TD 2 : Normes

Exercice 1 : Exemples et contre-exemples de normes
Parmi les applications $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessous, lesquelles sont des normes ?

$$N(x,y) = |x|^2 + |y| \qquad N(x,y) = \sup(|x|, |y|^3) \qquad N(x,y) = \sqrt{(25x^2 + 4y^2)}$$

$$N(x,y) = \max(x,y) \qquad N(x,y) = \min(|x|, |y|) \qquad N(x,y) = 5|x| + 2|y|$$

$$N(x,y) = |x+y| + 2|y| \qquad N(x,y) = \max(x^2, y^2) \qquad N(x,y) = |x|$$

Exercice 2 : Étude de la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$ - Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soit $n > 0$ un entier naturel. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on considère la quantité

$$\|x\|_2 = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2} \ .$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\| \cdot \|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. On considère pour cela le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$, défini par

$$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n,$$

pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$.

1. Vérifier que $\|u\|_2^2 = \langle u, u\rangle$ pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$.
2. Vérifier rapidement que le produit scalaire est linéaire par rapport à chacune de ses variables, symétrique et défini (c'est-à-dire que $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$).
3. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ fixés. En étudiant la fonction définie par
$$t \longrightarrow \langle x + ty, x + ty\rangle,$$
où t varie dans $\mathbb{R}$, montrer que $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|_2 \|y\|_2$. Que dire dans le cas où on a égalité ?
4. Déduire des questions précédentes que $\| \cdot \|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 : Normes et applications linéaires
Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. On suppose donnée une application linéaire inversible $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que l'application $N_\varphi(v) = N(\varphi(v))$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Décrire la boule unité de N_φ.
3. Application : montrer sans calcul que $N_\varphi(x,y) = \max(|x+y|, |x-y|)$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter sa boule unité.
4. Que pensez-vous de la boule unité de la question précédente ? Montrer que $\max(|x+y|, |x-y|) = |x| + |y|$.

Exercice 4 : Convexité de la boule unité
Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit B_N la boule unité ouverte de N.

1. Représenter B_N lorsque $n = 2$, dans les cas où N est $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
2. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Justifier que l'ensemble des vecteurs $tx + (1-t)y$, où $t \in [0,1]$ est le segment $[x, y]$. On pourra commencer par représenter la situation pour un cas particulier dans $\mathbb{R}^2$.
3. Démontrer que B_N est convexe, c'est-à-dire que pour tous a et b dans B_N, le segment qui les relie est inclu dans B_N.
4. Que se passe-t-il pour la boule unité fermée ?
5. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^2$ dont la boule unité aurait la forme d'un coeur ?

Exercice 5 : Comparaison de normes
Soient N_1 et N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et α un réel strictement positif. On note $\overline{B}_1$ et $\overline{B}_2$ les boules fermées pour N_1 et N_2. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\overline{B}_1(0,1) \subset \overline{B}_2(0,\alpha)$.
2. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, on a $N_2(x) \leqslant \alpha N_1(x)$.

Exercice 6 : Équivalence de normes
On considère $\mathbb{R}^2$ et les trois normes

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y| \qquad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|)\ .$$

On note $\overline{B}_i(O,R)$ la boule fermée de rayon R et de centre l'origine O pour la norme i.

1. Dessiner les boules $\overline{B}_\infty(O,1)$ et $\overline{B}_1(O,2)$.
2. A l'aide de l'exercice précédent, trouver la constante optimale $C_{1,\infty}$ telle que l'on ait $\|\cdot\|_1 \leqslant C_{1,\infty}\|\cdot\|_\infty$.
3. Trouver les autres constantes optimales d'équivalence de ces trois normes.

Exercice 7 : Pourquoi norme « infinie » ?
On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la norme ℓ^p, $p \in [1, +\infty[$ définie par

$$\|(x,y,z)\|_p = \big(|x|^p + |y|^p + |z|^p\big)^{1/p}\ .$$

Montrer que $\quad \|(x,y,z)\|_p \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} \max(|x|,|y|,|z|)$.