1
2
3

MAT35D - ALGÈBRE L3B

Premier Semestre — 2022-2023

Soutien

Justifier toutes vos réponses.

---

1. Soit $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ l'espace vectoriel formé des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4, dont l'élément neutre sera noté $\mathbf{0}_V$. Pour $P \in V$, on notera P' son polynôme dérivé, et, étant donné $c \in \mathbb{R}$, on notera $P(c)$ l'évaluation de P en c.

(a) Donner une base de V. En déduire la dimension de V.

(b) Soit

$$\mathscr{B}_1' = \left\{2 - X + X^4, 1 + X^2, 3 + 2X - X^2 + X^4\right\} \subseteq V.$$

Montrer que $\mathscr{B}_1'$ est une famille libre de V. Soit V_1 le sous-espace vectoriel de V engendré par $\mathscr{B}_1'$. Quelle est sa dimension ?

(c) Soit

$$V_2 = \left\{P \in V : P(-1) + P'(0) = P(0) - P'(1) = 0\right\}.$$

Montrer que V_2 est le noyau d'une application linéaire surjective que l'on précisera. En déduire que V_2 est un sous-espace vectoriel de V et déterminer sa dimension.

(d) Peut-on avoir $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}_V\}$? Déterminer une base $\mathscr{B}_{12}$ du sous-espace vectoriel $V_1 \cap V_2$ de V. En déduire la dimension de $V_1 \cap V_2$.

(e) Pour $i \in \{1, 2\}$, trouver une base $\mathscr{B}_i$ de V_i telle que $\mathscr{B}_{12} \subseteq \mathscr{B}_i$. Pourquoi est-il possible de trouver telles bases ?

(f) Est-ce que $V_1 + V_2 = V$?

(g) L'ensemble $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est-il une famille libre de V ? Et une base de V ?

Solution.

(a) L'ensemble

$$\mathscr{B}_c = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$$

est une famille libre et génératrice de V. En effet, par définition un polynôme $P = \sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in V$ s'écrit comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathscr{B}_c$, ce qui nous dit que $\mathscr{B}_c$ est une famille génératrice de V. En outre, comme deux polynômes $P = \sum_{i=0}^{4} a_i X^i \in V$ et $Q = \sum_{i=0}^{4} b_i X^i \in V$ coïncident si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0,4]\!]$, l'identité $\sum_{i=0}^{4} a_i X^i = \mathbf{0}_V$ nous dit que $a_i = 0$ pour tout $i \in [\![0,4]\!]$, ce qui implique que $\mathscr{B}_c$ est libre. On conclut que $\dim(V) = \#(\mathscr{B}_c) = 5$.

(b) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(2 - X + X^4) + \beta(1 + X^2) + \gamma(3 + 2X - X^2 + X^4) = \mathbf{0}_V. \tag{1}$$

On veut montrer que cela implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Or,

$$\begin{aligned}&\alpha(2 - X + X^4) + \beta(1 + X^2) + \gamma(3 + 2X - X^2 + X^4)\\ &= (2\alpha + \beta + 3\gamma) + (-\alpha + 2\gamma)X + (\beta - \gamma)X^2 + (\alpha + \gamma)X^4,\end{aligned}$$

ce qui nous dit que (1) équivaut à

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 3\gamma & = 0, \\ -\alpha + 2\gamma & = 0, \\ \beta - \gamma & = 0, \\ \alpha + \gamma & = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières lignes nous disent que $-\alpha = \beta = \gamma$. Si l'on utilise ces identités dans la deuxième ligne du système précédent on trouve $0 = -\alpha + 2\gamma = 3\gamma$, ce qui implique finalement $\alpha = \beta = \gamma = 0$, comme on voulait montrer. En conséquence $\mathscr{B}_1'$ est libre. Comme toute partie $S \subseteq V$ est une famille génératrice du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle S \rangle$ engendré par S, on conclut que $\mathscr{B}_1'$ est une base de $V_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_1' \rangle$. Cela nous dit aussi que $\dim(V_1) = \#(\mathscr{B}_1') = 3$.

