MAT35B - L3A ALGÈBRE
Premier semestre — 2023-2024

Fiche 7: Dualité et réduction d'endomorphismes

Espace vectoriel dual

⋆ **1.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{k}$, et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On notera $P = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}(P^{-1}) = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}^*\mathscr{B}'^*}$. En déduire que toute base de E^* est la duale d'une base de E.

2. Soient E et F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels de dimension finie, et b une forme bilinéaire sur $E \times F$. On définit les applications linéaires $\ell_b : E \to F^*$ et $r_b : F \to E^*$ via $\ell_b(x) = b(x,\cdot) \in F^*$ et $r_b(y) = b(\cdot, y) \in E^*$, respectivement, pour tous $x \in E$ et $y \in F$.

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On note $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_m^*)$ et $\mathscr{B}'^* = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ les bases duales, et A la matrice de coefficients $a_{i,j} = b(e_i, f_j)$ pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$.

(a) Déterminer la matrice de r_b dans les bases $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}^*$, et celle de ℓ_b dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'^*$.

(b) En déduire que ℓ_b est bijective, si et seulement si r_b est bijective, si et seulement si A est inversible. On dit dans ce cas que b est **non dégénérée**.

3. Soit E un espace vectoriel. On rappelle que, étant donné des parties $\Phi \subseteq E^*$ et $S \subseteq E$, on définit le **sous-espace vectoriel orthogonal** à Φ et le **sous-espace vectoriel orthogonal** à S par

$$\Phi_\perp = \{v \in E : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } \phi \in \Phi\}$$

et

$$S^\perp = \{\phi \in E^* : \phi(v) = 0 \text{ pour tout } v \in S\},$$

respectivement.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ des formes linéaires sur un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E. On note f l'application de E dans $\mathbb{k}^\ell$ définie par $f(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_\ell(x))$ pour tout $x \in E$ et $F = \mathsf{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathsf{Ker}(\varphi_\ell)$.

(a) Montrer que la famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$ est libre si et seulement si f est surjective. **Indication :** montrer l'équivalence des négations et noter que f n'est pas surjective si et seulement si son image est contenue dans un hyperplan de $\mathbb{k}^\ell$.

(b) On suppose que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$ est libre. Soit $(c_1, \dots, c_\ell)$ la base canonique de $\mathbb{k}^\ell$. D'après la question précédente, on peut choisir des antécédents $e_1, \dots, e_\ell$ de $c_1, \dots, c_\ell$ par f. Montrer que $E = F \oplus \mathsf{Vect}_{\mathbb{k}}\langle\{e_1, \dots, e_\ell\}\rangle$. En déduire que, étant donné $\psi \in E^*$, $\psi \in \mathsf{Vect}_{\mathbb{k}}\langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}\rangle$ si et seulement si l'on a l'inclusion $\mathsf{Ker}(\psi) \supseteq \mathsf{Ker}(\varphi_1) \cap \dots \cap \mathsf{Ker}(\varphi_\ell)$.

(c) Soit $\Phi \subseteq E^*$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'inclusion $\Phi \subseteq (\Phi_\perp)^\perp$ est une égalité.

(d) Montrer que l'équivalence $\psi \in \langle\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}\rangle$ si et seulement si

$$\mathsf{Ker}(\psi) \supseteq \mathsf{Ker}(\varphi_1) \cap \ldots \cap \mathsf{Ker}(\varphi_\ell)$$

reste vraie même si $(\varphi_1, \dots, \varphi_\ell)$ n'est pas libre.

(e) Trouver un $\Bbbk$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel Φ de E^* pour lequel l'inclusion $\Phi \subseteq (\Phi_\perp)^\perp$ est stricte.
Indication : pour $n \in \mathbb{N}$, noter φ_n l'application qui associe à un polynôme $P \in \Bbbk[X]$ le coefficient de X^n dans P, et ψ l'application qui associe $P(1)$ à un polynôme $P \in \Bbbk[X]$.

4. Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) Montrer que $F = (F^\perp)_\perp$.
Indication : si $x \in E \setminus F$, utiliser un supplémentaire de $F + \Bbbk.x$ dans E pour construire une forme linéaire nulle sur F mais pas en x.

(b) Montrer que F est de codimension finie si et seulement si F est une intersection finie d'hyperplans de E. De combien d'hyperplans a-t-on besoin ?

