III Changements de base

définition : Soit V un espace vectoriel de dim finie n et B_1 et B_2 deux bases de V
On appelle matrice de passage de la base B_2 à la base B_1 la matrice carrée $n \times n$ dont les colonnes sont les vecteurs de la base B_2 écrits dans la base B_1

proposition : la matrice de passage P de la base B_2 à la base B_1 est la matrice de l'application id de V muni de la base B_2 à V muni de la base B_1

Soit $v \in V$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de v dans la base B_1

$\begin{pmatrix} x'_1 \\ | \\ x'_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de v dans la base B_2

P la matrice de passage de la base B_2 à la base B_1

alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ | \\ x'_n \end{pmatrix}$

preuve pour remplir la matrice P on met en colonne les vecteurs de la base B_2 écrits dans la base B_1 mais ce sont aussi les images des vecteurs de la base B_2 par l'application id_V écrites dans la base B_1
donc P est la matrice de $id_V : (V, B_2) \longrightarrow (V, B_1)$

v a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x'_1 \\ | \\ x'_n \end{pmatrix}$ ds la base B_2

son image par id_V est lui-même et on prend ses coordonnées dans la base B_1

d'où $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ | \\ x'_n \end{pmatrix}$

proposition (changement de base et applications linéaires)

Soit V un espace vectoriel de dim n, B_1 et B_2 deux bases de V

Soit W un espace vectoriel de dim p, B'_1 et B'_2 deux bases de W

Soit $f : V \longrightarrow W$ une application linéaire

$A_1 = M^{B_1}_{B'_1}(f)$, $A_2 = M^{B_2}_{B'_2}(f)$

Soit P la matrice de passage de la base B_2 à la base B_1

Q la matrice de passage de la base B'_2 à la base B'_1

alors $A_2 = Q^{-1} A_1 P$

preuve:

$$\begin{tikzcd}
(V,B_2) \arrow[r, "id", "P"'] \arrow[rrr, bend right, "A_2"', "f"'] & (V,B_1) \arrow[r, "f", "A_1"'] & (W,B'_1) \arrow[r, "id", "Q^{-1}"'] & (W,B'_2)
\end{tikzcd}$$

la matrice de $id : (W,B'_2) \longrightarrow (W,B'_1)$

est Q donc la matrice de $id : (W,B'_1) \longrightarrow (W,B'_2)$ est Q^{-1}

d'où $A_2 = Q^{-1} A_1 P$.

exemple soit $B=(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

on a vu que pour $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$B'=(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

soit P la matrice de passage de B' à B

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

soit $F=\text{Vect}<\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}>$ et $G=\text{Vect}<\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}>$

la symétrie Δ par rapport à F et parallèl^t à G
a pour matrice dans la base B'

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Soit A la matrice de Δ dans la base B

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3, B') \arrow[r, "id", "P"'] \arrow[rrr, bend right, "\Delta"', "A'"] & (\mathbb{R}^3, B) \arrow[r, "\Delta", "A"'] & (\mathbb{R}^3, B) \arrow[r, "id", "P^{-1}"'] & (\mathbb{R}^3, B')
\end{tikzcd}$$

$A'=P^{-1}AP$ $\qquad\qquad$ $A=PA'P^{-1}$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y'+z'=x\\ x'+z'=y\\ x'+y'=z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x'+y'=z\\ -y'+z'=y-z\\ y'+z'=x\end{cases} \iff \begin{cases} x'+y'=z\\ y'-z'=z-y\\ 2z'=x+y-z\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z' = \frac{1}{2}(x+y-z) \\ y' = z - y + z' = \frac{1}{2}(x-y+z) \\ x' = z - y' = \frac{1}{2}(-x+y+z) \end{cases}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A'P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PA'P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV Diagonalisation.

V désigne un espace vectoriel de dim n et $f : V \longrightarrow V$ une application linéaire.

<u>définition</u>: On appelle vecteur propre pour f un vecteur non nul v de V dont l'image par f est colinéaire à v
donc $v \in V$ est un vecteur propre pour f si $v \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \lambda v$

<u>définition</u> On appelle valeur propre de f un réel λ tel qu'il existe dans V un vecteur propre associé à λ, c'est à dire un vecteur v non nul tel que $f(v) = \lambda v$

par exemple 1 est une valeur propre pour n'importe quelle rotation de $\mathbb{R}^3$ car tout vecteur qui dirige l'axe de la rotation est un vecteur propre associé à la valeur propre 1,
en effet si v dirige l'axe de la rotation r alors $r(v) = v$

<u>définition</u>: on dit que l'application linéaire f est diagonalisable lorsque V possède une base de vecteurs propres pour f.

par exemple la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz et d'angle $\frac{\pi}{3}$ n'est pas diagonalisable la symétrie orthogonale s par rapport au plan d'équation $z=0$ est diagonalisable

car $s(e_1)=e_1$ $s(e_2)=e_2$ $s(e_3)=-e_3$

(e_1, e_2, e_3) est une base de vecteurs propres pour s

proposition : Si l'application linéaire f est diagonalisable alors dans une base de vecteurs propres pour f la matrice de f est diagonale

preuve : soient $(v_1, \dots, v_n)$ une base de V formée de vecteurs propres pour f

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $f(v_i) = \lambda_i v_i$

alors la matrice de f dans la base $(v_1, \dots, v_n)$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

proposition : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

les assertions suivantes sont équivalentes :

- λ est une valeur propre pour f
- $\exists v \in V \setminus \{0\}$ $f(v) = \lambda v$
- $\exists v \in V \setminus \{0\}$ $(f - \lambda id)(v) = 0$
- $\mathrm{Ker}(f - \lambda id) \neq \{0\}$
- $f - \lambda id$ n'est pas inversible
- $\det(A - \lambda id) = 0$ où A est la matrice de f dans n'importe quelle base de V

remarque (2) det $(A - \lambda id)$ est un polynôme de degré n en λ
Les valeurs propres de f sont donc les réels λ qui annulent cette fonction polynômiale.
f possède donc au plus n valeurs propres

(1) Pour chercher les valeurs propres de f on peut donc calculer det $(A - \lambda id)$ et chercher les zéros de cette fonction polynômiale en λ.

(3) pour trouver les vecteurs propres associés à une valeur propre λ on cherche les vecteurs v non nuls tels que $f(v) = \lambda v$, ou encore $(f - \lambda id)(v) = 0$

or l'ensemble des vecteurs v de V tels que $(f - \lambda id)(v) = 0$ est le noyau de l'application linéaire $f - \lambda id$
c'est donc un sous-espace vectoriel de V