La homología de Hochschild-Mitchell de categorías lineales y su parecido con la homología de Hochschild de álgebras

Estanislao Herscovich Ramoneda

Tesis de Licenciatura en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

TEMA: Álgebra homológica.

ALUMNO: LU N°: 104/00.

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.

DIRECTOR DE TRABAJO: Dra. Andrea Solotar.

FECHA DE INICIACIÓN: Marzo de 2004.

FECHA DE FINALIZACIÓN: 28 de Marzo de 2005.

FECHA DE EXÁMEN: 28 de Marzo de 2005.

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor	Jurado
Director	Jurado
Profesor de Tesis de Licenciatura	Jurado

Índice

Capítulo 1

Introducción

En este trabajo nos propusimos investigar las categorías k-lineales como una herramienta para estudiar la (co)homología de Hochschild de un álgebra. Dada un álgebra A de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k y un grupo G, se puede construir lo que se llama el cubrimiento de Galois de A que resulta ser no ya un álgebra sino una categoría k-lineal. La teoría de categorías k-lineales fue estudiada por Mitchell en la década del 70 ([Mit2]), haciendo notar su parecido con las álgebras. De hecho, las técnicas de la (co)homología se pueden aplicar en el contexto de categorías de manera muy similar que para las álgebras. Se pueden asimismo realizar construcciones para categorías que generalizan las de álgebras: así se hizo para el producto semidirecto entre un álgebra y un grupo que actúa en ella por automorfismos.

A partir de esta situación, demostramos que existe una sucesión espectral de Grothendieck, análoga a la considerada por Stefan para álgebras de Hopf en [Ste], que calcula la homología del producto semidirecto con coeficientes en un módulo ([Ste], [Lor], [Gui], [Nis]). Como caso particular, esta sucesión espectral permite calcular la homología de un álgebra o una categoría a partir de la correspondiente homología de la categoría k-lineal que la cubre, lo que da una generalización de la sucesión espectral hallada por Cibils y Redondo ([C-R]).

Para lograr estos resultados fue necesario extender resultados conocidos para la teoría de módulos sobre un álgebra al caso de categorías: ése fue el caso de la invariancia de la homología de una categoría frente a equivalencias Morita. También desarrollamos un ejemplo particular en el cual estábamos particularmente interesados, y que extendía un resultado conocido para el caso de módulos sobre un álgebra: el módulo producto semidirecto para el que calculamos la (co)homología de Hochschild-Mitchell. A su vez, repasamos las definiciones elementales en el caso de categorías y estudiamos en detalle la homología y cohomología de Hochschild-Mitchell.

La tesis está organizada de la manera siguiente. En el capítulo 2 desarrollamos los resultados ya conocidos para la homología de Hochschild que luego extenderemos para el caso de la homología de Hochschild-Mitchell. Esto incluye la sucesión espectral de Grothendieck para el producto semidirecto entre un álgebra y un grupo, en la sección 2.1, tanto para el caso homológico como el cohomológico, y el desarrollo de un ejemplo, en la sección 2.2.

En el capítulo 3 encaramos ya el caso categórico. En la sección 3.1 presentamos las definiciones básicas de categorías lineales y homología de Hochschild-Mitchell que usamos durante este trabajo y algunos resultados básicos que demostramos en detalle, algunos de los cuales son ya conocidos y otros propios como la invariancia de la (co)homología de Hochschild-Mitchell frente a equivalencias Morita. En la sección 3.2 se presentan los resultados principales de este trabajo, es decir, las versiones categóricas de los las sucesiones espectrales convergentes de Grothendieck para el producto semidirecto entre una categoría y un grupo que actúa en ella.

Posteriormente, en la sección 3.3, presentamos algunas aplicaciones: el paralelo del ejemplo de la sección 2.2 para el caso categórico, y luego, calculamos la cohomología de Hochschild-Mitchell de árboles numerables, extendiendo un conocido resultado para la cohomología de Hochschild de árboles (algebraicos).

Los prerrequisitos son: conocimientos elementales de la teoría de categorías, de álgebra homológica, y más detallados sobre la (co)homología de Hochschild. También es útil el conocimiento de teoría de métodos diagrámaticos de representaciones.

