MAT36F - Calcul Différentiel L3B

Deuxième Semestre — 2022-2023

Modèle d'examen terminal - mai 2023

Le barème est seulement indicatif.

Justifier toutes les réponses!

1
2
3
4
5
6

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un C^1-difféomorphisme. Montrer que l'application linéaire $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x, y, z) = z + x^2 + y^2 + z^2 + xy + (x + y + z)^4$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(a) Justifier qu'il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ incluant $(0,0)$ et une application $g : U \to \mathbb{R}$ telle que $g(0,0) = 0$ et $f(x, y, g(x, y)) = 0$ pour tout $(x, y) \in U$.

(b) Montrer que $(0,0)$ est une point critique de g. Déterminer si c'est un extremum local de g et le classifier.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x, y) = -x^2 + 2y^3 + 3y^2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \text{ et } y \geq |x| - 4\}$.

(a) Déterminer tous les extremums locaux de $f|_D : D \to \mathbb{R}$.

(b) Parmi les extremums dans l'item précédent, déterminer ceux qui sont aussi des extremums globaux.

4. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications différentiables, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert non vide. Démontrer que s'il existe $t \in I$ tel que $W(f, g)(t) \neq 0$, alors $\{f, g\}$ est une partie libre de l'espace vectoriel de fonctions différentiables de I dans $\mathbb{R}$.

5. (a) Calculer toutes les applications $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-fois différentiables qui satisfont que $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer toutes les applications $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2-fois différentiables qui satisfont que $x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) Parmi les applications $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans l'item précédent, déterminer l'unique application qui satisfait que $x(1) = 1$ et $x'(1) = 0$.

6. Étant donné $r > 0$, soit $\mathscr{C}_r \subseteq \mathbb{R}^2$ l'ensemble (uniquement) déterminé par la trajectoire d'un point fixé à un cercle de rayon r qui roule sans glisser sur l'axe des abscisses et tel que $(0,0) \in \mathscr{C}_r$.

(a) Donner une application $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ injective de classe C^1 dont l'image soit $\mathscr{C}_r$. On écrira $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

(*b*) La courbe α est-elle régulière ? Déterminer l'ensemble $\mathsf{NR} = \{s \in \mathbb{R} : \alpha'(s) = (0,0)\}$.

(*c*) Montrer que $(2\pi r, 0) \in \mathscr{C}_r$ et calculer la longueur de la courbe $\bar{\alpha}$ d'image $\mathscr{C}_r \cap ([0, 2\pi r] \times \mathbb{R})$.
Indication : Utiliser que $1 - \cos(s) = 2\sin^2(s/2)$ pour $s \in \mathbb{R}$.

[bonus] (*d*) Reparamétrer la courbe $\bar{\alpha}$ par longueur d'arc.
Indication : Utiliser que

$$\sin(2\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2} \text{ et } \cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$$

pour $x \in [-1, 1]$.

(*e*) Calculer le vecteur tangent $\mathbf{t}_\alpha(s)$ à α, le vecteur normal $\mathbf{n}_\alpha(s)$ à α et la courbure $\kappa_\alpha(s)$ à tout temps $s \in \mathbb{R}$ pour lequel ils soient définis.

(*f*) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que le sinus de l'angle entre $\mathbf{t}_\alpha(s)$ et l'axe des ordonnées est $C.\sqrt{y(s)}$ pour tout $s \in \mathsf{NR}$.

[bonus] (*g*) Soit $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ –pour laquelle on écrit aussi $\beta(s) = (x(s), y(s))$ pour tout $s \in \mathbb{R}$– une courbe injective de classe C^1 qui satisfait que $(0,0) \in \mathsf{Img}(\beta)$ et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ non nul tel que le sinus de l'angle entre $\mathbf{t}_\beta(s)$ et l'axe des ordonnées est $C.\sqrt{y(s)}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{t}_\beta(s)$ existe. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathsf{Img}(\beta) = \mathscr{C}_r$.