# dérivées partielles et vecteurs tangents

## 1) Courbes

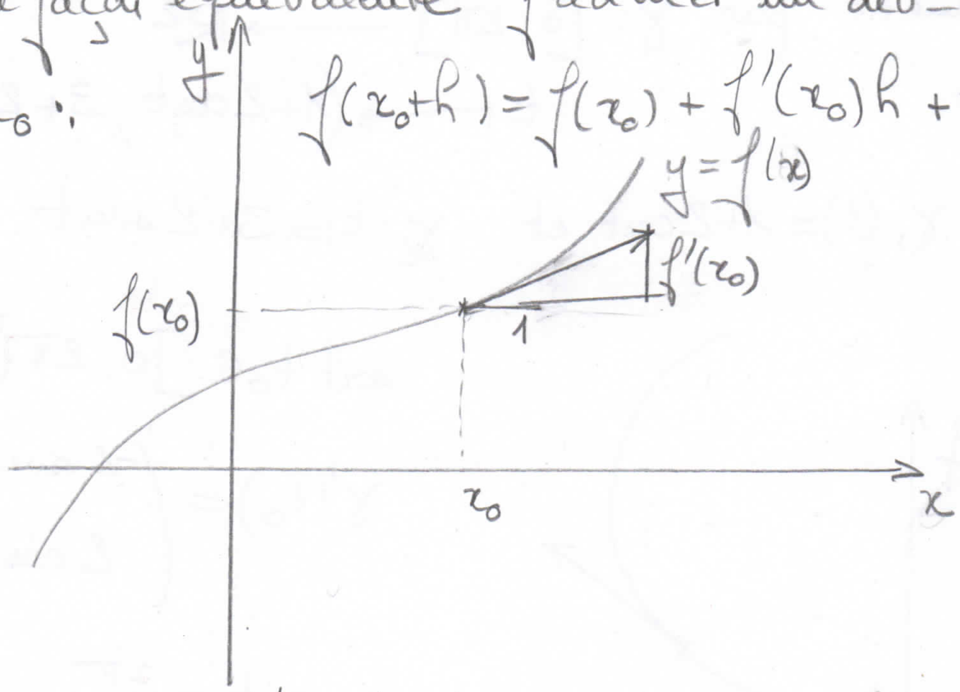
rappel : Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$

soit $x_0 \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $x_0$ lorsque le taux d'accroissement $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite quand $h$ tend vers $0$ et dans ce cas on note

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ou de façon équivalente $f$ admet un dev$^t$ limité d'ordre 1 en $x_0$ :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\,\varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$




Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ est tangent au graphe de $f$ au point $(x_0, f(x_0))$

La tangente en ce point a pour équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

plus généralement on peut se donner une courbe dans $\mathbb{R}^2$ par un paramétrage, c'est à dire une application $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

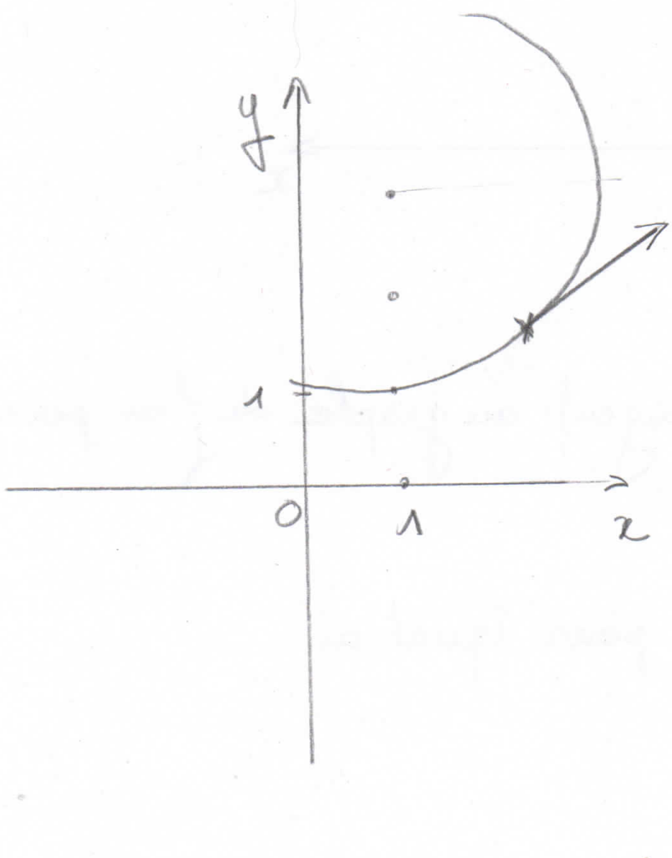
$$t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Lorsque les applications $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont dérivables en $t_0 \in I$ alors la courbe $\gamma(I)$ admet pour vecteur tangent en $t_0$ le vecteur $\begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t)$

