MAT303
Premier semestre — 2020–2021
Fiche 5: Dérivées partielles, différentielle

1. *Ensemble de définition et dérivées partielles.* On considère les expressions suivantes :
(a) $f(x,y) = x^3 + x^2\sin(xy)$, (b) $f(x,y) = x^4e^y$, (c) $f(x,y) = \ln(1-(x^2+y^2))$, (d) $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$, (e) $f(x,y) = \sqrt{x-y^2}$, (f) $f(x,y) = \ln(\sin(x-y))$, pour x, y des variables réelles. Déterminer le domaine de définition de la fonction associée à chaque expression précédente, le représenter dans $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles premières lorsqu'elles existent.

Solution. On laisse la représentation graphique des domaines de définition à la lectrice/au lecteur.

(a) C'est clair que le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f est $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin(xy) + x^2y\cos(xy) + 3x^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3\cos(xy),$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) On voit bien que le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f est $\mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3e^y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4e^y,$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) C'est clair que le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$. Les dérivées partielles sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x}{1-x^2-y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2y}{1-x^2-y^2},$$
pour tout $(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)$.

(d) On voit bien que le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f est $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$. Les dérivées partielles sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2},$$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_{\leq 0} \times \{0\})$.

(e) C'est clair que le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$. Les dérivées partielles sont
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x-y^2}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x-y^2}},$$
pour tout $(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)^\circ$.

(f) On voit bien que le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f est

$$\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y\in\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]\,2n\pi,(2n+1)\pi\,[\,\Big\}.$$

Les dérivées partielles sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{\tan(x-y)} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{\tan(x-y)},$$

pour tout $(x,y)\in\mathrm{Dom}(f)$.

2. *Dérivées directionnelles I.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=y^2/x$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et $f(0,y)=0$, pour tout $y\in\mathbb{R}$.

(a) Soit θ un réel fixé. Que représente géométriquement la fonction $g_\theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $g_\theta(r)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$?

(b) Montrer que pour tout réel θ, la fonction g_θ est dérivable en 0.

(c) Montrer que, pourtant, f n'est pas continue en $(0,0)$.

Solution.

(a) C'est l'intersection entre le graphe de f et le plan vertical d'angle θ.

(b) Si $\theta\in C=\{\pi/2+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$, alors g_θ est la fonction nulle et *a fortiori* dérivable. Si $\theta\notin C$, alors $g_\theta(r)=r\sin(\theta)\tan(\theta)$. C'est clair que ette fonction est dérivable.

(c) On voit bien que $f(4^{-n},2^{-n})=1$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, tandis que $f(0,0)=0$. Comme la suite $(4^{-n},2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,0)$ quand n tend vers $+\infty$, on conclut que f n'est pas continue en $(0,0)$.

3. *Dérivées directionnelles II.* Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x\cos(y)+ye^x$. Pour $\theta\in[0,2\pi]$, soit $\vec{u}_\theta=(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Calculer la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ dans la direction de $\vec{u}_\theta$. Pour quelle valeur de θ est-elle maximale ? Interpréter cette information sur le graphe de f.

Solution. On voit bien que

$$\nabla f(x,y)=\big(ye^x+\cos(y),e^x-x\sin(y)\big),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En conséquence, f est de classe C^1, car les dérivées partielles sont continues en tout point du plan. La dérivée directionnelle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_\theta}(x,y)=\langle\nabla f(x,y),\vec{u}_\theta\rangle=\cos(\theta)\big(ye^x+\cos(y)\big)+\sin(\theta)\big(e^x-x\sin(y)\big),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, où $\langle\,,\rangle$ est le produit scalaire euclidien. En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_\theta}(0,0)=\langle\nabla f(0,0),\vec{u}_\theta\rangle=\cos(\theta)+\sin(\theta).$$

C'est facile à voir que cette valeur est maximale pour $\theta=\pi/4$. En effet, il suffit de calculer le maximum de la fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $h(\theta)=\cos(\theta)+\sin(\theta)$ dans l'intervalle $[0,2\pi]$. À partir de considérer l'intersection de la droite $y=x$ avec le circle unité, on voit que les zéros de $h'(\theta) = -\sin(\theta) + \cos(\theta)$ dans $[0, 2\pi]$ sont $\pi/4$ et $5\pi/4$. Comme $h''(\pi/4) = -\sqrt{2} < 0$ et $h''(5\pi/4) = \sqrt{2} > 0$, $\pi/4$ est le seul maximum local de $h|_{[0,2\pi]}$ et $5\pi/4$ est le seul minimum local de $h|_{[0,2\pi]}$. Comme $h|_{[0,2\pi]}$ est continue, elle possède un maximum global et un minimum global dans $[0, 2\pi]$, qui coïncident donc avec $\pi/4$ et $5\pi/4$, respectivement.

