MAT35B - ALGÈBRE L3A

Premier Semestre — 2022-2023

Deuxième Devoir Surveillé

Toute réponse non justifiée ne sera pas validée.

Le barème est donné à titre indicatif et non contractuel.

1
2
3
4
5

2, 5pt **1.** Soit G un groupe.

(a) Soient H et K deux sous-groupes de G avec $K \subseteq H$. Écrire une identité qui lie $[G:H]$, $[G:K]$ et $[H:K]$.

(b) Soit X un ensemble. On suppose que le groupe G agit sur X. Soient $x \in X$ et $g \in G$. Montrer que les sous-groupes $\mathsf{Stab}(g \cdot x)$ et $g\,\mathsf{Stab}(x)g^{-1}$ de G coïncident.

(c) Soit H un sous-groupe d'indice fini d dans G et $g \in G$. Montrer que le sous-groupe gHg^{-1} est d'indice fini d dans G.

Solution.

(a) On a vu que

$$[G:K] = [G:H].[H:K].$$

(b) On note d'abord que $h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x$ si et seulement si $g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = x$, pour tout $h \in G$. Cela nous dit que $h \in \mathsf{Stab}(g \cdot x)$ si et seulement si $(g^{-1}hg) \cdot x = x$, vu que $g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = (g^{-1}hg) \cdot x$. En conséquence, $h \in \mathsf{Stab}(g \cdot x)$ si et seulement si $g^{-1}hg \in \mathsf{Stab}(x)$, *i.e.* $h \in g\,\mathsf{Stab}(x)g^{-1}$. On conclut que $\mathsf{Stab}(g \cdot x) = g\,\mathsf{Stab}(x)g^{-1}$.

(c) Si K est un sous-groupe de G, on notera $p_K : G \to G/K$ la projection canonique donnée par $\pi_K(x) = xK$ pour tout $x \in G$. On considère l'application $\mathsf{Ad}_g : G \to G$ donnée par $\mathsf{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$ pour tout $x \in G$. Soit $f : G \to G/(gHg^{-1})$ la composition de Ad_g et la projection canonique $\pi_{gHg^{-1}} : G \to G/(gHg^{-1})$. C'est clair que l'application f est surjective, car Ad_g et $\pi_{gHg^{-1}}$ le sont. En outre, on note que $f(x) = f(y)$ si et seulement si $\pi_H(x) = \pi_H(y)$, pour tous $x, y \in G$, car $f(x) = f(y)$ si et seulement si $gxg^{-1}gHg^{-1} = gyg^{-1}gHg^{-1}$, *i.e.* $gxHg^{-1} = gyHg^{-1}$, ce qui équivaut à $xH = yH$, *i.e.* $\pi_H(x) = \pi_H(y)$. En conséquence, il existe une unique application injective $\bar{f} : G/H \to G/(gHg^{-1})$ telle que $f \circ \pi_H = \bar{f}$. Comme $\bar{f}$ est une bijection, on conclut que l'indice $[G:H]$ de H dans G coïncide avec l'indice $[G:gHg^{-1}]$ de gHg^{-1} dans G.

On pourra utiliser les résultats précédents dans la suite du sujet.

2,5pt

2. Soit G un groupe fini. On suppose qu'il existe un entier positif $N \in \mathbb{N}$ tel que $(xy)^N = x^N y^N$ pour tous $x, y \in G$. On définit

$$G[N] = \{x \in G : x^N = 1_G\} \text{ et } G^N = \{x^N : x \in G\}.$$

Montrer que $G[N]$ et G^N sont des sous-groupes distingués de G et que $|G^N| = [G : G[N]]$.

Solution. Soit $f : G \to G$ l'application donnée par $f(x) = x^N$ pour tout $x \in G$. Alors, f est un morphisme de groupes, vu que $f(xy) = (xy)^N = x^N y^N = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in G$. En plus, on note que $G[N] = \{x \in G : x^N = 1_G\} = \{x \in G : f(x) = 1_G\} = \mathsf{Ker}(f)$ et $G^N = \{x^N : x \in G\} == \{f(x) : x \in G\} = \mathsf{Img}(f)$. Cela nous dit directement que $G[N] = \mathsf{Ker}(f$ est un sous-groupe distingué de G. En plus, le premier théorème d'isomorphisme nous dit que $G/G[N] = G/\mathsf{Ker}(f)$ est isomorphe au groupe $\mathsf{Img}(f) = G^N$, ce qui implique que $|G^N| = |\mathsf{Img}(f)| = [G : \mathsf{Ker}(f)] = [G : G[N]]$. Il reste à démontrer que G^N est un sous-groupe distingué de G. Pour cela on remarque que $gx^N g^{-1} = (gxg^{-1})^N$ nous dit directement que $gx^N g^{-1} \in G^N$, *i.e.* $gG^N g^{-1} \subseteq G^N$.

