1
2
3

MAT366

Deuxième Semestre — 2017-2018

Troisième Contrôle Continu

1. Pour tout $a > 0$, on pose

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(x) dx.$$

(a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant $F(a)$.

(b) Montrer que, pour tout $a > 0$,

$$F(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2} dx.$$

(c) Donner un équivalent de $F(a)$ quand $a \to +\infty$.

Solution.

(a) Comme $e^{-ax} \arctan(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, la convergence coïncide avec la convergence absolue dans ce cas. En outre, vu que $\arctan(x) \leq \pi/2$ pour tout $x \geq 0$, et que e^{-ax} est (absolument) intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $a > 0$, on conclut que l'intégrale définissant F est (absolument) convergente. En plus, on voit aussi que

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(x) dx \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{\pi}{2a}.$$

(b) On applique la méthode d'intégration par parties deux fois pour trouver

$$\begin{aligned}
F(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-ax} \arctan(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)' \arctan(x) dx \\
&= \left[\frac{e^{-ax}}{-a} \arctan(x)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)' \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{a}\left[\frac{e^{-ax}}{-a} \frac{1}{1+x^2}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{2xe^{-ax}}{(1+x^2)^2} dx \\
&= \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a^2} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2} dx.
\end{aligned}$$

(c) On note d'abord que $x \leq 1 + x^2$, pour tout $x \geq 0$. En effet, l'inégalité précédente est vérifiée si $x \in [0, 1]$. D'ailleurs, si $x \geq 1$, alors $x^2 \geq x$, ce qui implique aussi $x \leq 1 + x^2$. En particulier, on trouve que

$$\frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2} \leq \frac{e^{-ax}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2},$$

pour tout $x \geq 0$, puisque $e^{-ax} \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ et $a > 0$. Comme $1/(1+x^2)$ est (absolument) intégrable sur $[0,+\infty[$, le théorème de convergence dominée nous dit que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2} = \int_0^{+\infty} \lim_{a\to+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2} = 0,$$

puisque la limite simple quand $a \to +\infty$ de l'application $x \mapsto xe^{-ax}/(1+x^2)^2$ définie sur $[0,+\infty[$ est la fonction nulle. Par conséquent, on voit bien que

$$\lim_{a\to+\infty} a^2 F(a) = \lim_{a\to+\infty} \left(1 - 2\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{(1+x^2)^2}\right) = 1,$$

ce qui nous dit que $F(a) \sim 1/a^2$ lorsque $a \to +\infty$.

2. (a) Dessiner l'ensemble

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

(b) On pose $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que φ est un C^1-difféomorphisme de

$$\left\{(r,\theta) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\,\middle|\, 0 < r < 2\cos(\theta)\right\}$$

sur l'intérieur de D.

(c) Soit $J = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\arctan(2\cos(t))dt$. Calculer J.
Indication : on pourra faire le changement de variables $u = \cos(t)$, ainsi qu'une intégration par parties.

(d) Calculer

$$\iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2} dxdy.$$

Solution.

(a) Il s'agit du demi-disque (fermé) supérieur de centre $(1,0)$ et rayon 1.

(b) Comme φ est la restriction du C^1-difféomorphisme $\bar{\varphi}$ (donné par la même expression que celle de φ) de

$$\left\{(r,\theta) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]0,2\pi\right[\right\}$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \geq 0\}$, il suffit de vérifier que la image de

$$\left\{(r,\theta) \in \left]0,+\infty\right[\times \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\,\middle|\, 0 < r < 2\cos(\theta)\right\}$$

par $\bar{\varphi}$ est l'intérieur de D. Pour le démontrer, on note d'abord que

$$1 > (x-1)^2 + y^2 = (r\cos(\theta)-1)^2 + (r\sin(\theta))^2 = r^2 + 1 - 2r\cos(\theta)$$

équivaut à $r < 2\cos(\theta)$. Cela implique en particulier que $\cos(\theta) > 0$ (*i.e.* $x > 0$). En outre, $x > 0$ et $y > 0$ équivalent à $\theta \in]0, \pi/2[$.

(c) On voit bien que

$$J = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\arctan\big(2\cos(t)\big)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \arctan(u)du,$$

où $u = 2\cos(t)$. En outre, il est clair qu'une primitive de $\arctan(u)$ est donnée par

$$u\arctan(u) - \frac{1}{2}\ln(u^2+1),$$

ce qui implique que

$$J = \arctan(2) - \frac{\ln(5)}{4}.$$

(d) À partir du changement de variables indiqué ci-dessus on voit bien que

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2}dxdy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} \frac{r\sin(\theta)}{1+r^2} r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\Big[r - r\arctan(r)\Big]_0^{2\cos(\theta)} d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\cos(\theta)d\theta - J = 1 - \arctan(2) + \frac{\ln(5)}{4},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé pour la première intégrale de l'avant-dernier membre que la primitive de $2\sin(\theta)\cos(\theta)$ est $\sin(\theta)^2$.

3. Soit N le nombre d'enfants dans une famille. On suppose que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$P(N = n) = a\frac{2^n}{n!},$$

où $a > 0$ est une constante.

(a) Calculer a.

(b) On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $1/2$ et celle que ce soit un garçon est $1/2$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X le nombre de garçons par famille. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait au moins un garçon.

(*c*) On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte exactement deux enfants ?

Solution.

(*a*) Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(N=n)=1$, on voit bien que $a=e^{-2}$.

(*b*) Soit B l'évènement "la famille ne comporte aucun garçon". Il est clair que $P(B|N=n)=1/2^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et, en conséquence,

$$P(B)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B|N=n)P(N=n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}P(N=n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}e^{-2}\frac{2^n}{n!}=e^{-1}.$$

Comme l'évènement "la famille comporte au moins un garçon" est le complémentaire de B, la probabilité demandée est

$$P(B^c)=1-P(B)=\frac{e-1}{e}.$$

(*c*) Soit G l'évènement "la famille comporte exactement un garçon". Il est clair que $P(G|N=n)=n/2^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ce qui implique que

$$P(G)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(G|N=n)P(N=n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^n}P(N=n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n}{2^n}e^{-2}\frac{2^n}{n!}=e^{-1}.$$

D'après la formule de Bayes on trouve que

$$P(N=2|G)=\frac{P(G|N=2)P(N=2)}{P(G)}=e^{-1}.$$