4. *Dérivées directionnelles III.* On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que les points $P \in \mathbb{R}^n$ et les vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ non nuls :

(a) la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

avec le point $P = (1, 2)$ et le vecteur $v = (3, 5)$;

(b) la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, avec le point $P = (0, 0, 0)$ et le vecteur $v = (5, 1, -2)$;

(c) la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^3y^4 + x^4y^3$, avec le point $P = (1, 1)$ et le vecteur $v = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$;

(d) la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = ye^{-x}$, avec le point $P = (0, 4)$ et le vecteur $v = (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))$.

Calculer la dérivée directionnelle de f en P dans la direction de v.

Solution. Par ailleurs, on rappelle que si f est différentiable en P alors

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle \nabla f(P), v \rangle.$$

(a) C'est clair que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, car elle s'écrit comme un quotient de fonctions différentiables avec dénominateur non nul. Comme $\nabla f(x, y) = ((y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)^2, -2xy/(x^2 + y^2)^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) = \left\langle \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right), (3,5) \right\rangle = -\frac{11}{25},$$

pour $v = (3, 5)$.

(b) C'est clair que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^3$, car elle s'écrit comme une somme de produits de fonctions différentiables. Comme $\nabla f(x, y, z) = (e^y + ze^x, e^z + xe^y, e^x + ye^z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0,0) = \big\langle (1,1,1), (5,1,-2) \big\rangle = 4.$$

pour $v = (5, 1, -2)$.

(c) C'est clair que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, car il s'agit d'un polynôme. Comme $\nabla f(x, y) = (3x^2y^4 + 4x^3y^3, 4x^3y^3 + 3x^4y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \Big\langle (7,7), \big(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6) \big) \Big\rangle = 7\Big(\cos(\pi/6) + \sin(\pi/6) \Big) = 7\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \Big),$$

pour $v = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6))$, où l'on a utilisé que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ et que $\sin(\pi/6) = 1/2$.

(*d*) C'est clair que la fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, car il s'agit d'un produit de fonctions différentiables. Comme $\nabla f(x,y) = (-ye^{-x}, e^{-x})$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,4) = \Big\langle (-4,1), \big(\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3)\big)\Big\rangle = -4\cos(2\pi/3) + \sin(2\pi/3) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pour $v = (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3))$, où l'on a utilisé que $\cos(\pi/6) = -1/2$ et que $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x,y) = ye^{-xy}$. Calculer tous les vecteurs $v \in \mathbb{R}^2$ de norme 1 tels que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = 1.$$

Solution. C'est clair que f est différentiable, car f s'obtient comme un produit de fonctions différentiables. Par ailleurs, on rappelle que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), v\rangle.$$

Dans ce cas, comme $\nabla f(x,y) = (-y^2e^{-xy}, e^{-xy}(1-xy))$, on voit bien que

$$1 = \frac{\partial f}{\partial v}(0,2) = \langle (-4,1), v\rangle = -4v_1 + v_2.$$

pour tout vecteur non nul $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. On impose que la norme de v soit 1, *i.e.* $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Si l'on remplace $v_2 = 1 + 4v_1$ dans $v_1^2 + v_2^2 = 1$ on trouve

$$1 = (1+4v_1)^2 + v_1^2 = 1 + 8v_1 + 17v_1^2,$$

i.e. $v_1(8+17v_1) = 0$, qui admet les solutions $v_1 = 0$ et $v_1 = -8/17$. En employant $v_2 = 1+4v_1$ on trouve dans le premier cas le vecteur $v = (0,1)$ et dans le deuxième $v = (-8/17, -15/17)$.

6. *Matrice jacobienne.* On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x,y) = \Big(\sin(xy), xe^{-(x^2+y^2)}\Big).$$

Calculer sa matrice jacobienne en tout point et en $(1,1)$.