2,5pt

3. Soit G un groupe. Étant donné $x, y \in G$ on définit

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \in G$$

et $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par l'ensemble

$$\big\{[x, y] : x, y \in G\big\} \subseteq G.$$

(a) Montrer que G est abélien si et seulement si $[G, G] = \{1_G\}$.

(b) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que les conditions suivantes sont equivalentes :

(C1) H est distingué dans G et G/H est abélien ;

(C2) $[G, G] \subseteq H$.

Solution.

(a) On voit bien que si G est abélien, alors $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = xx^{-1}yy^{-1} = 1_G$ pour tous $x, y \in G$, ce qui nous dit que $S = \{[x, y] : x, y \in G\} = \{1_G\}$, et donc le sous-groupe $[G, G]$ engendré par S est $\{1_G\}$. Réciproquement, on suppose que $[G, G] = \{1_G\}$. Comme $\{[x, y] : x, y \in G\} \subseteq [G, G]$, on conclut que $\{[x, y] : x, y \in G\} \subseteq \{1_G\}$, ce qui implique que $\{[x, y] : x, y \in G\} \subseteq \{1_G\}$, vu que $\{[x, y] : x, y \in G\}$ est non vide. En conséquence, $xyx^{-1}y^{-1} = [x, y] = 1_G$ pour tous $x, y \in G$, ce qui nous dit que $xy = yx$ pour tous $x, y \in G$, *i.e.* G est abélien.

(b) On va montrer d'abord que (C2) implique (C1). On note que

$$gxg^{-1} = gxg^{-1}x^{-1}x = [g, x]x \in H$$

pour tous $g \in G$ et $x \in H$, vu que $[g, x] \in [G, G] \subseteq H$. Cela nous dit que $gHg^{-1} \subseteq H$ pour tout $g \in G$, *i.e.* H est un sous-groupe distingué de G. En outre, comme $(xy)(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = [x,y] \in [G,G] \subseteq H$ pour tous $x,y \in G$, $(xy)(yx)^{-1} \in H$, ce qui nous dit que $xyH = yxH$, *i.e.* $(xH)(yH) = (yH)(xH)$ pour tous $x,y \in G$. En conséquence, G/H est un groupe abélien.

On va montrer maintenant que (C1) implique (C2). Comme H est distingué dans G et G/H est abélien, alors $(xH)(yH) = (yH)(xH)$ pour tous $x,y \in G$, *i.e.* $xyH = yxH$, ce qui équivaut à $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1} = (xy)(yx)^{-1} \in H$ pour tous $x,y \in G$. On conclut que $[x,y] \in H$ pour tous $x,y \in G$, ce qui implique que $\{[x,y] : x,y \in G\} \subseteq H$ et en particulier $[G,G] \subseteq H$, car $[G,G]$ est le sous-groupe engendré par $\{[x,y] : x,y \in G\}$.

7pt

4. (a) Soit G un groupe et H un sous-groupe d'indice n de G. L'action de G sur G/H donnée par $g \bullet xH = (gx)H$ pour tous $g,x \in G$ fournit un morphisme de groupe $\phi : G \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(G/H)$. Exprimer le noyau de ϕ à l'aide des sous groupes conjugués de H, c'est-à-dire les sous-groupes gHg^{-1} pour $g \in G$.

(b) Montrer que si $n \geq 5$ alors $\mathbb{S}_n$ ne contient pas de sous-groupe d'indice d avec $2 < d < n$.

(c) Le groupe $\mathbb{S}_n$ contient-il un sous-groupe d'indice n ?

(d) Vérifier que $\mathbb{S}_4$ agit par conjugaison sur l'ensemble

$$D = \big\{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\big\}.$$

Le groupe $\mathbb{S}_4$ possède-t-il un sous-groupe d'indice 3 ?

(e) On considère plus généralement un groupe G (pas nécessairement fini) qui possède un sous-groupe H d'indice 3 tel que H ne soit pas un sous-groupe distingué de G.

