1
2
3
4
5
6
7

MAT36F - Calcul Différentiel L3B

Deuxième Semestre — 2022-2023

Examen terminal - mai 2023

Le barème est seulement indicatif.

Justifier toutes les réponses!

1,5pt **1.** Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $\nabla f(x) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $L \subseteq \mathbb{R}^n$ l'ensemble de niveau 0 de f et $x_0 \in L$. Montrer que tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tangent à L en x_0 est orthogonal à $\nabla f(x_0)$.

Solution. Soit $L_{f,c}$ l'ensemble de niveau de f de c. Soit $\alpha : J \to L_{f,c}$ une application de classe C^1 telle que $\alpha(0) = v_0$, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert tel que $0 \in J$. Alors, comme la fonction $f \circ \alpha$ est constante (avec valeur c), sa dérivée est nulle. La règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$0 = (f \circ \alpha)'(t) = \langle \nabla f\big(\alpha(t)\big), \alpha'(t) \rangle,$$

pour tout $t \in J$. En particulier, pour $t = 0$ on a

$$0 = (f \circ \alpha)'(0) = \langle \nabla f(v_0), \alpha'(0) \rangle,$$

i.e. $T_{v_0} L_{f,c} \subseteq \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \nabla f(v_0) \rangle = 0\}$.

3pt **2.** Étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, soit $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par

$$f_{a,b}(x,y) = \big(\ln(1 + b^2x^2 + a^2y^2), e^{bx-ay}\big)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(*a*) Déterminer l'ensemble

$$C = \big\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : f_{a,b} \text{ est } C^1\text{-difféomorphisme local en } (a,b)\big\}.$$

(*b*) Soit $(a,b) \in C$. Montrer qu'il existe un unique point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}(x_0, y_0) = (0,1)$, que l'on déterminera. La fonction $f_{a,b}$ est-elle un C^1-difféomorphisme local en (x_0, y_0) ?

Solution.

(*a*) On voit bien que

$$J_{f_{a,b}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2b^2x}{1+b^2x^2+a^2y^2} & \frac{2a^2y}{1+b^2x^2+a^2y^2} \\ be^{bx-ay} & -ae^{bx-ay} \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que

$$\det\big(J_{f_{a,b}}(x,y)\big) = -2abe^{bx-ay}\frac{bx+ay}{1+b^2x^2+a^2y^2} \tag{1}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En conséquence,

$$\det\big(J_{f_{a,b}}(a,b)\big) = -\frac{4a^2b^2}{1+2a^2b^2}.$$

L'expression précédente nous dit que $\det(J_{f_{a,b}}(a,b)) \neq 0$ si et seulement si $ab \neq 0$. Le théorème d'inversion locale nous dit que $(a,b) \in C$, *i.e.* $f_{a,b}$ est un C^1-difféomorphisme local en (a,b), si et seulement si $\det(J_{f_{a,b}}(a,b)) \neq 0$. En conséquence, $(a,b) \in C$ si et seulement si $ab \neq 0$, *i.e.*

$$C = \big(\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)\times\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}\big).$$

(b) Soit $(a,b) \in C$, *i.e.* $a, b \neq 0$. Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}(x_0,y_0) = (0,1)$. En particulier, $\ln(1+b^2x_0^2+a^2y_0^2) = 0$ implique que $b^2x_0^2+a^2y_0^2 = 0$, ce qui nous dit que $bx_0 = ay_0 = 0$. En conséquence, $x_0 = y_0 = 0$, car $a, b \neq 0$. En outre, comme $f(0,0) = (0,1)$, on conclut qu'il existe un unique point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}(x_0,y_0) = (0,1)$, et $(x_0,y_0) = (0,0)$. L'identité (1) nous dit que $\det(J_{f_{a,b}}(0,0)) = 0$, ce qui nous dit que $f_{a,b}$ n'est pas un C^1-difféomorphisme local en $(0,0)$, d'après le théorème d'inversion locale.

3,5pt **3.** Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ et $h''(0) = 1$, et soit $f : \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x,y) = h\big(2x^3+\ln(|y|)\big) - 2h\big(4y^2-x-4\big)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 0$.

(a) Calculer $f(0,1)$, $\nabla f(0,1)$ et $H_f(0,1)$.

(b) Justifier qu'il existe un intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$ incluant 1 et une application $g : J \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $g(1) = 0$ et $f(g(y),y) = 0$ pour tout $y \in J$.

(c) Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de g en 1.

Solution.