Solution. On voit bien que

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} & -2xye^{-x^2-y^2} \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En particulier,

$$J_f(1,1) = \begin{pmatrix} \cos(1) & \cos(1) \\ -e^{-2} & -2e^{-2} \end{pmatrix}.$$

7. *Règle de dérivation en chaîne I.* Soient $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}^2$ et $h:\mathbb{R}^2_{>0}\to\mathbb{R}^2$ données par

(*a*) $f(x,y)=x^2+y^2+xy$ et $g(t)=(\sin(t),e^t)$,
(*b*) $f(x,y)=\cos(x+4y)$ et $g(t)=(5t^4,1/t)$,
(*c*) $f(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$ et $g(t)=(\ln(t),\cos(t))$,
(*d*) $f(x,y)=x^2y^3$ et $h(s,t)=(s\cos(t),s\sin(t))$,
(*e*) $f(x,y)=\sin(x)\cos(y)$ et $h(s,t)=(st^2,s^2t)$,
(*f*) $f(x,y)=e^x+2y$ et $h(s,t)=(s/t,t/s)$.

Calculer la dérivée de la fonction $f\circ g:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ et le gradient de $f\circ h:\mathbb{R}^2_{>0}\to\mathbb{R}$ en employant la règle de dérivation en chaîne.

Solution. La règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$(f\circ g)'(t)=\Big\langle\nabla f\big(g(t)\big),g'(t)\Big\rangle \text{ et } \nabla(f\circ h)(s,t)=\nabla f\big(h(s,t)\big)\cdot J_h(s,t), \tag{1}$$

pour tous $s,t\in\mathbb{R}_{>0}$. En particulier, si l'on applique (1),

(*a*) comme $\nabla f(x,y)=(2x+y,2y+x)$ et $g'(t)=(\cos(t),e^t)$, on voit bien que

$$(f\circ g)'(t)=\Big\langle\big(2\sin(t)+e^t,2e^t+\sin(t)\big),\big(\cos(t),e^t\big)\Big\rangle=\sin(2t)+e^t(2\sin(t)+\cos(t))+2e^{2t};$$

(*b*) comme $\nabla f(x,y)=(-\sin(x+4y),-4\sin(x+4y))$ et $g'(t)=(20t^3,-1/t^2)$, on voit bien que

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(t)&=-\Big\langle\big(\sin(5t^4+4/t),4\sin(5t^4+4/t)\big),\big(20t^3,-1/t^2\big)\Big\rangle\\&=-4(5t^3-1/t^2)\sin(5t^4+4/t);\end{aligned}$$

(*c*) comme $\nabla f(x,y)=(x,y)/\sqrt{1+x^2+y^2}$ et $g'(t)=(1/t,-\sin(t))$, on voit bien que

$$(f\circ g)'(t)=\frac{\Big\langle\big(\ln(t),\cos(t)\big),\big(1/t,-\sin(t)\big)\Big\rangle}{\sqrt{1+\ln(t)^2+\cos^2(t)}}=\frac{\ln(t)/t-\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+\ln(t)^2+\cos^2(t)}};$$

(*d*) comme $\nabla f(x,y)=(2xy^3,3x^2y^2)$ et

$$J_h(s,t)=\begin{pmatrix}\cos(t)&-s\sin(t)\\\sin(t)&s\cos(t)\end{pmatrix},$$

on voit bien que

$$\begin{aligned}\nabla(f\circ h)(s,t)&=s^4\sin^2(t)\cos(t)\big(2\sin(t)\quad 3\cos(t)\big)\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)&-s\sin(t)\\\sin(t)&s\cos(t)\end{pmatrix}\\&=s^4\sin^2(t)\cos(t)\big(5\sin(2t)/2,s\cos^2(t)+2s\cos(2t)\big);\end{aligned}$$

(*e*) comme $\nabla f(x,y)=(\cos(x)\cos(y),-\sin(x)\sin(y))$ et

$$J_h(s,t)=\begin{pmatrix}t^2&2st\\2st&s^2\end{pmatrix},$$

on voit bien que

$$\begin{aligned}\nabla(f\circ h)(s,t)&=\big(\cos(st^2)\cos(s^2t),-\sin(st^2)\sin(s^2t)\big)\cdot\begin{pmatrix}t^2&2st\\2st&s^2\end{pmatrix}\\&=\big(t^2\cos(st^2)\cos(s^2t)-2st\sin(st^2)\sin(s^2t),\\&\qquad 2st\cos(st^2)\cos(s^2t)-s^2\sin(st^2)\sin(s^2t)\big);\end{aligned}$$

(f) comme $\nabla f(x,y) = (e^x, 2)$ et

$$J_h(s,t) = \begin{pmatrix} 1/t & -s/t^2 \\ -t/s^2 & 1/s \end{pmatrix},$$

on voit bien que

$$\nabla(f \circ h)(s,t) = \begin{pmatrix} e^{s/t} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/t & -s/t^2 \\ -t/s^2 & 1/s \end{pmatrix} = \left(\frac{e^{s/t}}{t} - \frac{2t}{s^2}, -s\frac{e^{s/t}}{t^2} + \frac{2}{s} \right).$$

8. *Règle de dérivation en chaîne II.* Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables telles que

$$g(3) = 2, g'(3) = 5, h(3) = 7, h'(3) = -4, \frac{\partial f}{\partial x}(2,7) = 6 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(2,7) = -8.$$

Soit $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $k(t) = f(g(t), h(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Calculer $k'(3)$.