(i) Le groupe G agit par conjugaison sur l'ensemble de ses sous-groupes. Soit N le stabilisateur de H pour cette action. Montrer que $H = N$.

(ii) En déduire qu'il y a exactement 3 sous-groupes conjugués de H dans le groupe G.

(iii) On considère de nouveau le morphisme $\phi : G \to \mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(G/H)$ donné par l'action de G sur G/H par translation à gauche.

(1) Montrer que $\mathsf{Ker}(\phi)$ est un sous-groupe distingué de G d'indice 6.

(2) Montrer que pour tous a et b dans G, l'intersection des sous-groupes aHa^{-1} et bHb^{-1} est soit aHa^{-1}, soit $\mathsf{Ker}(\phi)$.

Solution.

(a) On affirme que

$$\mathsf{Ker}(\phi) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

En effet, $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$ si et seulement si $\phi(x) = \mathrm{id}_{G/H}$, ce qui équivaut à $xgH = gH$ pour tout $g \in G$. La dernière condition est équivalente à $g^{-1}xgH = H$ pour tout $g \in G$, *i.e.* $g^{-1}xg \in H$ pour tout $g \in G$, ce qui équivaut à $x \in gHg^{-1}$ pour tout $g \in G$, *i.e.* $x \in \cap_{g\in G} gHg^{-1}$.

(b) Soit H un sous-groupe de $\mathbb{S}_n$ d'indice d avec $2 < d < n$ et soit $K = \mathrm{Ker}(\phi) = \cap_{g\in\mathbb{S}_n} gHg^{-1}$. Alors, $K \subseteq H$ et K est un sous-groupe distingué de $\mathbb{S}_n$. Comme $n \geq 5$, $K = \{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\}$, $K = \mathbb{A}_n$ ou $K = \mathbb{S}_n$. Les inclusions $K \subseteq H \subsetneq \mathbb{S}_n$ nous disent alors que $K = \{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\}$ ou $K = \mathbb{A}_n$. En outre, l'inclusion $K \subseteq H$ nous dit que $[\mathbb{S}_n : K] \geq [\mathbb{S}_n : H] = d > 2$, ce qui implique que $K \neq \mathbb{A}_n$, vu que $[\mathbb{S}_n : \mathbb{A}_n] = 2$. En conséquence, $K = \{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\}$, ce qui nous dit que le morphisme de groupes $\phi : \mathbb{S}_n \to \mathrm{Aut}_{\mathsf{Ens}}(\mathbb{S}_n/H)$ est injectif. Or, le cardinal de $\mathbb{S}_n/H$ est d, ce qui implique que $d! = |\mathrm{Aut}_{\mathsf{Ens}}(\mathbb{S}_n/H)|$. L'injectivité de ϕ implique alors que $n!| = \mathbb{S}_n| \leq |\mathrm{Aut}_{\mathsf{Ens}}(\mathbb{S}_n/H)| = d!$, ce qui est absurde, car $d < n$. En conséquence, il n'existe pas de sous-groupe H de $\mathbb{S}_n$ d'indice d.

(c) Oui, soit $H = \{\sigma \in \mathbb{S}_n : \sigma(n) = n\}$. On voit bien que H est un sous-groupe de $\mathbb{S}_n$. En effet, $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]} \in H$, car $\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}(n) = n$, et si $\sigma, \tau \in H$, *i.e.* $\sigma(n) = \tau(n) = n$, alors $\sigma \circ \tau^{-1}(n) = \sigma(n) = n$, ce qui nous dit que $\sigma \circ \tau^{-1} \in H$. On note aussi que $|H| = (n-1)!$, ce qui implique que $[\mathbb{S}_n : H] = |\mathbb{S}_n|/|H| = n$.

(d) On rappelle d'abord que, si $\{a_1, \dots, a_p\} \subseteq [\![1,n]\!]$ a cardinalité p et $\sigma \in \mathbb{S}_n$, alors $\sigma(a_1 \dots a_p)\sigma^{-1} = (a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(p)})$. Cela nous dit que, étant donné $\{i,j,k,\ell\} = [\![1,4]\!]$ et $\sigma \in \mathbb{S}_4$, on a

$$\sigma(i\,j)(k\,\ell)\sigma^{-1} = \sigma(i\,j)\sigma^{-1}\sigma(k\,\ell)\sigma^{-1} = \big(\sigma(i)\,\sigma(j)\big)\big(\sigma(k)\,\sigma(\ell)\big).$$

Comme $\sigma \in \mathbb{S}_4$, on voit bien que $\{\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k), \sigma(\ell)\} = [\![1,4]\!]$, ce qui implique que $\sigma(i\,j)(k\,\ell)\sigma^{-1} = (\sigma(i)\,\sigma(j))(\sigma(k)\,\sigma(\ell)) \in D$ pour tout $(i\,j)(k\,\ell) \in D$.