(a) C'est clair que f est de classe C^3, car f est une somme, produit et composition de fonctions de classe C^2. En plus, la règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) = \Big(&6x^2h'\big(2x^3+\ln(|y|)\big)+2h'\big(4y^2-x-4\big),\\ &y^{-1}h'\big(2x^3+\ln(|y|)\big)-2^4yh'\big(4y^2-x-4\big)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12xh'\big(2x^3+\ln(|y|)\big)+36x^4h''\big(2x^3+\ln(|y|)\big)-2h''\big(4y^2-x-4\big),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 6x^2y^{-1}h''\big(2x^3+\ln(|y|)\big)+2^4yh''\big(4y^2-x-4\big),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -y^{-2}h'\big(2x^3+\ln(|y|)\big)+y^{-2}h''\big(2x^3+\ln(|y|)\big)$$
$$-2^4h'\big(4y^2-x-4\big)\big)-2^7y^2h''\big(4y^2-x-4\big),$$

pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ avec $y\neq 0$. L'expression de f nous dit que

$$f(0,1)=h(0)-2h(0)=0,$$

ainsi que

$$\nabla f(0,1)=\big(0.h'(0)+2h'(0),h'(0)-16h'(0)\big)=(2,-15)$$

et

$$H_f(0,1)=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 16 & -144\end{pmatrix}.$$

(b) Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=2\neq 0,$$

le théorème de la fonction implicite nous dit qu'il existe un intervalle ouvert $J\subseteq\mathbb{R}$ incluant 1 et une application $g:J\to\mathbb{R}$ de classe C^3 telle que $g(1)=0$ et $f(g(y),y)=0$ pour tout $y\in J$.

(c) Le théorème de la fonction implicite (ou sinon la règle de dérivation en chaîne et l'identité $f(g(y),y)=0$ pour tout $y\in J$) nous dit que

$$0=\frac{d}{dy}\Big(f\big(g(y),y\big)\Big)=g'(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(g(y),y\big)$$

et

$$\begin{aligned}0&=\frac{d^2}{dy^2}\Big(f\big(g(y),y\big)\Big)=\frac{d}{dy}\Big(g'(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(g(y),y\big)\Big)\\&=g''(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big)+g'(y)\frac{d}{dy}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big)\Big)+\frac{d}{dy}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\big(g(y),y\big)\Big)\\&=g''(y)\frac{\partial f}{\partial x}\big(g(y),y\big)+g'(y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(g(y),y\big)+2g'(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\big(g(y),y\big)\\&\quad+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(g(y),y\big)\end{aligned}$$

pour tout $y\in J$. En particulier,

$$0=g'(1)\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2g'(1)-15,$$

et

$$\begin{aligned}0 &= g''(1)\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + g'(1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) + 2g'(1)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)\\ &= 2g''(1) - 2g'(1)^2 + 32g'(1) - 144,\end{aligned}$$

ce qui implique que $g'(1) = 15/2$ et $g''(1) = 33/4$. En conséquence, le polynôme de Taylor d'ordre 2 de g en 1 est de la forme

$$\begin{aligned}g(1) + g'(1)(y-1) + \frac{g''(1)}{2}(y-1)^2 &= 0 + \frac{15}{2}(y-1) + \frac{33}{8}(y-1)^2\\ &= -\frac{27}{8} - \frac{3}{4}y + \frac{33}{8}y^2.\end{aligned}$$

3pt **4.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

(*a*) Déterminer tous les extremums locaux de f.

(*b*) Montrer que la fonction f est minorée. Est-ce qu'elle est majorée ? Déterminer les extremums globaux de f, s'ils existent.

Solution.

(*a*) On voit bien que f est de classe C^∞, vu qu'elle est une fonction polynômial. Comme tout extremum local est un point critique, on va classifier les points critiques de f. En outre,

$$\nabla f(x,y) = \big(4(x^3 - y), 4(y^3 - x)\big)$$

et

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En conséquence, les points critiques de f sont précisément les $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système

$$\begin{cases} x^3 = y, \\ y^3 = x. \end{cases} \tag{2}$$

Alors, si $x = 0$ ou $y = 0$, on conclut que la solution est $(0,0)$. Si $x, y \neq 0$, le système précédent devient $x^2 = y^2 = 1$, ce qui nous donne les solutions $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$ et $(1,1)$. Les points $(-1,1)$, $(1,-1)$ ne satisfont les identités (2), tandis que les autres points satisfont ces identités. En conséquence, on voit bien que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(-1,-1)$ et $(1,1)$. Le critère de la matrice hessienne nous dit que

(a) $(0,0)$ est un point col, car $\det(H_f(0,0)) = -16 < 0$,

(b) $(\pm 1, \pm 1)$ est un minimum local, car $\det(H_f(\pm 1, \pm 1)) = 108 > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(\pm 1, \pm 1)) = 24 > 0$.

Noter que $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.