Solution. La règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(g(t), h(t)\big).g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g(t), h(t)\big).h'(t), \tag{2}$$

pour tous $t \in \mathbb{R}$. En particulier, si l'on pose $t = 3$ dans (2) on trouve

$$k'(3) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,7).g'(3) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,7).h'(3) = 6.5 + (-8).(-4) = 62.$$

9. *Dérivés partielles secondes I.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, mais pas de classe C^2.

Solution. Comme $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ s'écrit comme somme, produit et division de fonctions C^2, elle est C^2. On trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \\ \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. \end{cases}$$

En employant les inégalités $x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$, on voit bien que les dérivées partielles précédentes sont continues en $(0,0)$. En conséquence, f est de classe C^1. Par ailleurs, comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^5/k^4}{k} = -1$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5/h^4}{h} = 1$$

sont différentes, f n'est pas de classe C^2.

10. *Dérivés partielles secondes II.* Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } y = 0, \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right), & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

(a) Étudier la continuité de f.

(b) Étudier l'existence et la valeur de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Montrer que $\partial^2 f/(\partial x \partial y)$ et $\partial^2 f/(\partial y \partial x)$ existent en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur. Quelle est la classe de f ?

(c) Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Solution.

(a) Soit $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$. Comme $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus C}$ s'écrit comme produit, division avec dénominateur non nul et composition de fonctions C^2, elle est C^2. On va montrer que f est continue en tout point de la forme $(a,0)$, avec $a \in \mathbb{R}$. On note d'abord que

$$0 \leq \left|f(x,y) - f(a,0)\right| = \left|f(x,y)\right| = y^2 \left|\sin(x/y)\right| \leq y^2$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $y \neq 0$, et $|f(x,0) - f(a,0)| = 0$. Cela nous dit que

$$0 \leq \left|f(x,y) - f(a,0)\right| \leq y^2$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme y^2 converge vers 0 quand y tend vers 0, $f(x,y)$ converge vers $f(a,0)$ quand (x,y) tend vers $(a,0)$. En conséquence, f est continue en tout point $(a,0)$ de C, ce qui implique que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent et elles sont facilement calculées. En effet, on voit bien que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) \in C, \\ y\cos(x/y), & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C, \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) \in C, \\ 2y\sin(x/y) - x\cos(x/y), & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C. \end{cases}$$

On note que $\partial f/\partial y$ n'est pas continue en $(x,0)$ si $x \neq 0$. En particulier, f n'est pas de classe C^1.

En outre,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x/y) & x\sin(x/y)/y + \cos(x/y) \\ x\sin(x/y)/y + \cos(x/y) & -((x^2-2y^2)\sin(x/y) + 2xy\cos(x/y))/y^2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. Par ailleurs,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k\cos(x/k)}{k} = \lim_{k\to 0} \cos(x/k)$$

nous dit que $\partial^2 f/(\partial y \partial x)$ n'existe pas en $(x,0)$ si $x \neq 0$, mais elle existe en $(0,0)$ et vaut 1. On a que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. De même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{2k\sin(x/k) - x\cos(x/k)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} 2\sin(x/k) - \frac{x}{k}\cos(x/k) \end{aligned}$$

nous dit que $\partial^2 f/(\partial y^2)$ n'existe pas en $(x,0)$ si $x \neq 0$, mais elle existe en $(0,0)$ et vaut 0.

(c) Comme $f|_{\mathbb{R}^2\setminus C}$ est de classe C^2, elle est différentiable, ce qui implique que f est différentiable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. On va démontrer que f est différentiable en tout $(a,0)$, avec $a \in \mathbb{R}$. Or, l'application f est différentiable en $(a,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,k) - f(a,0) - \langle \nabla(a,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Or, dans ce cas

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,k) - f(a,0) - \langle \nabla(a,0),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

vu que $f(a,0) = 0$ et $\nabla(a,0) = (0,0)$. En outre, on voit bien que

$$0 \leq \left| \frac{f(a+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{|k|^2 \left| \sin\big((a+h)/k\big) \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |k|$$

pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ avec $k \neq 0$, où l'on a utilisé que $|\sin(\alpha)| \leq 1$ et $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$, et

$$\left| \frac{f(a+h,0)}{\sqrt{h^2+0^2}} \right| = 0$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$. Cela nous dit que

$$0 \leq \left| \frac{f(a+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq |k|$$

pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Comme $|k|$ converge vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$, on conclut que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

comme on voulait démontrer.

