Examen MAT302

Mercredi 8 janvier 2020 de 13 h 30 à 15 h 30

Feuille A4 manuscrite recto-verso autorisée
Tout appareil électronique interdit

Exercice 1 : Donner la nature des séries suivantes :

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{n}{7+n+n^2}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\ln n}{7+n+n^2}\right) \qquad \left(\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right)$$

Exercice 2 : Séries des termes pairs et impairs

Soit $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ une séries de nombres réels. Dans cet exercice, on est intéressé par la série des termes d'indice pair $(\sum_{n \text{ pair}} u_n)$ c'est-à-dire $(\sum_{p\geq 1} u_{2p})$, et par celle des termes d'indice impair $(\sum_{n \text{ impair}} u_n)$ c'est-à-dire $(\sum_{q\geq 1} u_{2q-1})$.

1. Montrer que si les séries $(\sum\limits_{n \text{ pair}} u_n)$ et $(\sum\limits_{n \text{ impair}} u_n)$ convergent, alors $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ converge aussi et
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{p=1}^{\infty} u_{2p} + \sum_{q=1}^{\infty} u_{2q-1} .$$
2. Montrer que $(\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n})$ converge et que $(\sum\limits_{q\geq 1} \frac{1}{2q-1})$ diverge. En déduire que l'implication réciproque de celle de la question précédente est fausse en général.
3. Dans le cas des séries positives, montrer que si $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ converge et si $u_n \geq 0$ pour tout n, alors les séries $(\sum_{n \text{ pair}} u_n)$ et $(\sum_{n \text{ impair}} u_n)$ convergent.
4. Pour le cas particulier $u_n = 1/n^\alpha$ avec $\alpha > 1$, montrer que
$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(2q-1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$\boxed{T.S.V.P.}$

Exercice 3 : Calculer la valeur de

$$I = \int_1^2 \frac{x+2}{x(x^2+9)}\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 4 : Linéariser le polynôme trigonométrique $\cos^3(x)$ et montrer que

$$\int_0^\pi x\cos^3(x)\,\mathrm{d}x \ = \ -\frac{14}{9}.$$

Exercice 5 : Une famille d'intégrales généralisées

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(\ln x)^2}$ converge.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+(\ln x)^2)}$ diverge.
3. Effectuer le changement de variable $u = \ln x$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_\xi^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+(\ln x)^2)}$, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+(\ln x)^2)}$ converge et calculer sa valeur.

Barème indicatif : 5/7/2/2/4