controle du 24 novembre

Documents, calculatrices et matériel électronique non-autorisés.

Barème indicatif :
Exercice 1 : 7 points
Exercice 2 : 3 points
Exercice 3 : 10 points

Exercice 1 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique B_c de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Quels sont les valeurs propres de f ?
2. Quels sont les vecteurs propres pour les valeurs propres trouvées ?
3. Donner une base B_1 de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres pour f.
4. Quelle est la matrice de passage P de la base B_c à la base B_1 ?
5. Calculer P^{-1}.
6. Quelle est la matrice de f dans la base B_1 ?
7. Utiliser cette nouvelle matrice pour calculer A^6.

Exercice 2 :

On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ où n est un entier supérieur à 1. On suppose que f possède au moins une valeur propre λ.

1. On note E_λ l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient $f(v) = \lambda v$. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Quel lien a-t-on entre E_λ et les vecteurs propres associés à la valeur propre λ ?

Exercice 3 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que l'application f possède exactement deux valeurs propres et que l'une d'entre elle est 3.
2. Donner une base du sous-espace vectoriel E_3. (on rappelle que E_3 est l'ensemble des vecteurs v de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient $f(v) = 3v$).
3. Quels sont les vecteurs propres pour la valeur propre 3 ?
4. Quels sont les vecteurs propres pour l'autre valeur propre ?
5. Donner une base B_1 de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour f.
6. Quelle est la matrice de f dans la base B_1 ?