour la question suivante, on rappelle les formules suivantes (dont l'utilisation n'est pas obligatoire):

$$K(s(t)) = \frac{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}, \qquad T(s(t)) = -\frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t)\rangle}{||\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)||^2}.$$

*Exercice* 4. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$.

(1) Déterminer le tangent unitaire et le vecteur binormal en un point de $\gamma$ de paramètre quelconque $t$.
(2) Donner une équation pour le plan osculateur à $\gamma$ en un point de paramètre $t$ quelconque.
(3) Donner (et justifier) une formule pour la distance entre l'origine et le plan d'équation $ax + by + cz = d$ dans $\mathbb{R}^3$.
(4) Calculer la distance à l'origine du plan osculateur calculé dans la question (2), en fonction de $t$.
(5) Montrer que les plans osculateurs à $\gamma$ en tous ses points sont tangents à une même sphère centrée à l'origine.
(6) Donner le rayon du cercle osculateur à $\gamma$ au point de paramètre $t$.