(b) On voit bien que

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 - 4xy = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 - 2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $f(x,y) \geq -2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En conséquence, f est minorée. Comme $f(x,y) \geq -2 = f(1,1) = f(-1,-1)$, on conclut que $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont des minimums globaux de f. Comme tout minimum global est un minimum local, on conclut que les minimums globaux de f sont précisément $(-1,-1)$ et $(1,1)$.

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty,$$

la fonction f n'est pas majorée. En particulier, f ne possède pas de maximum global.

3, 5pt **5.** (a) Calculer les applications 2-fois différentiables $x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ qui satisfont que $x''(t) + 4x(t) = 0$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(b) Calculer les applications 2-fois différentiables $x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ qui satisfont que $x''(t) + 4x(t) = \tan(t)$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.
Indication : Utiliser que $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) Parmi les applications $x :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ dans l'item précédent, déterminer l'unique application qui satisfait que $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$.

Solution.

(a) Si l'on propose que $x(t) = e^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$ pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, alors $x''(t) + 4x(t) = 0$ devient $e^{rt}(r^2 + 4) = 0$, ce qui implique que $r \in \{-2i, 2i\}$. En conséquence, une base de l'espace de solutions de $x''(t) + 4x(t) = 0$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ est donnée par $\{\cos(2t), \sin(2t)\}$ définies pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, et, en conséquence, toute solution de l'EDO homogène est précisément de la forme

$$x_H(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$$

pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, où $A, B \in \mathbb{R}$. On écrira $x_1(t) = \cos(2t)$ et $x_2(t) = \sin(2t)$ pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$. Noter que $W(x_1, x_2)(t) = 2$ pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

(b) D'après l'expression donnée dans la dernière page, on a que toute solution x :

$]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$ qui satisfait que $x''(t)+4x(t)=\tan(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= -\cos(2t)\int\frac{\tan(t)\sin(2t)}{2}dt+\sin(2t)\int\frac{\tan(t)\cos(2t)}{2}dt \\ &= -\cos(2t)\int\sin^2(t)dt+\sin(2t)\int\frac{\sin(2t)-\tan(t)}{2}dt \\ &= -\cos(2t)\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}+C\right]+\sin(2t)\left[-\frac{\cos(2t)}{4}+\frac{\ln\left(|\cos(t)|\right)}{2}+D\right] \\ &= -\cos(2t)\left[\frac{t}{2}+C\right]+\sin(2t)\left[\frac{\ln\left(|\cos(t)|\right)}{2}+D\right] \end{aligned}$$

pour tout $t\in]-\pi/2,\pi/2[$, où l'on a utilisé que $\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$ et $\cos(2t)=2\cos^2(t)-1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

(c) D'après l'expression précédente on voit bien que $x(0)=-C$ et $x'(0)=2D-1/2$, ce qui nous dit que $C=-1$ et $D=5/4$, *i.e.*

$$x(t)=-\cos(2t)\left[\frac{t}{2}-1\right]+\sin(2t)\left[\frac{\ln\left(|\cos(t)|\right)}{2}+\frac{5}{4}\right]$$

pour $t\in]-\pi/2,\pi/2[$.

1, 5pt **6.** Soit $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^1 et régulière. Soit $g:[c,d]\to[a,b]$ un reparamétrage de α. Montrer que la longueur de α coïncide avec la longueur de $\alpha\circ g$.

Solution. On voit bien que

$$\begin{aligned} \ell(\alpha\circ g) &= \int_c^d \left\|(\alpha\circ g)'(s)\right\|ds=\int_c^d\left\|\alpha'(g(s)).g'(s)\right\|ds \\ &= \int_c^d\left\|\alpha'(g(s))\right\|.\left|g'(s)\right|ds=\int_a^b\|\alpha'(r)\|dr=\ell(\alpha), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la règle de dérivation en chaîne dans la deuxième égalité et le théorème de changement de variable dans la quatrième égalité.

4pt **7.** Étant donné $a>0$, soit $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ l'application de classe C^∞ donnée par $\alpha(t)=(3a(t^2-3),at(t^2-3))$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

(a) Déterminer l'ensemble $\mathrm{NR}=\{t\in\mathbb{R}:\alpha'(t)=(0,0)\}$.

(b) Montrer que l'image de α est $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:27ay^2=x^2(x+9a)\}$.

[bonus] (c) Trouver un reparamétrage positif $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de α telle que $\alpha\circ g$ soit paramétrée par longueur d'arc.

Indication : Utiliser le dernier item dans la page suivante.

(d) Calculer le vecteur tangent $\mathbf{t}_\alpha(t)$ à α, le vecteur normal $\mathbf{n}_\alpha(t)$ à α et la courbure $\kappa_\alpha(t)$ à tout temps $t \in \mathbb{R}$ pour lequel ils soient définis.