11. *Extrema I.* On considère les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ suivantes :
(a) $f(x,y) = x^2+y^2+x^3$, (b) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$, (c) $f(x,y) = x^4+y^4-4xy$,
(d) $f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y$, (e) $f(x,y) = xe^y+ye^x$, (f) $f(x,y) = x^2-y^2$,
(g) $f(x,y) = (2x+1-y)^2$, (h) $f(x,y) = (x-y)^2+1+2(x-y)$,
(i) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$, (j) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}+xy$, (k) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$,
(l) $f(x,y) = x^2-2xy^2+y^4-y^5$, (m) $f(x,y) = 1/(1+x^2+y^2)$,
(n) $f(x,y) = x^2-y^2-xy+3x+3y+1$,
(o) $f(x,y) = \begin{cases} e^{1/(x^2y)}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$
Trouver les points critiques des fonctions précédentes et déterminer leur nature.

Solution. On ne va pas indiquer la méthode de résolution algébrique du système $\nabla f(x,y) = (0,0)$ pour calculer les points critiques dans les cas triviaux.

(a) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(x(3x+2), 2y\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sont alors $(0,0)$ et $(-2/3,0)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(-2/3,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(0,0)$ est un minimum local de f et $(-2/3,0)$ est un point-selle.

(b) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(3(x^2-y), 3(y^2-x)\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques f sont alors $(0,0)$ et $(1,1)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(0,0)$ est un point-selle et $(1,1)$ est un minimum local de f.

(c) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(4(x^3-y), 4(y^3-x)\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques f sont alors $(0,0)$, $(-1,-1)$ et $(1,1)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(-1,-1) = H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(0,0)$ est un point col, et $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont des minima locaux de f.

(d) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(2x+y+2, x+2y+3\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le seul point critique de f est alors $(-1/3,-4/3)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(-1/3,-4/3)$ est un minimum local de f.

(e) C'est clair que f est de classe C^3, car f s'écrit comme une somme des produits de fonctions de classe C^3. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(ye^x + e^y, xe^y + e^x\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pour calcules les points critiques on note d'abord que $\nabla f(x,y) = (0,0)$ équivaut à $y = -e^{y-x}$ et $x = -e^{x-y}$. En particulier, $xy = 1$ et $x,y < 0$. Avec cette simplification, et si l'on pose $z = -x$, $\nabla f(x,y) = (0,0)$ équivaut à $z = e^{-z+1/z}$. On voit bien que la fonction $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(z) = e^{-z+1/z} - z$ est strictement décroissante, vu que $g'(z) = -e^{-z+1/z}(1+1/z^2) - 1 < 0$. En plus, $g(1) = 0$. Comme g est strictement décroissante, il s'agit de l'unique racine de g, ce qui nous dit que la seule solution de $\nabla f(x,y) = (0,0)$ est $(-1,-1)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x + e^y \\ e^x + e^y & xe^y \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(-1,-1)$ est un point col.

(f) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(2x, -2y\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le seul point critique de f est alors $(0,0)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(0,0)$ est un est un point-selle.

(g) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(8x-4y+4, -4x+2y-2\big),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. L'ensemble de points critiques de f est alors $\{(x,2x+1) : x\in\mathbb{R}\}$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, les points critiques $(x,2x+1)$, avec $x\in\mathbb{R}$, sont tous dégénérés, ce qui implique que le critère de la matrice hessienne que l'on a vu en cours ne peut pas être appliqué. Par ailleurs, on voit bien que $f(x,y) = (2x+1-y)^2 \geq 0 = f(x_0,2x_0+1)$, pour tous $x,x_0,y\in\mathbb{R}$. Cela nous dit que $(x_0,2x_0+1)$ est un minimum global (donc *a fortiori* local) de f pour tout $x_0\in\mathbb{R}$.

(h) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(2(x-y+1), -2(x-y+1)\big),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. L'ensemble de points critiques de f est alors $\{(x,x+1) : x\in\mathbb{R}\}$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, les points critiques $(x,x+1)$, avec $x\in\mathbb{R}$, sont tous dégénérés, ce qui implique que le critère de la matrice hessienne que l'on a vu en cours ne peut pas être appliqué. Par ailleurs, on voit bien que $f(x,y) = (x-y+1)^2 \geq 0 = f(x_0,x_0+1)$, pour tous $x,x_0,y\in\mathbb{R}$. Cela nous dit que (x_0,x_0+1) est un minimum global (donc *a fortiori* local) de f pour tout $x_0\in\mathbb{R}$.