(c) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(d) Montrer que $(F \cap G)^\perp \supseteq F^\perp + G^\perp$. Qu'en déduit-on si E est de dimension finie ?

(e) On suppose que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. En déduire une base de $F^\perp$.

5. Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel et $u \in \mathsf{L}(E)$.

(a) Soient F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^\mathsf{t}u$.
Indication : la démonstration par équivalences est possible, en utilisant les égalités $F = (F^\perp)_\perp$.

(b) On suppose que E est de dimension finie. Soit Φ un sous-espace vectoriel de E^*. Montrer que Φ est stable par ${}^\mathsf{t}u$ si et seulement si $\Phi_\perp$ est stable par u.

(c) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que l'hyperplan donné par $\mathsf{Ker}(\varphi)$ est stable par u si et seulement φ est un vecteur propre de l'endomorphisme ${}^\mathsf{t}u$.

6. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et C un convexe fermé de E. À toute forme linéaire non nulle ϕ sur E et à tout réel β, on associe le demi-espace fermé $D_{\phi,\beta} = \{x \in E : \phi(x) \leq \beta\}$ et l'hyperplan affine $H_{\phi,\beta} = \{x \in E : \phi(x) = \beta\}$.

(a) Montrer que $D_{\phi,\beta}$ est une partie convexe de E. Quelle est sa frontière ?

(b) Montrer que C est l'intersection de demi-espaces fermés qui le contiennent.
Indication : munir E d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si $x \in E \backslash C$ et $C \neq \emptyset$, introduire la forme linéaire $\langle x - p_C(x), \cdot\rangle$, où $p_C(x)$ est la projection de x sur C.

(c) Un point $c \in C$ est dit **extrémal** dans C si $C \setminus \{c\}$ est convexe. Montrer que c est extrémal si et et seulement si, étant donnés $a, b \in C$, $(a + b)/2 = c$ implique $a = b = c$.

(d) Soit $c \in C$. Montrer que s'il existe une forme linéaire non nulle ϕ sur E telle que $\phi(x) < \phi(c)$ pour tout $x \in C \setminus \{c\}$, alors c est extrémal dans C.

(e) Dans cette question, on suppose que C est une intersection finie des demi-espaces fermés D_{ϕ_i,β_i} pour $i \in [\![1, m]\!]$. Étant donné $c \in C$, on définit l'ensemble

$I_c = \{i \in [\![1,m]\!] : \phi_i(c) = \beta_i\}$. Montrer que $c \in C$ est extrémal dans C si et seulement si $(\phi_i)_{i \in I_c}$ engendre E^*.

(*f*) Déterminer les points extrémaux du polyèdre de $\mathbb{R}^2$ défini par les inéquations $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + 2x_2 \leq 3$ et $2x_1 + x_2 \leq 3$.

Dual de l'espace vectoriel de matrices⋆

⋆ **7.** Soient $\Bbbk$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A \in \mathsf{M}_n(\Bbbk)$, on note ϕ_A la forme linéaire sur $\mathsf{M}_n(\Bbbk)$ définie par $\phi_A(M) = \mathsf{Tr}(AM)$ pour $M \in \mathsf{M}_n(\Bbbk)$.

(*a*) Calculer $\phi_{{}^tA}(M)$ en fonction des coefficients de A et de M.

(*b*) Montrer que l'application $A \mapsto \phi_A$ est un isomorphisme de $\mathsf{M}_n(\Bbbk)$ vers $\mathsf{M}_n(\Bbbk)^*$ et que la forme bilinéaire b sur $\mathsf{M}_n(\Bbbk)$ définie par $b(M,N) = \mathsf{Tr}(MN)$ est non dégénérée.

(*c*) Quelles sont les formes linéaires sur $\mathsf{M}_n(\Bbbk)$ vérifiant $\phi(MN) = \phi(NM)$ pour tout M et N dans $\mathsf{M}_n(\Bbbk)$?

Double dual d'un espace vectoriel⋆

⋆ **8.** Soit E un $\Bbbk$-espace vectoriel. On note $\iota_E : E \to E^{**} = (E^*)^*$ l'application donnée par $\iota_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$ pour tous $x \in E$ et $\varphi \in E^*$. Montrer que pour tout $u \in \mathsf{L}(E)$, ${}^t({}^tu) \circ \iota_E = \iota_E \circ u$. En déduire que si E est de dimension finie, ${}^t({}^tu) = \iota_E \circ u \circ \iota_E^{-1}$.