(c) On considère l'application $f : V \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(P) = \big(P(-1) + P'(0), P(0) - P'(1)\big)$$

pour tout $P \in V$. On voit bien que f est linéaire, car

$$\begin{aligned} f(P + \lambda Q) &= \big((P + \lambda Q)(-1) + (P + \lambda Q)'(0), (P + \lambda Q)(0) - (P + \lambda Q)'(1)\big) \\ &= \big(P(-1) + \lambda Q(-1) + P'(0) + \lambda Q'(0), \\ &\quad P(0) + \lambda Q(0) - P'(1) - \lambda Q'(1)\big) \\ &= \big(P(-1) + P'(0), P(0) - P'(1)\big) + \lambda\big(Q(-1) + Q'(0), Q(0) - Q'(1)\big) \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

pour tous $P, Q \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En outre, c'est clair que $\mathrm{Ker}(f) = V_2$. Finalement, on note que $f(1) = (1,1)$ et $f(X) = (0,-1)$. En conséquence, $\{(1,1),(0,-1)\} \subseteq \mathrm{Img}(f)$. Comme $\mathrm{Img}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle\{(1,1),(0,-1)\}\rangle$ engendré par $\{(1,1),(0,-1)\}$ est aussi inclus dans $\mathrm{Img}(f)$. Or, comme $\{(1,1),(0,-1)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ et son cardinal coïncide avec la dimension de $\mathbb{R}^2$, elle est aussi une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, ce qui nous dit que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle\{(1,1),(0,-1)\}\rangle$. En conséquence, $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle\{(1,1),(0,-1)\}\rangle \subseteq \mathrm{Img}(f) \subseteq \mathbb{R}^2$, *i.e.* $\mathrm{Img}(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui nous dit que f est une application surjective.

Finalement, le théorème du rang nous dit que

$$\dim(V_2) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Img}(f)) = \dim(V) - \dim(\mathbb{R}^2) = 5 - 2 = 3.$$

(d) Comme $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de V, alors $\dim(V_1 + V_2) \leq \dim(V) = 5$. En outre, on sait que $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$, ce qui nous dit que

$$\begin{aligned} \dim(V_1 \cap V_2) &= \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) \\ &\geq \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V) = 3 + 3 - 5 = 1. \end{aligned}$$

En conséquence, $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}_V\}$.

On va trouver une base de $V_1 \cap V_2$. Pour cela, on remarque que, étant donné $P \in V$, $P \in V_1$ si et seulement s'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \alpha(2 - X + X^4) + \beta(1 + X^2) + \gamma(3 + 2X - X^2 + X^4). \tag{2}$$

Un calcul trivial nous dit que dans ce cas

$$\begin{aligned} P(-1) &= 4\alpha + 2\beta + \gamma, & P(0) &= 2\alpha + \beta + 3\gamma, \\ P'(0) &= -\alpha + 2\gamma, & P'(1) &= 3\alpha + 2\beta + 4\gamma, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$P(-1) + P'(0) = 3\alpha + 2\beta + 3\gamma \text{ et } P(0) - P'(1) = -\alpha - \beta - \gamma.$$

En conséquence, le polynôme $P \in V_1$ donné dans (2) est dans V_2 si et seulement si

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma &= 0. \end{cases}$$

En particulier, si l'on fait la somme de la première ligne et de la deuxième ligne multipliée par 3 on trouve que $\beta = 0$, ce qui implique finalement que le système précédent équivaut à $\beta = 0$ et $\gamma = -\alpha$. En conséquence, $P \in V_1$ donné dans (2) est dans V_2 si et seulement si

$$P = \alpha(2 - X + X^4) + 0(1 + X^2) - \alpha(3 + 2X - X^2 + X^4) = \alpha(-1 - 3X + X^2).$$

Comme $\mathscr{B}_{12} = \{-1 - 3X + X^2\}$ est libre, on conclut que $V_1 \cap V_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_{12} \rangle$ et $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

(e) Le théorème de la base incomplète nous dit que, étant donné toute partie libre d'un espace vectoriel W, on peut toujours la compléter en une base de W. Cela implique l'existence de la base $\mathscr{B}_i$ de V_i telle que $\mathscr{B}_{12} \subseteq \mathscr{B}_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. On pose

$$\mathscr{B}_1 = \left\{ -1 - 3X + X^2, 2 - X + X^4, 1 + X^2 \right\} \subseteq V_1.$$

Comme $3 + 2X - X^2 + X^4 = -(-1 - 3X + X^2) + (2 - X + X^4)$, on voit que $\mathscr{B}_1' \subseteq \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_1 \rangle \subseteq V_1$, ce qui implique que

$$V_1 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_1' \rangle \subseteq \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_1 \rangle \subseteq V_1.$$

En conséquence $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_1 \rangle = V_1$, *i.e.* $\mathscr{B}_1$ est une famille génératrice de V_1. Comme $\dim(V_1) = 3 = \#(\mathscr{B}_1)$, $\mathscr{B}_1$ est une base de V_1.