Soit $H = \mathrm{Stab}_{\mathbb{S}_4}((1\,2)(3\,4))$. Comme l'orbite de $(1\,2)(3\,4)$ est D et $\#(D) = 3$, l'identité $\#(D) = |\mathbb{S}_4|/|H|$ nous dit que $|H| = 8$, *i.e.* $[\mathbb{S}_4 : H] = 3$. Sinon, de façon explicite on pose $H = \langle D \cup \{(1\,2)\}\rangle$. On rappelle que $K = D \cup \{\mathrm{id}_{[\![1,4]\!]}\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathbb{S}_4$, ce qui implique que, étant donné $\sigma \in K$, $\sigma \circ (1\,2) \in (1\,2)K$, et en particulier le morphisme de groupes $\varsigma : \mathbb{Z}/2.\mathbb{Z} \simeq \langle(1\,2)\rangle \to H/K$ donné par la composition de l'injection canonique $\langle(1\,2)\rangle \to H$ et la projection canonique $H \to H/K$ est surjectif. En plus, comme $(1\,2) \notin K$, $K \subsetneq H$, ce qui implique que H/K n'est pas trivial. On conclut que $|H/K| = 2$, ce qui nous dit que que $|H| = |K|.|H/K| = 8$, *i.e.* $[\mathbb{S}_4 : H] = 3$.

(e)
(i) On remarque d'abord que, par définition, $N = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$. En conséquence, l'inclusion $H \subseteq N$ est triviale. En outre, comme H n'est pas un sous-groupe distingué de G, on a que $N \neq G$. D'après le premier item de l'exercice 1, $3 = [G : H] = [G : N].[N : H]$, ce qui implique que $[G : N]$ est un diviseur de 3, mais différent de 1, vu que $N \neq G$. En conséquence, $[G : N] = 3$, vu que 3 est premier, ce qui implique que $[N : H] = 1$. Cela nous dit que $H = N$, vu que $H \subseteq N$.

(ii) Comme la cardinalité d'une orbite $\mathcal{O}$ coïncide avec l'indice du stabilisateur d'un point quelconque de $\mathcal{O}$, on voit bien que l'orbite de H pour l'action par conjugaison du groupe G sur l'ensemble de ses sous-groupes a cardinalité $[G : N] = 3$, *i.e.* il y a exactement 3 sous-groupes conjugués de H dans le groupe G.

(iii) (1) On remarque d'abord que $K = \mathsf{Ker}(\phi) = \cap_{g\in G} gHg^{-1}$ est un sous-groupe distingué de G, vu qu'il s'agit du noyau d'un morphisme de groupes. Comme $|G/H|$ est 3, $|\mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(G/H)| = 3! = 6$. Le premier théorème d'isomorphisme nous dit que l'ordre de G/K divise l'ordre de $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Ens}}(G/H)$, *i.e.* $[G : K]$ est un diviseur de 6. En outre, l'inclusion $K \subsetneq H$ nous dit que $[G : K] > [G : H] = 3$. En conséquence, $[G : K] = 6$.

(2) Soit $L = aHa^{-1} \cap bHb^{-1} \subseteq aHa^{-1}$. C'est clair que $L = aHa^{-1}$ si par exemple $a = b$. En outre, comme $K = \mathsf{Ker}(\phi) = \cap_{g\in G} gHg^{-1}$, on a aussi $K \subseteq L$. Il suffit de démontrer que $L \subsetneq aHa^{-1}$ implique $L = K$. On remarque que $[G : aHa^{-1}] = [G : H] = 3$, d'après le dernier item de l'exercice 1. Les inclusions $K \subseteq L \subsetneq aHa^{-1}$ et le premier item de l'exercice 1 nous disent alors

$$6 = [G : K] = [G : aHa^{-1}].[aHa^{-1} : L].[L : K] = 3.[aHa^{-1} : L].[L : K].$$

Comme $L \subsetneq aHa^{-1}$, $[aHa^{-1} : L] \geq 2$, ce qui implique $6 \geq 6[L : K]$, ce qui nous dit que $[L : K] = 1$ et en conséquence $K = L$, vu que $K \subseteq L$.