(i) C'est clair que f est de classe C^3, car f s'écrit comme une composition de fonctions de classe C^3. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(2xe^{1+x^2+y^2}, 2ye^{1+x^2+y^2}\big),$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Le seul point critique de f est alors $(0,0)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}\begin{pmatrix} 2+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 2+4y^2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(0,0)$ est un minimum local de f.

(j) C'est clair que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, car f s'écrit comme la composition de fonctions de classe C^3. Par ailleurs, on remarque dans ce cas que la fonction donnée n'est pas différentiable en $(0,0)$. On va donc étudier le comportement de f autour de l'origine avec d'autres méthodes. Par rapport aux points $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, c'est clair que

$$\nabla f(x,y) = \left(y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Les points critiques de f (dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) sont alors $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} y^2 & (x^2+y^2)^{3/2} - xy \\ (x^2+y^2)^{3/2} - xy & x^2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors

$$H_f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = H_f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ et $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ sont des points cols.

Par ailleurs, on affirme que $(0,0)$ est un minimum local de f. Pour le démontrer, on va utiliser que $\sqrt{x^2+y^2} + xy \geq 0$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|, |y| \leq 1$. En effet, comme $|x|, |y| \leq 1$, $x^2y^2 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$. Si l'on prend la racine carrée, on trouve que $|xy| \leq \sqrt{x^2+y^2}$, ce qui implique l'inégalité demandée. Cette inégalité nous dit que $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x|, |y| \leq 1$, *i.e.* $(0,0)$ est un minimum local de f.

(k) C'est clair que f est de classe C^3, car f s'écrit comme un produit de fonctions de classe C^3. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big((x^2+2x-2y^2)e^{x-y}, -(x^2+4y-2y^2)e^{x-y}\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sont alors $(0,0)$ et $(-4,-2)$. En effet, si l'on fait la somme des coordonnées dans $\nabla f(x,y) = (0,0)$ on trouve $2x - 4y = 0$, *i.e.* $x = 2y$. Si l'on remplace cette identité dans une coordonnée quelconque de $\nabla f(x,y) = (0,0)$, on trouve que les solutions sont $(0,0)$ et $(-4,-2)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = e^{x-y} \begin{pmatrix} x^2+4x-2y^2+2 & -x^2-2x+2y^2-4y \\ -x^2-2x+2y^2-4y & x^2+8y-2y^2-4 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } H_f(-4,-2) = e^2 \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(0,0)$ est un point-selle et $(-4,-2)$ est un maximum local de f.

(l) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(2(x-y^2), (4-5y)y^3 - 4xy\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le seul points critique f est alors $(0,0)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x+12y^2-20y^3 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, le point critique $(0,0)$ est dégénéré et l'on ne peut pas utiliser le critère de la matrice hessienne vu en cours pour déterminer la nature de $(0,0)$. Par ailleurs, dans ce cas on voit bien que $f(y^2, y) = -y^5$, qui est positif si $y < 0$ et négatif si $y > 0$. Comme $(0,0) \in \{(y^{2,y} : y \in \mathbb{R}\}$, on conclut que $(0,0)$ n'est pas un extremum de f.

(m) C'est clair que f est de classe C^3, car f est le quotient de fonctions de classe C^3 avec dénominateur non nul. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \Big(-\frac{2x}{1+x^2+y^2}, -\frac{2y}{1+x^2+y^2} \Big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le seul point critiques de f est alors $(0,0)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} 2(x^2-y^2-1) & 4xy \\ 4xy & (y^2-x^2-1) \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_f(0,0) = H_f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $(0,0)$ est un maximum local de f.

(n) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(2x-y+3, -x-2y+3\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le seul point critiques de f est alors $(-3/5, 9/5)$. Comme la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors $(-3/5, 9/5)$ est un point col.

(o) Dans ce cas on remarque que la fonction donnée n'est pas différentiable en $C = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$. On va donc étudier le comportement de f autour de ces points avec d'autres méthodes. Par contre, f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^2 \setminus C$, vu que f s'écrit comme la composition et division avec dénominateur non nul de fonctions de classe C^3. Par rapport aux points $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, c'est clair que

$$\nabla f(x,y) = \Big(-\frac{2e^{1/x^2y}}{x^3y}, -\frac{e^{1/x^2y}}{x^2y^2} \Big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$. L'ensemble de points critiques de f (dans $\mathbb{R}^2 \setminus C$) est alors vide.