exemple Le cercle $C$ de centre $(1,3)$ et de rayon $2$ peut être paramétré par $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto (1+2\cos t, 3+2\sin t)$$

ici on a pris $\gamma_1(t) = 1+2\cos t$ et $\gamma_2(t) = 3+2\sin t$




soit $t_0 \in ]0; 2\pi[$

$$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin t_0 \\ 2\cos t_0 \end{pmatrix}$$

pour $t_0 = \frac{7\pi}{4}$

$$\gamma'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} +\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

remarque : le graphe d'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est aussi une courbe paramétrée avec le paramétrage

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x, f(x))$$

si $f$ est dérivable en $x_0 \in I$ le vecteur tangent à la courbe est $\gamma'(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$

par exemple le cercle précédent a pour équation
$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$
la moitié du cercle est le graphe de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3 + \sqrt{4-(x-1)^2}$
l'autre moitié du cercle est le graphe de $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3 - \sqrt{4-(x-1)^2}$

$g'(x) = + \dfrac{x-1}{\sqrt{4-(x-1)^2}}$

pour $t_0 = \dfrac{7\pi}{4}$ on a $\gamma(t_0) = (1+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2}, g(1+\sqrt{2}))$

$\begin{pmatrix} 1 \\ g'(1+\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur tangent au graphe de $g$ en $(1+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2})$

## 2) dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application

On a vu que le graphe de $f$ est la surface d'équation $z = f(x, y)$ dans $\mathbb{R}^3$.

$f$ admet une dérivée partielle selon $x$ au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$ admet une limite lorsque $h$ tend vers $0$

si c'est le cas on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ cette limite.

en particulier si, à $y_0$ fixé, l'application $h_{y_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x, y_0)$ obtenue à partir de $f$ en fixant $y_0$ et en faisant varier $x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors $f$ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = h'_{y_0}(x)$.

on définit de façon analogue la dérivée partielle par rapport à $y$.

exemple $f(x, y) = x \cos y + \ln x$ $\quad f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos y + \dfrac{1}{x}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin y$

Le théorème qui suit nous dit que pour $(x_0, y_0) = (1, \pi)$

$$f(1+h, \pi+k) = f(1, \tfrac{\pi}{2}) + h \frac{\partial f}{\partial x}(1, \tfrac{\pi}{2}) + k \frac{\partial f}{\partial y}(1, \tfrac{\pi}{2}) + \|(h, k)\| \, \varepsilon(h, k)$$

$f(1+h, \pi+k)$ peut être approché par $f(1, \frac{\pi}{2}) + h \frac{\partial f}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}) + k \frac{\partial f}{\partial y}(1, \frac{\pi}{2}) = h - k$

Théorème

Si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues dans une boule de centre $(x_0, y_0)$ alors la fonction $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en $(x_0, y_0)$

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \\ + \|(h,k)\| \,\mathcal{E}(h,k) \quad \text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \mathcal{E}(h,k) = 0$$

dérivées partielles successives

Le plus souvent, on peut redériver les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$

si on calcule la dérivé partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à $x$ on obtient une fonction notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

si on calcule la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à $y$ on obtient une fonction notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

si on calcule la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à $x$ on obtient une fonction notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

si on calcule la dérivée partielle de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par rapport à $y$ on obtient une fonction notée $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

pour $f(x,y) = x\cos y + \ln x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-1}{x^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x\cos y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\sin y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin y$

lorsque la fonction $f$ est suffisamment régulière on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

<u>définition:</u> On définit $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

On dit que $f$ est harmonique lorsque $\Delta f = 0$

exemple $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$

$\Delta f(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$

<u>définition</u> : Le gradient de $f$ est le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla f$

on a donc une autre écriture du développement limité d'ordre 1 de $f$ en $(x_0,y_0)$ :

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \left\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right\| \varepsilon(h,k)$ $\quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$

remarque: l'application $T(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \longmapsto \nabla f(x_0,y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ est linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$ une application

