Université Grenoble Alpes	2017-2018
Licence 3	Parcours B

Calcul intégral

Examen du 22/05/2018, 14-18h

Les exercices sont indépendants.
Les réponses doivent être justifiées. Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.
Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1. On rappelle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 \text{ et } \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Soit $a \in]-1, 1[$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} dx$. Dans la suite, on posera

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x} dx.$$

2. Montrer que F est dérivable sur $]-1, 1[$ et exprimer F' sous forme d'une intégrale.
3. Vérifier que $F'(a) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+a) + (1-a)u^2} du$ (on pourra faire le changement de variables $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$).
4. Justifier qu'il existe $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $a = \cos(2\theta)$ et que $F'(a) = \dfrac{2\theta}{\sin(2\theta)} = \dfrac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}}$.
5. Calculer $F(a)$ pour tout $a \in]-1, 1[$.

Exercice 2. Pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, on définit

$$f_n(x) := \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{n}, \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

On pose aussi $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Justifier que, pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.
2. Vérifier que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.
3. Montrer que $f_n(x) \leqslant f(x)$ pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$ (on pourra utiliser, en la justifiant, l'inégalité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour tout $u > -1$).
4. Déduire de ce qui précède que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} dt.$$

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose f bornée sur $[0,+\infty[$. Est-ce que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge ? On donnera une preuve si c'est le cas, ou un contre-exemple si ce n'est pas le cas.
2. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.
   (a) On suppose aussi que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ existe dans $\mathbb{R}$. Montrer que $l = 0$.
   (b) On suppose maintenant qu'il existe $K > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant K\,|x - y|$ pour tous $x, y \geqslant 0$. On veut montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.
      i. Justifier l'existence de $A > 0$ tel que $\displaystyle\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon^2}{K}$ pour tous $A \leqslant x \leqslant y$.
      ii. Montrer que, pour tout $x \geqslant A$, il existe $c \in \left[x, x + \frac{\varepsilon}{K}\right]$ tel que $\displaystyle f(c) = \frac{K}{\varepsilon}\int_x^{x+\frac{\varepsilon}{K}} f(t)dt$, et en déduire que $|f(c)| \leqslant \varepsilon$. On pourra utiliser la première formule de la moyenne.
      iii. En déduire que $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$ et conclure.

Exercice 4. Soient $p \in]0,1[$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y des variables aléatoires indépendantes sur Ω. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ suivent une loi géométrique de paramètre p (ce qui veut dire que $P(X = n) = P(Y = n) = (1-p)p^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On définit aussi

$$U := \max(X, Y) \text{ et } V := \min(X, Y).$$

1. Calculer $P(Y \geqslant X)$ et $P(Y = X)$.
2. Montrer que $P(Y > X) = P(X > Y)$.
3. Calculer $P(U \leqslant u \text{ et } V \geqslant v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{N}$. Indication : si $v \leqslant u$, on vérifiera d'abord que $U \leqslant u$ et $V \geqslant v$ si et seulement si $v \leqslant X \leqslant u$ et $v \leqslant Y \leqslant u$.
4. Déterminer $P(U = n)$ et $P(V = n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (on pourra commencer par calculer $P(U \leqslant n)$ et $P(V \geqslant n)$). Quelle est la loi de V ?

Exercice 5. Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}e^{itx}dx \;=\; e^{-t^2/2} \tag{0.1}$$

valable pour tout nombre **complexe** $t \in \mathbb{C}$.
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, U une variable aléatoire réelle sur Ω de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $X := e^U$.

1. Calculer $m_k = E(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (on pourra appliquer la formule (0.1)).
2. Soient $a \in [-1,1]$ et $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $v \in \mathbb{R}$, par
$$f_a(v) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-v^2/2}\Big(1 + a\sin(\pi v)\Big).$$
   Vérifier que f_a est une densité de probabilité.
3. Soit maintenant V une variable aléatoire réelle de densité f_a, et soit $Y = e^V$. Montrer que $E(Y^k) = m_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Vérifier que X et Y ne suivent pas la même loi si $a \neq 0$.