Par ailleurs, on affirme que tout point de C est un minimum global (donc *a fortiori* local) de f. En effet, $f(x,0) = f(0,y) = 0 \leq f(x',y')$, pour tout $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$.

12. *Extrema II.* Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2.$$

(a) Montrer que $(0,0)$ est un point critique de f et calculer la matrice hessienne associée.

(b) Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Montrer que l'application $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g_v(t) = f(ta, tb)$ a un minimum en $t = 0$.

(c) Montrer que f n'admet pas un extremum en $(0,0)$.
Indication : considérer la courbe $\alpha(t) = (t, 3t^2/2)$.

Solution.

(a) C'est clair que f est de classe C^3, car f est un polynôme. On voit bien que

$$\nabla f(x,y) = \big(8x^3 - 6xy, 2y - 3x^2\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On voit bien que $(0,0)$ est un point critiques de f. En plus, la matrice hessienne est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 16x^2 - 6y & -6x \\ -6x & 2 \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, et en particulier

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) On voit bien que $g_v(t) = t^2(b^2 - 3a^2bt + 2a^4t^2)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $b = 0$, alors $g_v(t) = 2a^4t^4 \geq 0 = g_v(0)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $b \neq 0$, alors, comme $p(t) = b^2 - 3a^2bt + 2a^4t^2$ est un polynôme quadratique et $p(0) = b^2 > 0$, alors $p(t) \geq 0$ dans un intervalle autour de 0, ce qui implique que $g_v(t) \geq 0 = g_v(0)$ dans un intervalle autour de 0. En conséquence, g_v a un minimum en 0.

(c) Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par $\alpha(t) = (t, 3t^2/2)$. Noter que $\alpha(0) = (0,0)$. C'est clair que $f \circ \alpha(t) = -t^4/4$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $f \circ \alpha(t) < 0$, pour tout $t \neq 0$. Soit $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe donnée par $\beta(t) = (t,0)$. Noter que $\beta(0) = (0,0)$. C'est clair que $f \circ \beta(t) = 2t^4$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $f \circ \beta(t) > 0$, pour tout $t \neq 0$. En conséquence, $(0,0)$ n'est pas un extremum de f.

13. Est-ce qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f_{a,b}(x,y) = e^{y^4 - x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

ait un minimum local en $(2,1)$?

Solution. C'est clair que $f_{a,b}$ est de classe C^3, car elle s'écrit comme somme et composition de fonctions de classe C^3. On voit bien que

$$\nabla f_{a,b}(x,y) = \big(-2xe^{y^4-x^2} + a + b(y-1), 4y^3e^{y^4-x^2} - a + b(x-2)\big),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, $(2,1)$ est un point critique si et seulement si $a = 4e^{-3}$. Comme la matrice hessienne est

$$H_{f_{a,b}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{y^4-x^2}(2x^2-1) & b - 8xy^3e^{y^4-x^2} \\ b - 8xy^3e^{y^4-x^2} & 4y^2e^{y^4-x^2}(4y^4+3) \end{pmatrix},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$H_{f_{a,b}}(2,1) = \begin{pmatrix} 14e^{-3} & b - 16e^{-3} \\ b - 16e^{-3} & 28e^{-3} \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est $-b^2 + 32e^{-3}b + 136e^{-6}$. Comme le discriminant de ce polynôme quadratique est $e^{-6}(32^2 + 4.136) = e^{-6}.2^5.7^2 > 0$, l'ensemble $C = \{b \in \mathbb{R} : \det(H_{f_{a,b}}(2,1)) > 0\}$ est non vide. En effet, comme les racines de $\det(H_{f_{a,b}}(2,1)) = -b^2 + 32e^{-3}b + 136e^{-6}$ sont

$$b = 2(8 - 7\sqrt{2})e^{-3} \text{ et } b = 2(8 + 7\sqrt{2})e^{-3},$$

on voit bien que $C =]\,2(8-7\sqrt{2})e^{-3}, 2(8+7\sqrt{2})e^{-3}\,[\neq \emptyset$. En plus, comme

$$\frac{\partial^2 f_{a,b}}{\partial x^2}(2,1) = 14e^{-3} > 0,$$

on conclut que $f_{a,b}$ admet un minimum local en $(2,1)$ pour tout $(a,b) \in \{4e^{-3}\} \times C$. Par ailleurs, comme $\det(H_{f_{a,b}}(2,1)) < 0$, pour tout $b \in D = \mathbb{R} \setminus [2(8-7\sqrt{2})e^{-3}, 2(8+7\sqrt{2})e^{-3}]$, on conclut aussi que $(2,1)$ est un point-selle de $f_{a,b}$ pour tout $(a,b) \in \{4e^{-3}\} \times D$.