Polynômes et endomorphismes

9. Soit $\Bbbk, \mathbb{K}$ deux corps avec $\Bbbk \subseteq \mathbb{K}$ et soit $A \in \mathsf{M}_n(\Bbbk)$. On rappelle que le **polynôme minimal** $\mu_{A,\mathbb{K}}$ de A dans $\mathbb{K}[X]$ est le générateur unitaire de l'idéal

$$I_{A,\mathbb{K}} = \left\{P \in \mathbb{K}[X] : P(A) = \mathbf{0}_{\mathsf{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$$

de $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbf{0}_{\mathsf{M}_n(\mathbb{K})}$ désigne la matrice nulle de $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mu_{A,\mathbb{R}} = \mu_{A,\mathbb{C}}$ pour $A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Trouver deux matrices carrées non semblables de même polynôme minimal et de même polynôme caractéristique.

11. Soient $\Bbbk$ un corps, E un $\Bbbk$-espace vectoriel, $f \in \mathsf{L}(E)$ un endomorphisme linéaire, et P, Q deux polynômes de $\Bbbk[X]$. On pose

$$D = \mathsf{PGCD}(P,Q) \text{ et } M = \mathsf{PPCM}(P,Q).$$

Montrer que

$$\mathsf{Ker}\big(D(f)\big) = \mathsf{Ker}\big(P(f)\big) \cap \mathsf{Ker}\big(Q(f)\big) \text{ et } \mathsf{Ker}\big(M(f)\big) = \mathsf{Ker}\big(P(f)\big) + \mathsf{Ker}\big(Q(f)\big).$$

Réduction d'endomorphismes

12. Soient $\Bbbk$ un corps, E un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathsf{L}(E)$ un endomorphisme linéaire. On rappelle que, étant donné $v \in E$, le sous-espace vectoriel

$$E_{u,v} = \{P(u)(v) : P \in \Bbbk[X]\} = \mathsf{Vect}_{\Bbbk}\left\langle\{u^k(v) : k \in \mathbb{N}\}\right\rangle$$

est appelé le **sous-espace cyclique associé** à v. On notera $I_{u,v}$ le noyau de l'application linéaire $\mathsf{ev}_{u,v} : \Bbbk[X] \to E$ définie par $\mathsf{ev}_{u,v}(P) = P(u)(v)$ pour tout $P \in \Bbbk[X]$.

(a) Montrer que $u(E_{u,v}) \subseteq E_{u,v}$ pour tout $v \in E$.

(b) Montrer que $I_{u,v}$ est un idéal de $\Bbbk[X]$ non réduit à $\{0\}$. Le **polynôme minimal** de u en v est le générateur unitaire $\mu_{u,v}$ de cet idéal.

(c) Soit d le degré de $\mu_{u,v}$. Montrer que $(v, u(v), \dots, u^{d-1}(v))$ est une base de $E_{u,v}$. Quelle est la dimension de $E_{u,v}$?

(d) Soit $u_v : E_{u,v} \to E_{u,v}$ l'endomorphisme linéaire donné par la restriction $u|_{E_{u,v}}$ de u. Déterminer le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u_v, et redémontrer ainsi le théorème de Cayley-Hamilton pour u.
Indication : montrer que, étant donné $P \in \Bbbk[X]$, $P(u_v) = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E_{u,v})}$ si et seulement si $P(u)(v) = \mathbf{0}_E$, et calculer la matrice de u_v dans la base donnée par $(v, u(v), \dots, u^{d-1}(v))$.

(e) Montrer que si $P \in \Bbbk[X]$, alors

$$P(u)(E_{u,v}) = E_{u,P(u)(v)} \text{ et } \mu_{u,v} = \mathsf{PGCD}(P, \mu_{u,v}).\mu_{u,P(u)(v)}.$$

(f) Déterminer $E_{u,v}$ et $\mu_{u,v}$ si

(i) $v = \mathbf{0}_E$;

(ii) v est un vecteur propre de u ;

(iii) il existe un entier $r > 1$ et des vecteurs propres $v_1, \dots, v_r$ de u associés à des valeurs propres distinctes tels que $v = v_1 + \cdots + v_r$.