Par ailleurs, on pose

$$\mathscr{B}_2 = \left\{ -1 - 3X + X^2, 1 - 2X + X^3, -1 - 5X + X^4 \right\}.$$

On voit bien que $\mathscr{B}_2 \subseteq V_2$. C'est clair que $\mathscr{B}_2$ est libre, car, étant donné $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha(-1 - 3X + X^2) + \beta(1 - 2X + X^3) + \gamma(-1 - 5X + X^4) = \mathbf{0}_V,$$

l'égalité des coefficients de X^2 nous dit que $\alpha = 0$, celle des coefficients de X^3 nous dit que $\beta = 0$, et celle des coefficients de X^4 nous dit que $\gamma = 0$. Comme $\dim(V_2) = 3 = \#(\mathscr{B}_2)$, $\mathscr{B}_2$ est une base de V_2.

(f) Comme $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$ et $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$, d'après l'item (d), on conclut que $\dim(V_1 + V_2) = 3 + 3 - 1 = 5 = \dim(V)$, ce qui implique que $V_1 + V_2 = V$.

(g) Oui, par construction l'ensemble $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une famille libre de V. Comme $\#(\mathscr{B}) = 5 = \dim(V)$, $\mathscr{B}$ est une base de V.

2. Soit $V = \mathsf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des matrices réelles à 3 lignes et 2 colonnes. Soient

$$U_1 = \left\{ A \in V : \text{la somme des coefficients de chaque ligne de } A \text{ vaut zéro} \right\}$$

et

$$U_2 = \left\{ A \in V : \text{la somme des coefficients de chaque colonne de } A \text{ vaut zéro} \right\}.$$

(a) Montrer que U_1 et U_2 sont des sous-espaces vectoriels de V.

(b) Trouver une base $\mathscr{B}_{12}$ de $U_1 \cap U_2$. En déduire $\dim(U_1 \cap U_2)$.

(c) Trouver des bases $\mathscr{B}_1$ de U_1 et $\mathscr{B}_2$ de U_2 telles que $\mathscr{B}_{12} \subseteq \mathscr{B}_i$ pour $i = 1, 2$. En déduire $\dim(U_1)$, $\dim(U_2)$ et $\dim(U_1 + U_2)$.

(d) Trouver des sous-espaces vectoriels $V_i \subseteq U_i$ pour $i = 1, 2$ tels que $V_1 \oplus V_2 = U_1 + U_2$.

(e) Trouver un sous-espace vectoriel V_3 de V tel que $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

Solution.

(a) On voit bien que la matrice nulle de $V = \mathsf{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ est dans U_1 et U_2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $A = (a_{i,j})_{i\in[\![1,3]\!], j\in[\![1,2]\!]}$ et $B = (b_{i,j})_{i\in[\![1,3]\!], j\in[\![1,3]\!]}$ dans U_1, *i.e.*

$$\sum_{j=1}^{2} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{2} b_{i,j} = 0$$

pour tout $i \in [\![1,3]\!]$. Alors $\sum_{j=1}^{2}(a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) = 0$, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, ce qui nous dit que $A + \lambda B \in U_1$. L'argument analogue montre que $A + \lambda B \in U_2$ si $A, B \in U_2$.

(*b*) On voit bien que

$$\mathscr{B}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $U_1 \cap U_2$. En effet, $\mathscr{B}_{12} \subseteq U_1 \cap U_2$ est libre, vu que le premier élément de la première ligne l'identité matricielle

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ nous dit que $\lambda_1 = 0$, tandis que le premier élément de la deuxième nous dit que $\lambda_2 = 0$. En outre, par définition de U_1 et U_2, un élément générique de $U_1 \cap U_2$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $\mathscr{B}_{12}$ est une famille génératrice de U_1 et U_2. On conclut que $\dim(U_1 \cap U_2) = \#(\mathscr{B}_{12}) = 2$.

