1
2
3
4

MAT305

Premier semestre 2022-2023

Examen terminal - Janvier 2023

Le barème est seulement indicatif.

Pour chaque exercice, remplir les espaces indiqués par des lignes en pointillé avec votre réponse.

3pt

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x,y) = \sin(x+2y)e^{x-y}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, le gradient de f en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\nabla f(x,y) = \Big(e^{x-y}\big(\cos(x+2y)+\sin(x+2y)\big), e^{x-y}\big(2\cos(x+2y)-\sin(x+2y)\big)\Big).$$

En plus,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{x-y}\cos(x+2y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{x-y}\big(4\cos(x+2y)+3\sin(x+2y)\big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{x-y}\big(\cos(x+2y)-3\sin(x+2y)\big),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{x-y}\big(\cos(x+2y)-3\sin(x+2y)\big).$$

5pt

2. Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $\alpha(t) = (t^2-1, t(t^2-1))$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $g(x,y) = x^2 + x^3 - y^2$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(*a*) La dérivée de α en $t \in \mathbb{R}$ est

$$\alpha'(t) = \big(2t, 3t^2-1\big)$$

et le gradient de g en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$\nabla g(x,y) = \Big(2x+3x^2, -2y\Big).$$

(*b*) Comme $(g \circ \alpha)(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, α est un paramétrage de la ligne de niveau 0 de g.

(*c*) Le produit scalaire $\nabla g(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(*d*) L'équation cartésienne de la droite tangente à α en $(-1,0)$ est donnée par $0y + 1x = -1$.

4pt

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $f(x, y) = (4x + 6y, 2x + 3y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

sa trace est 7 et son déterminant est 0.

(b) Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(-3, 2)$ et l'image de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ engendré par le vecteur $(2, 1)$.

8pt

4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -2 \\ -10 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^3 + 0X^2 - 1X + 0$.

(b) Alors, les racines de χ_A sont -1, 0 et 1 (remplir de façon croissante).

(c) Les valeurs propres de A sont alors -1, 0 et 1 (remplir de façon croissante) et les vecteurs propres associés sont

$$(1, 2, -1), \qquad (2, 5, -2) \qquad \text{et} \qquad (3, 10, -2),$$

respectivement. Soit $\mathscr{B}$ la base formée des vecteurs précédents (dans le même ordre).

(d) La matrice de passage P entre la base canonique et la base $\mathscr{B}$ et son inverse P^{-1}, de sorte que $P^{-1}AP$ soit diagonale, sont

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 10 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) La matrice $P^{-1}AP$ est égale à

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(f) La matrice A^{40} est égale à

$$\begin{pmatrix} 13 & -2 & 8 \\ 30 & -4 & 20 \\ -12 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$