(g) Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, $I_{u,\Bbbk}$ est l'intersection des I_{u,e_k} et $\mu_{u,\Bbbk}$ est le PPCM des μ_{u,e_k}.

(h) Soit $\mu_{u,\Bbbk} = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mu_{u,\Bbbk}$, *i.e.* les polynômes P_k sont irréductibles et unitaires, P_i et P_j sont premiers entre eux pour $i \neq j$, et $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Construire des vecteurs $v_1, \dots, v_r \in E$ tels que $\mu_{u,v_k} = P_k^{\alpha_k}$ pour tout k.

(ii) Montrer que les sous-espaces E_{u,v_k} sont en somme directe.
Indication : utiliser les noyaux $\mathsf{Ker}(P_k^{\alpha_k}(u))$.

(iii) Soit $v = v_1 + \cdots + v_r$. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mu_{u,v} = \mu_{u,\Bbbk}$. Retrouver ainsi que le $\deg(\mu_{u,\Bbbk}) \leq n$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

(i) On dit que u est **cyclique** s'il existe $v \in E$ tel que $E_{u,v} = E$. Montrer que u est cyclique si et seulement si $\mu_{u,\Bbbk} = \chi_u$.

(j) Montrer que si u est cyclique et si F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors l'endomorphisme induit $u_F = u|_F : F \to F$ est cyclique.
Indication : fixer un vecteur $v \in E$ tel que $E_{u,v} = E$ et montrer que l'ensemble $I = \{P \in \Bbbk[X] : P(u)(v) \in F\}$ est un idéal de $\Bbbk[X]$.

13. Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathsf{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice d, *i.e.* d est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E)}$.

(a) Montrer qu'il existe $a \in E$ et $\varphi \in E^*$ tels que $\varphi(u^{d-1}(a)) \neq 0$.

(b) Montrer que $\{a, u(a), \dots, u^{d-1}(a)\}$ et $\{\varphi, \varphi \circ u, \dots, \varphi \circ u^{d-1}\}$ sont libres.

(c) On note F et Φ le sous-espace vectoriel engendré par ces familles. Montrer que F et $\Phi_\perp$ sont stables par u et supplémentaires.

(d) En déduire par récurrence sur la dimension de E qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de Jordan nilpotents sur la diagonale, *i.e.* de la forme

$$J_{d'} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{d'}(\mathbb{k}),$$

avec $0 < d' \leq d$.

14. Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathsf{L}(E)$. On suppose qu'on dispose d'un polynôme P annulateur de u, unitaire et scindé qu'on décompose en facteurs irréductibles de la forme

$$P = (X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_r)^{m_r}.$$

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note $E_i = \mathsf{Ker}(u - \alpha_i\, \mathsf{id}_E)^{m_i}$.

(a) Montrer que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$.
Indication : utiliser le théorème de décomposition des noyaux.

(b) Soient $p_1, \dots, p_r : E \to E$ les projections associées à la décomposition d'espaces vectoriels $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$. Montrer que chaque E_i est stable par u, et en déduire que u commute avec chaque projection p_i.

(c) On note $u|_{E_i} : E_i \to E_i$ l'endomorphisme induit par u sur E_i. Montrer que $u|_{E_i} - \alpha_i\, \mathsf{id}_{E_i}$ est nilpotent. En utilisant l'exercice précédent, en déduire que dans une base convenable u admet une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de Jordan sur la diagonale (*i.e.* de la forme $J_{d'} + \alpha_i I_{d'}$, avec $0 < d' \leq m_i$).

(d) Soient $d = \alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_r p_r$ et $v = u - d$. Montrer que d est diagonalisable, v est nilpotent, d et v commutent.

15. Montrer que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ admettant un polynôme annulateur scindé est trigonalisable.

16. Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathsf{L}(E)$ et χ_u le polynôme caractéristique de u. On se propose de montrer que si u est trigonalisable alors χ_u est scindé et $\chi_u(u) = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E)}$. Pour cela, on prend une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure et on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $F_k = \langle \{e_1, \dots, e_k\} \rangle$.

(a) Que vaut χ_u ?

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(u - a_{k,k}\, \mathsf{id}_E)(F_k) \subseteq F_{k-1}$.

(c) Conclure.