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

On définit les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n), \dots$ $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n)$ de la même façon que pour une fonction de deux variables. De même on définit

$$\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \end{pmatrix}$$

le gradient de $f$ en $(a_1, \dots, a_n)$

Théorème : Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont continues sur une boule de centre $(a_1, \dots, a_n)$ alors l'application $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en $(a_1, \dots, a_n)$ et on a $\forall (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + \nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \|(h_1, \dots, h_n)\| \, \mathcal{E}(h_1, \dots, h_n)$$

où $\lim_{(h_1, \dots, h_n) \to 0} \mathcal{E}(h_1, \dots, h_n) = 0$

exemple : $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y,z) \longmapsto z \cos x \sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -z \sin x \sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z \cos x \cos y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \cos x \sin y$$

pour $(a_1,a_2,a_3) \in \mathbb{R}^3$ on a

$\forall (h_1,h_2,h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2, a_3+h_3) =$$
$$= a_3 \cos a_1 \sin a_2 + (-a_3 \sin a_1 \sin a_2) h_1 + a_3 \cos a_1 \cos a_2 h_2 + \cos a_1 \sin a_2 h_3 + \|(h_1,h_2,h_3)\| \, \varepsilon(h_1,h_2,h_3)$$

avec $\lim_{(h_1,h_2,h_3) \to (0,0,0)} \varepsilon(h_1,h_2,h_3)$

ce qui signifie, $(a_1,a_2,a_3)$ étant fixe, que l'on peut approcher $(a_3+h_3)\cos(a_1+h_1)\sin(a_2+h_2) - a_3 \cos a_1 \sin a_2$ par $-a_3 \sin a_1 \sin a_2 h_1 + a_3 \cos a_1 \cos a_2 h_2 + \cos a_1 \sin a_2 h_3$ qui est une expression linéaire en $h_1, h_2, h_3$

prenons par exemple $(a_1,a_2,a_3) = (\pi, \frac{\pi}{2}, 1)$ alors $f(\pi, 0, 1) = -1$

on peut approcher $h_3 \cos(\pi + h_1) \sin h_2$ par $-1-h_3$

remarque : l'application $T(a_1,..,a_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \longmapsto \nabla f(a_1,..,a_n) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

est linéaire.

Pour étudier une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec $p \geq 1$.

on écrit $f(x_1,..,x_n) = \left( f_1(x_1,..,x_n), \cdots, f_p(x_1,..,x_n) \right)$

et on étudie chaque $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

on a $\forall j \in \{1,..,n\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,..,x_n) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_1,..,x_n), \cdots, \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x_1,..,x_n) \right)$$

exemple $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto (x^2 y, e^{x+y}, \cos y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2xy, e^{x+y}, 0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2, e^{x+y}, -\sin y)$$

Théorème : Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_j}$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ sont continues sur une boule de centre $(a_1, \dots, a_n)$ alors $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en $(a_1, \dots, a_n)$ :

$\forall (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a_1, \dots, a_n) + T(a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \|(h_1, \dots, h_n)\| \, \mathcal{E}(h_1, \dots, h_n)$$

avec $\lim_{(h_1, \dots, h_n) \to 0} \mathcal{E}(h_1, \dots, h_n) = 0$

où $T(a_1, \dots, a_n)$ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dont la matrice est

$$\mathrm{Jac}(f)(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a_1, \dots, a_n) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_n) \end{pmatrix}$$

on a donc $\forall (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Jac}(f)(a_1, \dots, a_n)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \nabla f_p(a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

exemple $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y) \longmapsto \left( ye^x, x^2+y^3, \ln(x^2+y^4+1) \right)$$

$$f_1(x,y) = ye^x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = ye^x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = e^x$$

$$f_2(x,y) = x^2+y^3 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 3y^2$$

$$f_3(x,y) = \ln(x^2+y^4+1) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^4+1} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3}{x^2+y^4+1}$$

$$\mathrm{Jac}(f)(a_1,a_2) = \begin{pmatrix} a_2 e^{a_1} & e^{a_2} \\ 2a_1 & 3a_2^2 \\ \frac{2a_1}{a_1^2+a_2^4+1} & \frac{4a_2^3}{a_1^2+a_2^4+1} \end{pmatrix}$$

par exemple pour $(a_1,a_2) = (0,0)$ $\qquad f(a_1,a_2) = (0,0,0)$

$$\mathrm{Jac}(f)(a_1,a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f(h_1,h_2)$ peut être approché par $(h_2,0,0) = T_f(0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

## 3) composition de dérivées partielles.

soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$

et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$t \longmapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ une courbe

paramétrée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$

soit $t_0 \in I$. On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont continues sur une boule de $\mathbb{R}^n$ qui contient $(\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0))$ et que l'application $\gamma$ est dérivable en $t_0$

