II applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

rappels :

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ est l'ensemble des n-uplets de réels

on peut ajouter deux n-uplets de $\mathbb{R}^n$:

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

on peut multiplier un n-uplet de $\mathbb{R}^n$ par un scalaire

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \lambda . (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

définition : une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite linéaire lorsque $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad f(v+w) = f(v) + f(w)$ et $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

exemples d'applications linéaires ?

exemples d'applications non linéaires ?

proposition : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire pour tout entier $k \geq 1$ on a

$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k)$$

preuve par récurrence sur k

pour $k=1$ c'est donné par la définition de f linéaire

supposons le résultat vrai pour $k \geq 1$

alors $f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k+1} v_{k+1}) = f((\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) + \lambda_{k+1} v_{k+1})$

$= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) + f(\lambda_{k+1} v_{k+1})$

$= \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k) + \lambda_{k+1} f(v_{k+1})$

on vient de montrer que

$$\left(\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n \quad f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_k f(v_k) \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, \ldots, v_{k+1} \in \mathbb{R}^n \quad f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{k+1} v_{k+1}) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) \right)$$

c'est à dire l'hérédité.

Dans la suite, on notera les éléments de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ en colonne : $(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $(y_1, \ldots, y_p) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$

<u>définition</u>: La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ ordonnés où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{ème ligne} \quad \cdots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

remarque: tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire, alors

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$$

posons dans $\mathbb{R}^p$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix} \quad \cdots \quad f(e_n) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$$

et dans $M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & & a_{pj} & & a_{pn} \end{pmatrix}$$

on a alors

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_1\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots \\ a_{p1}\end{pmatrix} + \dots + x_j\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots \\ a_{pj}\end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n}\\ \vdots \\ a_{pn}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1a_{11}+\dots+x_ja_{1j}+\dots+x_na_{1n}\\ \vdots \\ x_1x_{p1}+\dots+x_ja_{pj}+\dots+x_na_{pn}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

on a donc obtenu le résultat suivant

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Soit A la matrice $p\times n$ dont les n colonnes sont les vecteurs $f(e_1),\dots,f(e_n)$ écrits en colonne.
On a $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
$$f(x_1,\dots,x_n) = A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

remarque : une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ainsi donnée par une matrice est linéaire car
$\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ $\forall \lambda\in\mathbb{R}$

$$A\left(\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\right) = A\left(\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right)+A\left(\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\right)$$

$$\text{et}\quad A\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\right) = \lambda A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

Théorème : Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ deux applications linéaires. Soient A la matrice de f et B celle de g. Alors l'application $g\circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est linéaire et sa matrice est BA.

preuve on a

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad f((x_1, \dots, x_n)) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\forall (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p \quad g((y_1, \dots, y_p)) = B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

donc $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$g \circ f((x_1, \dots, x_n)) = g(f(x_1, \dots, x_n))$$
$$= B\left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = BA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Théorème : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une application linéaire inversible alors $n = p$ et son inverse f^{-1} est également linéaire.

on verra plus tard pourquoi $n = p$

montrons que f^{-1} est linéaire :

soient $v, w \in \mathbb{R}^p$, posons $v_0 = f^{-1}(v)$ et $w_0 = f^{-1}(w)$

$$f^{-1}(v + w) = f^{-1}(f(v_0) + f(w_0)) = f^{-1}(f(v_0 + w_0))$$
$$= v_0 + w_0 = f^{-1}(v) + f^{-1}(w)$$

soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}(\lambda v) = f^{-1}(\lambda f(v_0)) = f^{-1}(f(\lambda v_0))$$
$$= \lambda v_0 = \lambda f^{-1}(v)$$

remarque : Soit B la matrice de f^{-1}

on a $AB = BA = I_n$ donc $B = A^{-1}$