Contrôle Continu 2

Novembre 2023

Document autorisé : une feuille A4 manuscrite recto-verso. Appareils electroniques (dont telephones portables et calculatrices) interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Parmi les produits de matrices suivants, déterminer lesquels sont bien définis et les calculer : AB, BA, BAC et CBA.

Exercice 2 Déterminer si oui ou non les applications suivantes sont des applications linéaires, et pour celles qui sont linéaires, donner leur matrice.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x + y)^3$.
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = 2x + y$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = 2x + 3y + 5$.
4. $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $k(x, y) = (2x + 3y, 2)$.

Exercice 3 Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient f et g des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont aussi des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Rappel : une application est linéaire si et seulement si elle est de la forme $\vec{v} \mapsto M\vec{v}$ pour une matrice M.
2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle. Montrer que $(x, y) \mapsto (h(x, y))^2$ n'est pas une application linéaire.

Exercice 4 Soient f et g les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (x + \sqrt{2}(-x + y),\ y - \sqrt{2}(-x + y)) \\ g(x, y) &= (-x, y). \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $f \circ g$ est linéaire et donner sa matrice.
2. Justifier que $f \circ g$ est bijective et calculer sa réciproque.
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $f(t, t) = (t, t)$.

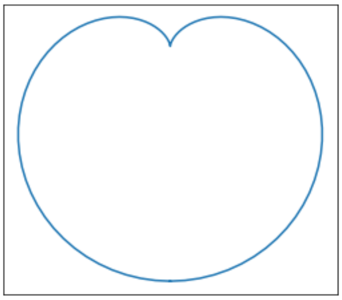

Figure 1: L'image de la courbe γ de l'exercice 5

Exercice 5 On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\gamma(t) = (\sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t), -\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(2t))$$

On rappelle que $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$, $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ainsi que les identités suivantes :

$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \quad \text{et} \quad \cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$$

1. Calculer $\gamma(0), \gamma(\pi/2), \gamma(\pi/3)$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $\gamma(-t) = f \circ \gamma(t)$, où $f : (x, y) \mapsto (-x, y)$ est la symétrie par rapport a la droite d'équation $x = 0$.
3. Montrer que la courbe γ intersecte la droite $x = 0$ en deux points distincts [on précisera les valeurs de t correspondantes et les coordonnées de ces points].
4. Calculer le vecteur vitesse $\gamma'(t)$ de γ en $\gamma(t)$.
5. Déterminer les valeurs de t telles que $\gamma'(t)$ est (a) un vecteur horizontal ; (b) un vecteur vertical.
6. Recopier la figure 1 et placer : les axes x et y ; les points d'intersection de la courbe γ avec l'axe y, et les droites tangentes verticales et horizontales.

Exercice 6 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$$

1. Calculer la valeur de f en $(1, 1)$, $(-1, -1)$ et en $(2, -2)$.
2. Calculer le gradient $\nabla f(x, y)$ de f en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée définie par:

   $$\gamma(t) = (\cos(t) + 2\sin(t), \cos(t) - 2\sin(t))$$

   pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est constante.
4. Montrer que le produit scalaire $\nabla f(\gamma(t))\ .\ \gamma'(t)$ est nul pour tout $t \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les droites tangentes à la courbe γ en $\gamma(t)$ pour $t = 0, \pm\pi/2$ et π et les représenter.