I Applications

I) Cas général

définition : Une application est la donnée d'un ensemble de départ E, d'un ensemble d'arrivée F et d'un procédé pour associer à chaque élément de E un élément de F

Soit $f : E \to F$ une telle application

Pour chaque élément x de E, l'élément de F associé à x par l'application f est noté $f(x)$ et est appelé image de x par f.

remarque : il se peut que certains éléments de F ne soient l'image d'aucun élément de E

exemple $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\qquad\qquad x \mapsto (x-3)^2+1$

Les éléments de $\mathbb{R}$ inférieurs strict^t à 1 ne sont l'image d'aucun élément de $\mathbb{R}$ par f

L'ensemble des éléments de F qui sont l'image d'un certain x de E est appelé l'image de l'application f et est noté $\operatorname{Im} f$.

Donc $\quad \operatorname{Im} f = \{ y \in F \mid \exists x \in E \;\; f(x) = y \}$

Pour tout élément y de $\operatorname{Im} f$, on appelle antécédent de y par f tout élément x de E tel que $f(x) = y$

remarque : il se peut que certains éléments de

$\mathrm{Im}\,f$ aient plusieurs antécédents par f
cf exemple précédent

rappel : $E \times F$ est l'ensemble des couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$

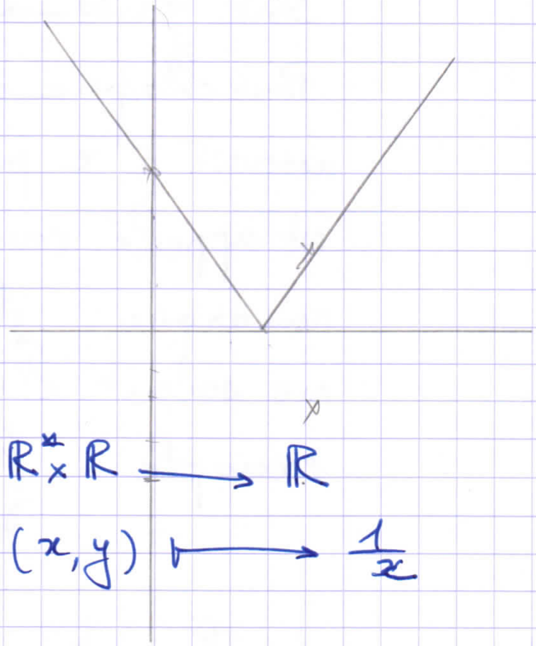
définition : Le graphe de l'application f est

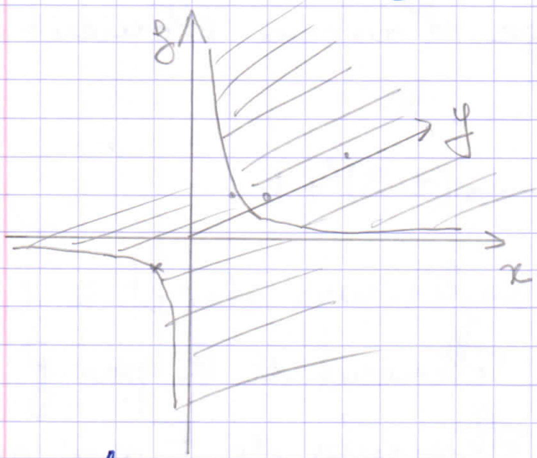
$$Gr(f) = \{(x,y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$$

dessiner le graphe de

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x+2)^2 - 3$$

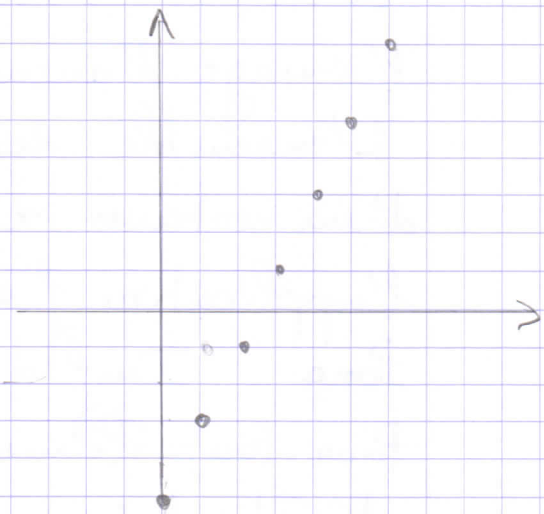
$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left|\frac{3}{2}x - 4\right|$$





$$f_3 : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{x}$$

$$f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$n \longmapsto 2n - 5$$



composée de deux applications

soient $f : E \longrightarrow F_1$ $\quad g : F_2 \longrightarrow G$

lorsque ?? (condition sur F_1 et F_2 à deviner)

on définit l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ par

$$\forall x \in E \quad g \circ f(x) = g(f(x))$$

exemples : peut-on définir $g \circ f$? $f \circ g$? si oui a-t-on $g \circ f = f \circ g$

$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x$ $\qquad x \longmapsto x+1$