5,5pt

5. Soit G un groupe.

(a) Soient H et K deux sous-groupes de G. On pose $L = H \cap K$. Montrer que l'application d'ensembles

$$\iota : G/L \to G/H \times G/K$$

donnée par $\iota(xL) = (xH, xK)$ pour $x \in G$ est bien définie.

(b) Montrer que l'application ι est aussi injective.

(c) Montrer que, si $[G : H]$ et $[G : K]$ sont finis et premiers entre eux, alors ι est une bijection.

(d) Montrer que toute intersection finie de sous-groupes, dont chacun est d'indice fini, est d'indice fini.

(e) Soit M un sous groupe de G et soit $S \subseteq G$ un ensemble de représentants de G/M. Montrer que

$$\bigcap_{g\in G} gMg^{-1} = \bigcap_{g\in S} gMg^{-1}. \tag{1}$$

En déduire que si M est d'indice fini dans G, alors le sous-groupe (1) de G est d'indice fini.

Solution.

(a) On voit bien que, étant donné $x, y \in G$ tels que $xL = yL$, *i.e.* $y^{-1}x \in L$, alors les inclusions $L \subseteq H$ et $L \subseteq K$ nous disent que $y^{-1}x \in H$ et $y^{-1}x \in K$, ce qui implique $xH = yH$ et $xK = yK$. En conséquence, $(xH, xK) = (yH, yK)$, *i.e.* $\iota(xL) = \iota(yL)$. Cela nous dit que l'application ι est bien est définie.

(*b*) Soient $x, y \in G$ tels que $\iota(xL) = \iota(yL)$, *i.e.* $(xH, xK) = (yH, yK)$. Cela nous dit que $xH = yH$ et $xK = yK$, *i.e.* $y^{-1}x \in H$ et $y^{-1}x \in K$. En conséquence, $y^{-1}x \in H \cap K = L$, ce qui nous dit que $xL = yL$, *i.e.* ι est une application injective.

(*c*) L'item précédent nous dit que $[G : L] \leq [G : H].[G : K]$. D'après le premier item de l'exercice 1, on voit bien que $[G : L] = [G : H].[H : L]$ et $[G : L] = [G : K].[K : L]$, ce qui implique que $[G : H]$ et $[G : K]$ divisent $[G : L]$. Comme $[G : H]$ et $[G : K]$ sont premiers entre eux, $[G : H].[G : K]$ divise $[G : L]$ et, en particulier, $[G : H].[G : K] \leq [G : L]$. On conclut que $[G : H].[G : K] = [G : L]$. Comme ι est une application injective entre deux ensembles finis de la même cardinalité, ι est une application bijective.

(*d*) On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, étant donné une famille $\{H_i : i \in [\![1, n]\!]\}$ de sous-groupes de G telle que $[G : H_i]$ est fini pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le sous-groupe $\cap_{i=1}^{n} H_i$ est d'indice fini dans G. Si $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. On suppose que la proppiété est vérifiée pour n. On va la démontrer pour $n + 1$. Dans ce cas, par l'hypothèse de la récurrence, $H = \cap_{i=1}^{n} H_i$ est d'indice fini dans G. D'après l'item précédent, $\cap_{i=1}^{n+1} H_i = H \cap H_{n+1}$ est d'indice fini dans G, ce qui montre le résultat.

(*e*) On remarque d'abord que $G = \sqcup_{s \in S} sM$. Cela nous dit que, étant donné $g \in G$, il existe des éléments uniques $s \in S$ et $m \in M$ tels que $g = sm$. En outre, on note que

$$gMg^{-1} = smM(sm)^{-1} = smMm^{-1}s^{-1} = sMs^{-1}$$

pour tout $g = sm \in sM$ avec $m \in M$, vu que $mMm^{-1} = M$. Cela nous dit que

$$\bigcap_{g \in G} gMg^{-1} = \bigcap_{s \in S} \Big(\bigcap_{g \in sM} gMg^{-1} \Big) = \bigcap_{s \in S} sMs^{-1},$$

comme on voulait démontrer. Comme M est d'indice fini dans G, le dernier item de l'exercice 1 nous dit que gMg^{-1} est d'indice fini dans G. En outre, comme $|S|$ est fini, l'item précédent nous dit que le sous-groupe (1) de G est d'indice fini.