(*c*) Soient

$$\mathscr{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

et

$$\mathscr{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

On voit bien que $\mathscr{B}_{12} \subseteq \mathscr{B}_i \subseteq U_i$ est libre pour $i \in \{1, 2\}$. En outre, on voit bien que $\mathscr{B}_i \subseteq U_i$ est libre pour $i \in \{1, 2\}$. On va le vérifier pour $\mathscr{B}_1$ et on laisse la vérification analogue pour $\mathscr{B}_2$ au lecteur/à la lectrice (en tout cas, le calcul dans le dernier item implique que $\mathscr{B}_2$ est libre). Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, le premier élément de la deuxième ligne nous dit que $\lambda_2 = 0$, tandis que les le premier élément de la première et de la troisième lignes nous donnent $\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ et $-\lambda_1 - \lambda_3 = 0$, ce qui implique $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Par ailleurs, par définition de U_1, un élément générique de U_1 est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \\ c & -c \end{pmatrix} = \frac{a-c}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{a+c}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $\mathscr{B}_1$ est une famille génératrice de U_1. De façon analogue, par définition de U_2, un élément générique de U_2 est de la forme

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} &= \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{c-d}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{a+b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{c+d}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui nous dit que $\mathscr{B}_2$ est une famille génératrice de U_2. On conclut que $\mathscr{B}_i$ est une base de U_i pour $i \in \{1,2\}$. En conséquence, $\dim(U_1) = \#(\mathscr{B}_1) = 3$ et $\dim(U_2) = \#(\mathscr{B}_2) = 4$.

Comme $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $U_1 + U_2$, vu qu'il s'agit toujours d'une famille génératrice de $U_1 + U_2$, les conditions $\mathscr{B}_{12} \subseteq \mathscr{B}_i$ pour $i \in \{1,2\}$ nous disent que $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est aussi libre. On conclut que

$$\begin{aligned}\dim(U_1 + U_2) &= \#(\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2) = \#(\mathscr{B}_1) + \#(\mathscr{B}_2) - \#(\mathscr{B}_{12}) \\ &= \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = 5.\end{aligned}$$

(d) On peut définir $V_1 = U_1$ et $V_2 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_{12}\rangle$. On voit bien que $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}_V\}$ et que $V_1 + V_2 = U_1 + U_2$, ce qui nous dit que $V_1 \oplus V_2 = U_1 + U_2$.

(e) Soient

$$\mathscr{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et $V_3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathscr{B}_3 \rangle$. On affirme que l'ensemble $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$ est libre. En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned}&\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \lambda_4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3}$$

On veut montrer que cela implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_6 = 0$. Or, la deuxième ligne de (3) équivaut à $-\lambda_2 + \lambda_5 = 0$ et $\lambda_2 + \lambda_5 = 0$, ce qui nous dit que $\lambda_2 = \lambda_5 = 0$, que l'on suppose désormais. La dernière ligne de (3) équivaut à $-\lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$, ce qui nous dit que $\lambda_4 = 0$ et $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, que l'on suppose désormais. La dernière entrée de la première ligne de (3) équivaut à $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, ce qui nous dit, avec les identités précédentes, que $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Finalement, comme $\lambda_1 = \cdots = \lambda_5 = 0$, (3) nous dit que $\lambda_6 = 0$. En conséquence $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$ est libre. Comme $\#(\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3) = 6 = \dim(V)$, on conclut que $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$ est une base de V, ce qui nous dit que $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = V$.

3. Soit $V = \mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel formé des triplets de nombres réels, dont l'élément neutre sera noté $\mathbf{0}_V$. On rappelle que la **base canonique** de V est la famille $\mathscr{B}_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ de V, où $e_i \in \mathbb{R}^3$ est le triplet avec toutes les coordonnées nulles sauf la i-ème coordonnée, qui vaut 1.

(a) Soit $f : V \to V$ l'application donnée par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{9}\big(9x, 4x+7y-8z, 8x-4y-7z\big)$$

pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une application linéaire et écrire la représentation matricielle A de f dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de V.

(b) Montrer que -1 et 1 sont les seules valeurs propres de f.