Alors l'application $f \circ \gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable en $t_0$

et on a pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$

$$(f_i \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f_i(\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0)) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_1'(t_0) \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0)) + \dots + \gamma_n'(t_0) \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\gamma_1(t_0), \dots, \gamma_n(t_0))$$

preuve pour $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto f(x, y)$

$$f\circ\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

on veut montrer que $f$ est dérivable en $t_0$ :

on on sait que l'application $f$ admet un développement limité d'ordre 1 en $(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$

on a donc $\forall (h,k)\in\mathbb{R}^2$

$$(*)\quad \begin{aligned} & f(\gamma_1(t_0)+h, \gamma_2(t_0)+k) \\ &= f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) + \nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))\begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix} + \|(h,k)\|\, \varepsilon(h,k) \\ & \text{avec } \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 \end{aligned}$$

par ailleurs $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont dérivables en $t_0$, donc elles admettent un développement limité d'ordre 1 en $t_0$ :

$\forall u\in\mathbb{R}$

$$(**)\quad \begin{aligned} \gamma_1(t_0+u) &= \gamma_1(t_0) + u\gamma_1'(t_0) + |u|\varepsilon_1(u) \quad \lim_{u\to 0}\varepsilon_1(u)=0 \\ \gamma_2(t_0+u) &= \gamma_2(t_0) + u\gamma_2'(t_0) + |u|\varepsilon_2(u) \quad \lim_{u\to 0}\varepsilon_2(u)=0 \end{aligned}$$

en prenant $h = u\gamma_1'(t_0) + |u|\varepsilon_1(u)$ et $k = u\gamma_2'(t_0) + |u|\varepsilon_2(u)$ dans $(*)$ on obtient

$$f\circ\gamma(t_0+u) = f(\gamma_1(t_0+u), \gamma_2(t_0+u))$$

$$= f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) + \nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))\cdot\begin{pmatrix} u\gamma_1'(t_0) + |u|\varepsilon_1(t_0) \\ u\gamma_2'(t_0) + |u|\varepsilon_2(t_0)\end{pmatrix}$$

en utilisant $(**)$ puis $(*)$

$$+|u|\,\|(\gamma_1'(t_0)+\varepsilon_1(t_0), \gamma_2'(t_0)+\varepsilon_2(t_0))\|\,\varepsilon(u\gamma_1'(t_0)+|u|\varepsilon_1(t_0), \; u\gamma_2'(t_0)+u\varepsilon_2(t_0))$$

or $\nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \cdot \begin{pmatrix} u\gamma_1'(t_0) + |u|\varepsilon_1(u) \\ u\gamma_2'(t_0) + |u|\varepsilon_2(u) \end{pmatrix}$

$$= u \nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} + |u| \underbrace{\nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \begin{pmatrix} \varepsilon_1(u) \\ \varepsilon_2(u) \end{pmatrix}}_{\xrightarrow[u \to 0]{} 0}$$

donc $f \circ \gamma(t_0 + u)$

$$= f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) + u \nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix} + |u| \varepsilon_3(u)$$

avec $\lim_{u \to 0} \varepsilon_3(u) = 0$

ce qui dit bien que $f \circ \gamma$ est dérivable en $t_0$

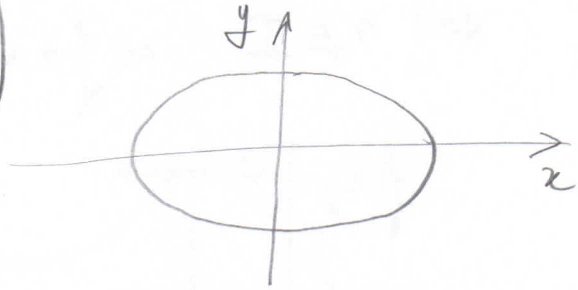
et $(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \gamma_2'(t_0) \end{pmatrix}$

$$= \gamma_1'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)) + \gamma_2'(t_0) \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$$

<u>exemple</u> $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (3\cos t, 2\sin t)$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$




$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\mathrm{Im}\,\gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(f\circ\gamma)'(t) = \frac{\gamma_1(t)}{\sqrt{(\gamma_1(t))^2+(\gamma_2(t))^2}} * \gamma_1'(t) + \frac{\gamma_2(t)}{\sqrt{(\gamma_1(t))^2+(\gamma_2(t))^2}}\, \gamma_2'(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t}} \left(-9\cos t \sin t + 4\sin t\cos t\right)$$

$$= \frac{-5\cos t \sin t}{\sqrt{9\cos^2 t + 4\sin^2 t}}$$

remarque $(f\circ\gamma)'(t) = 0 \iff \exists k_1 \in \mathbb{Z} \quad t = k_1\pi$
ou $\exists k_2 \in \mathbb{Z} \quad t = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$