Solution.

(a) Comme

$$\alpha'(t) = \big(6at, 3a(t^2-1)\big)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit bien que

$$||\alpha'(t)||^2 = 36a^2t^2 + 9a^2(t^2-1)^2 = 9a^2(t^2+1)^2$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que

$$||\alpha'(t)|| = 3a(t^2+1) \tag{3}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $||\alpha'(t)|| \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que $\alpha'(t) \neq (0,0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, *i.e.* $\mathsf{NR} = \emptyset$.

(b) On voit bien que $x = 3a(t^2-3)$ et $y = at(t^2-3)$ pour $t \in \mathbb{R}$ nous dit que

$$\frac{x}{3a} + 3 = \frac{x+9a}{3a} = t^2,$$

et

$$\frac{y^2}{a^2} = t^2(t^2-3)^2 = \frac{x+9a}{3a}\frac{x^2}{9a^2},$$

ce qui implique que

$$27ay^2 = (x+9a)x^2,$$

i.e. l'image de α est incluse dans $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 27ay^2 = x^2(x+9a)\}$. Or, soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $27ay_0^2 = x_0^2(x_0+9a)$. Noter que cela nous dit que $x_0+9a \geq 0$. On définit

$$t_0 = \mathsf{sgn}(x_0)\,\mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{x_0+9a}{3a}} \in \mathbb{R},$$

où $\mathsf{sgn}(c) = 1$ si $c \in \mathbb{R}_{>0}$, $\mathsf{sgn}(c) = -1$ si $c \in \mathbb{R}_{<0}$ et $\mathsf{sgn}(0) = 0$. Alors,

$$\begin{aligned}\alpha(t_0) &= \big(3a(t_0^2-3), at_0(t_0^2-3)\big) = \left(x_0, \mathsf{sgn}(x_0)\,\mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{x_0+9a}{3a}}\frac{x_0}{3}\right)\\ &= \left(x_0, \mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{\frac{(x_0+9a)x_0^2}{27a}}\right) = \left(x_0, \mathsf{sgn}(y_0)\sqrt{y_0^2}\right) = (x_0, y_0),\end{aligned}$$

ce qui nous dit que (x_0, y_0) est dans l'image de α. En conséquence, l'image de α est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 27ay^2 = x^2(x+9a)\}$.

(*c*) D'après le résultat du cours, l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de α donnée comme la réciproque de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \int_0^t ||\alpha'(u)||du$$

pour $t \in \mathbb{R}$, donne un reparamétrage positif de α telle que $\alpha \circ g$ soit paramétrée par longueur d'arc. D'après (3),

$$h(t) = \int_0^t 3a(u^2+1)du = at^3 + 3at$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La valeur $g(s)$ de l'application réciproque g de h est alors l'unique racine réelle du polynôme $at^3 + 3at = s$, *i.e.*

$$t^3 + 3t - \frac{s}{a} = 0.$$

L'indication dans la dernière page nous dit alors que le reparamétrage est alors

$$g(s) = \sqrt[3]{\frac{s+\sqrt{s^2+4a^2}}{2a}} - \sqrt[3]{\frac{2a}{s+\sqrt{s^2+4a^2}}}.$$

(*d*) On voit bien que

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||} = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right),$$
$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \left(\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Finalement, si l'on utilise l'expression de la courbure rappelée dans la dernière page, on conclut que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{18a^2(t^2+1)}{27a^3(t^2+1)^3} = \frac{2}{3a(t^2+1)^2}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Formules utiles

1. Pour $p, q, r \in \mathrm{C}^0(J, \mathbb{R})$, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. Alors, l'application $x : J \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t)$$

pour tout $t \in J$ est donnée par

$$x(t) = -x_1(t) \int \frac{r(t)x_2(t)}{W(x_1, x_2)(t)} dt + x_2(t) \int \frac{r(t)x_1(t)}{W(x_1, x_2)(t)} dt$$

pour tout $t \in J$, où $x_1, x_2 : J \to \mathbb{R}$ forment une base de solutions de l'équation homogène et $W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_2 x_1'$.

2. Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ est une courbe régulière avec $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, alors

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)}{[(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2]^{3/2}},$$

pour tout $t \in I^\circ$ si le dénominateur est non nul.

3. Pour $c \in \mathbb{R}$ non nul, le polynôme $x^3 + 3x + c = 0$ possède une seule racine réelle de la forme $x = u - u^{-1}$ avec $u \in \mathbb{R}_{>0}$, où u est la solution positive de l'équation $u^6 + cu^3 - 1 = 0$.