(c) Pour chaque valeur propre $\lambda \in \{\pm 1\}$ de f trouver le sous-espace propre $V_\lambda \subseteq V$ associé. Est-ce que $V_{-1} \cap V_1 \neq \{\mathbf{0}_V\}$? Vérifier que $\dim(V_{-1}) = 1$ et $\dim(V_1) = 2$.

(d) À partir des items précédents, montrer que $V_{-1} + V_1 = V$. L'application f est-elle diagonalisable ?

(e) Trouver une base $\mathscr{B}_{-1} = \{u\}$ de V_{-1} et une base $\mathscr{B}_1 = \{v, w\}$ de V_2 telles que les coordonnées de v et de w se trouvent à partir de faire une permutation cyclique sur les coordonnées de u.

(f) Quelle est la représentation matricielle de f dans la base $\mathscr{B} = \{u, v, w\}$? Trouver la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}_c$ dans la base $\mathscr{B}$, ainsi que la matrice inverse.

(g) Calculer A^{10}.

Solution.

(a) C'est clair que

$$\begin{aligned}
&f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')\\
&= \frac{1}{9}\big(9(x+\lambda x'), 4(x+\lambda x') + 7(y+\lambda y') - 8(z+\lambda z'),\\
&\qquad 8(x+\lambda x') - 4(y+\lambda y') - 7(z+\lambda z')\big)\\
&= \frac{1}{9}\big(9x, 4x+7y-8z, 8x-4y-7z\big)\\
&\quad + \lambda\frac{1}{9}\big(9x', 4x'+7y'-8z', 8x'-4y'-7z'\big)\\
&= f(x,y,z) + \lambda f(x',y',z')
\end{aligned}$$

pour tous $x, y, z, x', y', z', \lambda \in \mathbb{R}$. En conséquence, f est bien une application linéaire. En outre, on voit bien que la représentation matricielle de f dans la base canonique est

$$A = [f]_{\mathscr{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que la représentation matricielle $[f]_{\mathscr{B}_c}$ est obtenue de la façon suivante : la i-ème colonne de $[f]_{\mathscr{B}_c}$ est le vecteur $f(e_i)$ (écrit sous forme de colonne), pour tout $e_i \in \mathscr{B}_c$.

(b) On rappelle que les valeurs propres de f sont précisément les racines du polynôme caractéristique χ_f, que l'on peut calculer à partir de l'expression

$$\chi_f = \det\big([f]_{\mathscr{B}_c} - X\,\mathsf{Id}_3\big) = \det\begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-X & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-X \end{pmatrix},$$

où $\mathsf{Id}_3 \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est la matrice unité d'ordre 3. Un calcul élémentaire montre que

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 4/9 & 7/9-X & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & -7/9-X \end{pmatrix} &= (1-X)\det\begin{pmatrix} 7/9-X & -8/9 \\ -4/9 & -7/9-X \end{pmatrix} \\ &= -(X-1)\Big(X^2 - \frac{49}{81} - \frac{32}{81}\Big) \\ &= -(X-1)(X^2-1) = -(X-1)^2(X+1).\end{aligned}$$

En conséquence, les valeurs propres de f sont -1 et 1.

(c) On rappelle que, si λ est une valeur propre de f, l'espace propre associé est donné par

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = \mathsf{Ker}(f - \lambda\,\mathsf{id}_V).$$

En plus, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des valeurs propres différentes de f, $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}_V\}$. En effet, si $v \in V_\lambda \cap V_\mu$, $\lambda v = f(v) = \mu v$, ce qui implique $(\mu - \lambda)v = \mathbf{0}_V$, ce qui nous dit que $v = \mathbf{0}_V$. En particulier, $V_{-1} \cap V_1 = \{\mathbf{0}_V\}$.

En identifiant des vecteurs colonnes (à 3 lignes) avec des éléments de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire $V_\lambda = \mathsf{Ker}([f]_{\mathscr{B}_c} - \lambda\,\mathsf{Id}_3)$. On va calculer cet espace pour $\lambda \in \{\pm 1\}$. Si $\lambda = -1$, on a

$$\begin{aligned}[f]_{\mathscr{B}_c} + \mathsf{Id}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4/9 & 16/9 & -8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 2/9 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{L_1/2 \to L_1 \\ 9L_2/4 \to L_2 \\ 9L_3/2 \to L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 4L_1 \to L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_2 + 2L_3 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où l'on a effectué des opérations sur le lignes, où $\alpha L_i + \beta L_j \to L_j$ indique que l'on a remplacé la j-ème ligne par la combinaison linéaire donnée par la i-ème ligne multipliée α et la j-ème ligne multipliée par β. En conséquence, on voit que