$f_2 : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln(x)$ $\qquad x \longmapsto 5x$

$f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\qquad g_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$n \longmapsto 2n-5$ $\qquad x \longmapsto E(x)$

$f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad g_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+y, xy, ye^x)$ $\qquad x \longmapsto (x^3, e^x)$

définition : Une application $f : E \to F$ est dite inversible lorsqu'il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$

où $id_E : E \longrightarrow E$ $\quad$ et $\quad id_F : F \longrightarrow F$

$x \longmapsto x$ $\qquad y \longmapsto y$

On note alors $g = f^{-1}$ et on dit que g est l'application réciproque de f.

exemples :

$f_1^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{2} x$

$g_1^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x - 1$

$f_2^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$
$x \longmapsto e^x$

proposition : $f : E \to F$ est inversible si et seul^t si tout élément y de F a un et un seul antécédent dans E.

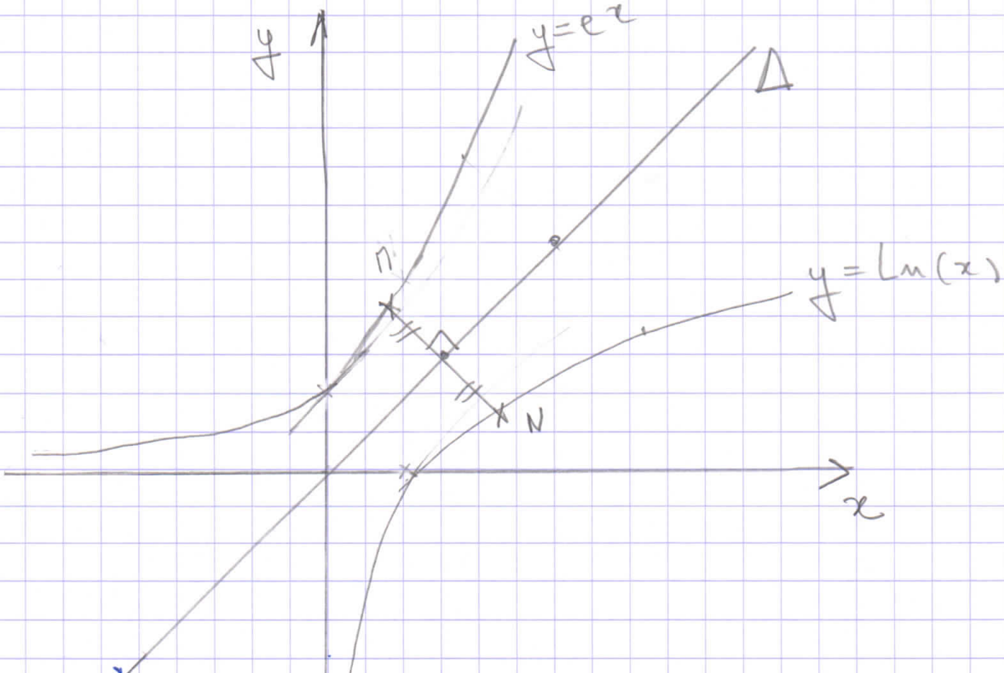
preuve supposons f inversible :
il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$
soit $y \in F$ $f \circ g(y) = y$, donc $g(y)$ est un antécédent de y par f. conclusion : tout élément de F possède au moins un antécédant dans E par f
supposons que $y \in F$ aient deux antécédents x_1 et x_2
alors $g \circ f(x_1) = x_1$ et $g \circ f(x_2) = x_2$
et $f(x_1) = y$ et $f(x_2) = y$ d'où $f(x_1) = f(x_2)$
et $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ c'est à dire $x_1 = x_2$
conclusion un élément de F ne peut pas posséder deux antécédents distincts dans E
réciproq^t : si tout él^t de F possède un et un seul antécédent dans E par l'application f on construit $g : F \to E$ qui à y de F associe son unique antécédent x et on a bien
$\forall x \in E$ $g \circ f(x)$ est l'antécédant de $f(x)$, donc x
d'où $g \circ f = id_E$
$\forall y \in F$ $f \circ g(y)$ est l'image par f de l'antécéd^t de y, donc y d'où $f \circ g = id_F$

g_4 n'est pas inversible car tous les éléments de $[0;1[$ sont des antécédents de 0

g_3 n'est pas inversible car $(0,-1)$ n'a pas d'antécédant dans $\mathbb{R}$.

f_3 n'est pas inversible car $(0,1,0)$ n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}^2$

remarque : Lorsque f est inversible les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$



Soit Δ la droite d'équation $y=x$

preuve : si $M(x,y)\in Gr(f)$ alors $y=f(x)$ et $x=f^{-1}(y)$ donc $N=(y,x)\in Gr(f^{-1})$

le milieu de M et N est $\frac{1}{2}(M+N)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

il appartient bien à la droite Δ

$\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $(y-x, x-y)$

$\vec{u}(1,1)$ est un vecteur directeur de Δ

$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{u}=0$ donc $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal à $\vec{u}$