Université Joseph Fourier | 2015-16
Calcul Différentiel | L3 option B

Contrôle continu n° 2

25 mars 2016

Durée : 2h. Documents et téléphones interdits. ***Barême indicatif : 3/6/4/7***

Exercice 1. (question de cours) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ qui a un point critique en a.

1. Démontrer que si $Hess(f, a)$ est définie positive, alors f a un minimum local strict en a.
2. Montrer que la réciproque de l'implication précédente est fausse.

Exercice 2. On considère l'ensemble C des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$2x^2y^3 - 2xy^2 - xy - y^2 = 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique point de la forme $(n, 1)$ dans C avec $n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique pour décrire C au voisinage de ce point $(n, 1)$, pour donner x comme une fonction de y. On notera φ la fonction correspondante, définie au voisinage de $y = 1$.
3. Montrer que φ est de classe C^∞ au voisinage de 1, et donner un développement limité à l'ordre 1 pour φ autour de $y = 1$.
4. Expliquer comment calculer $\alpha = \varphi''(1)$ (on donnera une équation de degré 1 que doit satisfaire α, que l'on ne demande pas de résoudre).

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 + 2y, 2y^2 - x)$.

1. Déterminer l'ensemble des points au voisinage desquels cette application admet un inverse local de classe C^1.
2. On note g l'inverse local de f, défini au voisinage de $(0, 0)$, tel que $g(0, 0) = (0, 0)$. Donner un développement limité à l'ordre 1 pour g autour de $(0, 0)$.

Exercice 4. Soient $p = (-1, 0)$ et $q = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, et on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(v) = ||v - p|| + ||v - q||$, où $||w||$ désigne la norme euclidienne de $w \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ le plus grand ouvert sur lequel f est différentiable. Donner une description de U, et calculer la différentielle de f en un point quelconque $a \in U$.
2. Pour quels $a \in U$ le théorème des fonctions implicites donne-t-il une description locale de l'ensemble de niveau $f(a)$ localement comme le graphe d'une fonction $y = \phi(x)$?
3. Pour quels $a \in U$ l'ensemble de niveau de f contenant a est-il une courbe régulière ? Pour un tel a, donner une expression pour la droite tangente à l'ensemble de niveau correspondant de f en a.
4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe différentiable contenue dans un ensemble de niveau de f. Montrer que pour tout $t \in I$, on a
$$\frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t) - p \rangle}{||\gamma(t) - p||} = -\frac{\langle \gamma'(t), \gamma(t) - q \rangle}{||\gamma(t) - q||}$$
5. Donner une formule pour l'angle entre $\gamma'(t)$ et $\gamma(t) - p$.
6. Déduire que la tangente à l'ensemble de niveau en $\gamma(t)$ est la bissectrice extérieure au sommet $\gamma(t)$ du triangle formé par p, q et $\gamma(t)$ (on rappelle que la bissectrice extérieure en un sommet est la droite par ce sommet orthogonale à la bissectrice usuelle).