Calcul de formes de Jordan

17. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f ait une forme réduite de Jordan.

18. Soit $\mathbb{C}[X]_{\leq 4}$ l'espace vectoriel de polynômes de degré inférieur ou égal à 4 à coefficients complexes et soit $f : \mathbb{C}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{C}[X]_{\leq 4}$ l'application linéaire définie par $f(P) = 2P(X+1) - P(X+2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]_{\leq 4}$. Trouver une base de $\mathbb{C}[X]_{\leq 4}$ dans laquelle la matrice de f ait une forme réduite de Jordan.

19. Soit $\Bbbk$ un corps de caractéristique zéro et soient a et b dans $\Bbbk$. Donner la décomposition de Dunford de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

20. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme minimal μ_{f,e_i} associé au vecteur e_i pour $i \in \{1,2,3\}$.

(b) En déduire le polynôme minimal $\mu_{f,\mathbb{R}}$ et le polynôme caractéristique χ_f.

(c) Soit $\psi : \mathbb{R}[X] \to L(\mathbb{R}^3)$ le morphisme d'anneaux défini par $\psi(P) = P(f)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

- (i) Quel est le noyau de ψ ?
- (ii) On note $B = \mathrm{Img}(\psi)$. C'est clairement un sous-anneau et aussi un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$. Quelle est sa dimension comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
- (iii) L'anneau B est-il intègre ?
- (iv) L'endomorphisme f est-il un élément inversible de l'anneau B ?

(d) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 2X + 2)$ est isomorphe au corps $\mathbb{C}$.

(e) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\gamma : B \to \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ tel que $\gamma(f) = (i-1, 5)$.

(f) Vérifier que γ est $\mathbb{R}$-linéaire et bijective.

21. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(a) Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calculer le polynôme minimal μ_{f,e_i} associé au vecteur e_i pour $i \in \{1,2,3\}$.

(ii) En déduire le polynôme minimal $\mu_{f,\mathbb{R}}$ et le polynôme caractéristique χ_f.

(b) Soit $h : E \to E$ un endomorphisme linéaire vérifiant $h^3 + h = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E)}$.

(i) Quelles sont les différentes possibilités pour le polynôme minimal $\mu_{h,\mathbb{R}}$ et pour le polynôme caractéristique χ_h d'un tel endomorphisme ?

(ii) Un tel endomorphisme h peut-il être injectif ?

(iii) Quelles sont les différentes possibilités pour la dimension du noyau de $h^2 + \mathsf{id}_E$?

(iv) Montrer que la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ est ou bien nulle ou bien semblable à la matrice A.

22. (a) Soit $S = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, et $r = p/q$. Montrer que si r est racine de S, alors q divise a_d et que p divise a_0 dans $\mathbb{Z}$.

(b) On fixe désormais $S = X^3 + X + 1$. Montrer que le polynôme S est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(c) On note L l'anneau quotient $\mathbb{Q}[X]/(S)$. Montrer que L est un corps.

(d) On considère le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E_1 = \mathbb{Q}^3$, et un endomorphisme linéaire $f : E_1 \to E_1$ tel que $f^3 + f + \mathsf{id}_{E_1} = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E_1)}$. Quel est le polynôme minimal de f ?

(e) Montrer que l'on peut définir une structure de L-espace vectoriel sur E_1 en définissant une loi externe par $\bar{P}.v = P(f)(v)$, pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $v \in E_1$.

(f) Montrer qu'il existe une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E_1 dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(g) Quelle est la dimension de E_1 en tant que L-espace vectoriel ?

(h) On considère le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E_2 = \mathbb{Q}^6$ et un endomorphisme $f : E_2 \to E_2$ tel que $h^3 + h + \mathsf{id}_{E_2} = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E_2)}$. Quel est le polynôme minimal de h ?

(i) Montrer que l'on peut définir une structure de L-espace vectoriel sur E_2 en définissant une loi externe par $\bar{P}.v = P(h)(v)$, pour tout $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $v \in E_2$.

(j) Quelle est la dimension de E_2 en tant que L-espace vectoriel ?

(k) Montrer que tout endomorphisme g du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E_2 vérifiant l'identité $g^3 + g + \mathsf{id}_{E_2} = \mathbf{0}_{\mathsf{L}(E_2)}$ est un conjugué de h.

23. Soit $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'endomorphisme linéaire dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer μ_{f,e_1}.