$$\begin{aligned}V_{-1} = \mathsf{Ker}([f]_{\mathscr{B}_c} + \mathsf{Id}_3) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ et } -2y + z = 0\big\},\end{aligned}$$

ce qui nous dit qu'un élément générique de V_{-1} est de la forme

$$(x,y,z)=(0,y,2y)=y(0,1,2),$$

où l'on a utilisé que $z=2y$. En conséquence, $V_{-1}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle(0,1,2)\rangle$. On pose $\mathscr{B}_{-1}=\{(0,1,2)\}$. Comme il s'agit d'une famille libre, on conclut que $\dim(V_{-1})=1$.

De façon analogue, si $\lambda=1$, on a

$$[f]_{\mathscr{B}_c}-\mathrm{Id}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\4/9&-2/9&-8/9\\8/9&-4/9&-16/9\end{pmatrix}\xrightarrow[9L_3/4\to L_3]{9L_2/2\to L_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&-4\\2&-1&-4\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{L_2+L_3\to L_2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&-1&-4\end{pmatrix}$$

où l'on a effectué des opérations sur le lignes avec la même notation que précédemment. En conséquence, on voit que

$$V_1=\mathrm{Ker}([f]_{\mathscr{B}_c}-\mathrm{Id}_3)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x-y-4z=0\big\},$$

ce qui nous dit qu'un élément générique de V_1 est de la forme

$$(x,y,z)=(y/2+2z,y,z)=y(1/2,1,0)+z(2,0,1),$$

où l'on a utilisé que $x=y/2+2z$. En conséquence, on trouve bien que $V_1=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle(1/2,1,0),(2,0,1)\rangle=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle(1,2,0),(2,0,1)\rangle$. On pose $\mathscr{B}_1=\{(1,2,0),(2,0,1)\}$. Comme cette famille est libre, on conclut que $\dim(V_1)=2$.

(d) Comme $V_{-1}\cap V_1=\{\mathbf{0}_V\}$, le sous-espace vectoriel $V_{-1}+V_1$ de V satisfait que $\dim(V_{-1}+V_1)=\dim(V_{-1})+\dim(V_1)=3=\dim(V)$, ce qui nous dit que $V_{-1}+V_1=V$. On rappelle que f est diagonalisable s'il existe une base de V formée des vecteurs propres de f. Dans ce cas, la famille $\mathscr{B}=\mathscr{B}_{-1}\sqcup\mathscr{B}_1=\{(0,1,2),(1/2,1,0),(2,0,1)\}$ est formée des vecteurs propres de f. Elle est libre et génératrice par l'item précédent. En conséquence, f est diagonalisable

(e) Les bases $\mathscr{B}_{-1}$ et $\mathscr{B}_1$ définies précédemment satisfont les propriétés demandées.

(f) La représentation matricielle de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$D=[f]_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

On rappelle que la représentation matricielle $[f]_{\mathscr{B}}$ est obtenue de la façon suivante : la i-ème colonne de $[f]_{\mathscr{B}}$ est le vecteur colonne de coordonnées de $f(v_i)$, où $v_i \in \mathscr{B}$ est le i-ème vecteur de $\mathscr{B}$. En outre, la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}_c$ dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que cette matrice est obtenue de la façon suivante : la i-ème colonne de P est le vecteur v_i (écrit sous forme de colonne), où $v_i \in \mathscr{B}$ est le i-ème vecteur de $\mathscr{B}$. La matrice inverse P^{-1} de P donne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_c$. De façon explicite

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque l'identité fondamental

$$A = [f]_{\mathscr{B}_c} = P[f]_{\mathscr{B}}P^{-1} = PDP^{-1}. \tag{4}$$

(g) À partir de (4) on voit bien que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela nous dit que, si $n \in \mathbb{N}$ est pair $D^n = \mathsf{Id}_3$, ce qui implique que

$$A^n = PD^nP^{-1} = P\,\mathsf{Id}_3\,P^{-1} = \mathsf{Id}_3$$

si $n \in \mathbb{N}$ est pair. En particulier, $A^{10} = \mathsf{Id}_3$.