Par rapport aux points (a,b) avec $a = 4e^{-3}$ et $b = 2(8 \pm 7\sqrt{2})e^{-3}$, on peut démontrer qu'il s'agit de points cols aussi. Pour le démontrer, on considère la restriction de la fonction $f_{a,b}(x,y)$ à la droite $x = 2 \pm \sqrt{2}(y-1)$, *i.e.* on considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g(s) = f_{a,b}\big(2 \pm \sqrt{2}(s-1), s\big) = e^{-6\mp 4\sqrt{3}} e^{s^4 - 2s^2 + 4(1\pm\sqrt{2})s} + a\big(2 - s \mp \sqrt{2}(s-1)\big) \mp 2\sqrt{2}b(s-1)^2,$$

pour $s \in \mathbb{R}$. C'est clair que

$$g'(1) = 4e^{-3}(1 \pm \sqrt{2}) + a(-1 \mp \sqrt{2})$$

s'annule, vu que $a = 4e^{-3}$, et que

$$g''(1) = e^{-3}(56 \pm 32\sqrt{2}) \mp 2\sqrt{2}b$$

s'annule, vu que $b = 2(8 \pm 7\sqrt{2})e^{-3}$. Par ailleurs, on voit que

$$g'''(1) = e^{-3}(568 \pm 416\sqrt{2}) = 8e^{-3}(71 \pm 52\sqrt{2}) \neq 0.$$

On définit $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ via

$$h(s) = \frac{6}{g'''(1)} \frac{g(s) - g(1)}{(s-1)^3} - 1.$$

C'est clair que h est continue, car g est continue. En plus, comme g est de classe C^3, la limite

$$\lim_{s \to 1} h(s)$$

existe et vaut zéro, ce qui implique que l'application $\bar{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $\bar{h}(s) = h(s)$ si $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\bar{h}(1) = 0$ est une application continue. En particulier, il existe $\delta > 0$ tel que $|\bar{h}(s)| < 1/2$ si $|s-1| < \delta$. En conséquence, on conclut que $1 + \bar{h}(s) > 0$ si $|s-1| < \delta$ et

$$g(s) - g(1) = g'''(1)\frac{(s-1)^3}{6}\Big(1 + \bar{h}(s)\Big)$$

a le même signe que $g'''(1)$ si $1 < s < 1+\delta$ et le signe contraire de $g'''(1)$ si $1-\delta < s < 1$. Cela nous dit que 1 n'est pas un extremum de g, ce qui implique que $(2,1)$ n'est pas un extremum de $f_{a,b}$ pour $a = 4e^{-3}$ et $b = 2(8 \pm 7\sqrt{2})e^{-3}$.

14. *Divergence et rotationnel.* Soit $S \subseteq \mathbb{R}^2$ une partie ouverte. Un **champ de vecteurs** différentiable sur S est la donnée d'une fonction $V : S \to \mathbb{R}^2$ différentiable. On écrira $V(x,y) = (V_1(x,y), V_2(x,y))$, pour tout $(x,y) \in S$. La **divergence** et le **rotationnel** d'un champ V sont donnés par

$$\mathrm{div}(V)(x,y) = \frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\mathrm{rot}(V)(x,y) = \frac{\partial V_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial V_1}{\partial y}(x,y),$$

pour tout $(x,y) \in S$. On considère les champs de vecteurs (sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$, resp.) suivants :

(a) $V(x,y) = (x/\sqrt{x^2+y^2}, y/\sqrt{x^2+y^2})$ (**champ divergent**),

(b) $V(x,y) = (-y,x)$ (**tourbillon**),

(c) $V(x,y) = (1,\cos(x))$ (**transport parallèle**).

Calculer la divergence et le rotationnel des champs de vecteurs précédents. Dessiner les champs de vecteurs et interpréter les résultats.

Solution. On voit bien que

(a) $\mathrm{div}(V)(x,y) = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ et $\mathrm{rot}(V)(x,y) = 0$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

(b) $\mathrm{div}(V)(x,y) = 0$ et $\mathrm{rot}(V)(x,y) = 2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

(c) $\mathrm{div}(V)(x,y) = 0$ et $\mathrm{rot}(V)(x,y) = -\sin(x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.