(b) En déduire $\mu_{f,\mathbb{C}}$ et χ_f.

(c) Calculer le polynôme dérivé χ_f'.

(d) Calculer le PGCD des polynômes χ_f et χ_f'.

(e) En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable.

Endomorphismes des espaces euclidiens*

⋆ **24.** Soit E un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $b = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit j l'application de E dans E^* définie par $j(x) = \langle x, \cdot \rangle$.

(a) Montrer que j est un isomorphisme de E sur E^*.

(b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. À quelle condition la base $j(\mathscr{B})$ est-elle duale de $\mathscr{B}$?

(c) Montrer que pour tout sous-espace F de E, l'orthogonal $F^\perp \subseteq E^*$ de F dans E^* coïncide avec l'image par j de l'orthogonal

$$F^{\perp,b} = \left\{ w \in E : \langle w, v \rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F \right\}$$

de F dans E.

(d) Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que l'**adjoint** de u relatif à b est donné par

$$u^*(x) = j^{-1}(j(x) \circ u),$$

pour tout $x \in E$, et que ${}^{\mathrm{t}}u = j \circ u^* \circ j^{-1}$. Dans une base orthonormée de E, quelle relation y a-t-il entre la matrice de u^* et celle de u ?

⋆ **25.** Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On note $\langle \, , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ le produit scalaire. Pour tous vecteurs x, y, z, on note $[x, y, z]$ le produit mixte de x, y, z, défini comme le déterminant de (x, y, z) dans n'importe quelle base orthonormée directe de E. Noter que cela ne dépend pas du choix de la base orthonormée directe. On rappelle que l'application de E^3 dans $\mathbb{R}$ donnée par $(x, y, z) \mapsto [x, y, z]$ est trilinéaire alternée, donc antisymétrique. Pour tous vecteurs u et v de E, il existe un unique vecteur noté $u \wedge v$ tel que la forme linéaire $[u, v, \cdot]$ soit égale au produit scalaire par $u \wedge v$, *i.e.* $[u, v, w] = \langle u \wedge v, w \rangle$ pour tous $u, v, w \in E$.

(a) Montrer que si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe, alors $e_1 \wedge e_2 = e_3$. **Indication :** montrer que les formes linéaires $\langle e_1 \wedge e_2, \cdot \rangle$ et $\langle e_3, \cdot \rangle$ sont égales.

(b) Montrer que l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ de E^2 dans E est bilinéaire.

(c) Soient u et v de E. Montrer que

(i) $v \wedge u = -u \wedge v$;

(ii) $u \wedge v$ est orthogonal à u et v ;

(iii) si u et v sont colinéaires, $u \wedge v = \mathbf{0}_E$;

(iv) si u et v ne sont pas colinéaires, $u \wedge v \neq \mathbf{0}_E$ et $[u, v, u \wedge v] > 0$ (*i.e.* $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E) ;

(v) si l'on suppose que u et v ne sont pas nuls, montrer que l'on peut trouver une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3) et un réel $\theta \in [0, \pi]$ tels que $||u||^{-1} u = e_1$ et $||v||^{-1} v = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2$.

Calculer $\langle u, v \rangle$ pour vérifier que θ est l'écart angulaire entre u et v et montrer que $||u \wedge v|| = ||u||.||v||. \sin(\theta)$.

⋆ **26.** Soit E un espace euclidien. Soit u un endomorphisme symétrique positif (*i.e.* $\langle x, u(x) \rangle > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\}$). On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u et $E_1, \ldots, E_r$ les sous-espaces propres associés.

(a) Montrer que les valeurs propres de u sont positives.

(b) Montrer que $E_1, \ldots, E_r$ sont orthogonaux deux-à-deux et de somme E.

(*c*) On note $p_1, \dots, p_r : E \to E$ les projecteurs associés à la décomposition d'espaces vectoriels $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$. Montrer qu'ils sont symétriques et non négatifs (*i.e.* $\langle x, p_i(x) \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$).

(*d*) En déduire un endomorphisme symétrique positif dont le carré est u.

(*e*) Soit v un endomorphisme symétrique positif dont le carré est u. Montrer que v est l'endomorphisme de la question précédente.
Indication : montrer que les E_i sont stables par v, et montrer que les endomorphismes induits sont des homothéties.