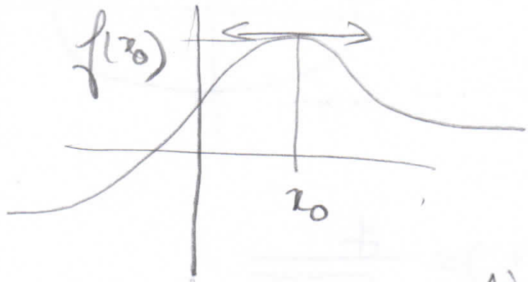
$\iff f\circ\gamma$ a un maximum ou un minimum en $t$

## application 1

rappel soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ une application dérivable sur $I$

$I$ intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert

soit $x_0 \in I$ si $f$ a un maximum en $x_0$ alors $f'(x_0) = 0$




$\forall h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$

$f(x_0+h) \leq f(x_0)$

si $h > 0$ $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$ donc $f'(x_0) \leq 0$

si $h < 0$ $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$ donc $f'(x_0) \geq 0$

$f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$ donc $f'(x_0) = 0$

il en est de même si $f$ a un minimum en $x_0$

**Théorème**: soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dont toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ sont continues sur une boule $B$ de centre $(a_1, \dots a_n)$

Si la restriction de $f$ à cette boule a un maximum ou un minimum en $(a_1, \dots, a_n)$ alors $\nabla f(a_1, \dots, a_n) = \vec{0}$

preuve fixons $l \in \{1, \dots, n\}$, il existe un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ contenant $a_l$ sur lequel peut définir $\gamma : I \longrightarrow B$, $t \longmapsto (a_1, \dots, a_{l-1}, t, a_{l+1}, \dots a_n)$

donc $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

avec si $i \neq l$ alors $\gamma_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto a_i$ est constante

et $\gamma_l : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t$

$\gamma(a_l) = (a_1, \dots, a_n)$

soit $h_\ell = f\circ\gamma_\ell$ $\quad \forall t\in I \quad h_\ell(t) = f(a_1, .., a_{\ell-1}, t, a_{\ell+1}, .. a_n)$

$$h'_\ell(a_\ell) = \nabla f(\gamma(a_\ell)) \cdot \begin{pmatrix} \gamma'_1(a_\ell) \\ \vdots \\ \gamma'_n(a_\ell) \end{pmatrix}$$

$$= \nabla f(\gamma(a_\ell)) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \ell^e \text{ place} = \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(a_1, .., a_n)$$

or $h_\ell$ a un maximum ou un minimum en $a_\ell$

donc $h'_\ell(a_\ell) = 0$

on en déduit $\frac{\partial f}{\partial x_\ell}(a_1, .., a_n) = 0$

application 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dont toutes les dérivées partielles sont continues.

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$

Si l'application $f$ est constante sur l'image $\gamma(I)$ de $\gamma$ alors pour tout $t$ dans $I$ le gradiant $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal au vecteur tangent $\gamma'(t)$ à la courbe $\gamma(I)$ en $\gamma(t)$

preuve soit $h : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f\circ\gamma(t) \end{array}$ alors $h$ est constante sur $I$

donc $\forall t\in I \quad h'(t) = 0$ mais $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

exemple : $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ $\quad$ $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$

$\nabla f(\gamma(t)) = (2\cos t, 2\sin t)$ $\qquad \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

2e cas de composition

soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(u,v) \longmapsto (g_1(u,v), \dots, g_n(u,v))$.

et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$

On suppose que les dérivées partielles de $g$ sont continues sur une boule de centre $(u_0, v_0)$ et que celles de $f$ le sont sur une boule de centre $(g_1(u_0,v_0), \dots, g_n(u_0,v_0))$. Alors $f \circ g$ admet un dev$^t$ limité d'ordre 1 en $(u_0, v_0)$ :

$$f\circ g(u_0+h, v_0+k) = f(g(u_0,v_0)) + \mathrm{Jac}(f)(g(u_0,v_0)) \times \mathrm{Jac}(g)(u_0,v_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \|(h,k)\| \, \varepsilon(h,k)$$

avec $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \varepsilon(h,k) = 0$

en particulier $\dfrac{\partial (f\circ g)}{\partial u}(u_0,v_0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(u_0,v_0)) \frac{\partial g_j}{\partial u}(u_0,v_0)$

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial v}(u_0,v_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(u_0,v_0)) \frac{\partial g_j}{\partial v}(u_0,v_0)$$