Agradecimientos

En primer lugar, deseo notar que este trabajo se realizó bajo la beca Estímulo UBA 2004, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

A lo largo de esta tesis y antes también fui conociendo muchas personas a las que les estoy muy agradecido por diversos motivos. Deseo agradecer profundamente a mi directora Andrea Solotar por su guía y compañerismo durante el transcurso de esta tesis. También deseo agradecer muy especialmente a Marco Farinati porque durante el transcurso de mis estudios ha estado siempre dispuesto a responder cualquier duda, tanto de Matemática como de Física, por más exótica que parezca. Le agradezo porque aprendí que la física tiene una visión algebraica más que cualquier otra.

Por otro lado, deseo agradecer también a Mariano Suárez-Álvarez por muchísimos comentarios útiles, de esos típicos él que sabe remarcar en los momentos más propicios. A su vez, quiero agradecer a mi amiga Andrea Rey, por bancarme en todo momento y ayudarme desinteresadamente.

Deseo también agradecer a mi familia: mis viejos, y mis hermanos Agus y Nico; una familia de médicos, a la que no le quedó otra que aceptar un físico-matemático en su vientre, y a mi mejor amigo Jorge, por todo lo que aprendí y compartimos: realmente uno aprende más de quienes piensan más distinto que uno.

Finalmente, aunque no menos importante, deseo también agradecer a los amigos que conocí en esta facultad: Brenda, Ceci, Gastón, Tomás, Martín, Diego, Gabi, Mariana, Corina, Cati, Fede, ... (la lista es casi interminable), en su mayoría físicos, con los que compartí muchas clases, horas de estudio, laboratorios, debates, salidas, etc. y de quienes aprendí mucho.

Agradezco también a la Dra. María Julia Redondo y a la Dra. María Ofelia Ronco por haber aceptado formar parte del jurado.

Espero no olvidar a nadie que no merezca ser olvidado.

Capítulo 2

Homología de Hochschild

2.1 Teoremas principales

Comenzamos fijando las notaciones. Asumimos que k es un anillo conmutativo con unidad, y A una álgebra playa sobre k. A su vez, también suponemos que G es un grupo que actúa por automorfismos de k-álgebras sobre A. De manera inmediata, también actúa sobre el álgebra envolvente de A, que escribimos $A^e = A \otimes_k A^{op}$ (con la acción diagonal: $g.(a \otimes b) = g.a \otimes g.b$). Por otro lado, también suponemos que todos los productos tensoriales se toman sobre k, a menos que se diga otra cosa. Notamos que los $A \rtimes G$-A-bimódulos no son lo mismo que los $A^e \rtimes G$-módulos a izquierda, ya que los $A \rtimes G$-A-bimódulos cumplen que

$$\begin{aligned}((ag).(a'g')).(mb) &= (ag(a').gg').(mb) \\ &= (ag(a').(g.(g'.m))).b \\ &= ag(a').(gg'(m)).b,\end{aligned}$$

(i.e., $a.g(m.b) = a.(g(m)).b$), mientras que la acción de los $A^e \rtimes G$-módulos cumple

$$\begin{aligned}(a \otimes b).g.((a' \otimes b').g'.(m)) &= (a \otimes b).g.(a'.(g'.m).b') \\ &= a.(g(a').g(g'(m)).g(b')).b,\end{aligned}$$

(i.e., $g(a.m.b) = g(a).g(m).g(b)$). Si la acción de G en A^e fuera $g.(a \otimes b) = g(a) \otimes b$, entonces los $A^e \rtimes G$-módulos a izquierda y los $A \rtimes G$-A-bimódulos coincidirían.

Dados anillos A y B, vamos a denotar ${}_A\mathrm{Mod}$, Mod_B, ${}_A\mathrm{Mod}_B$ a la categoría de A-módulos a izquierda, B-módulos a derecha y A-B-bimódulos, respectivamente. Consideraremos siempre módulos a izquierda, a menos que se diga otra cosa.

Comenzaremos esta sección presentando las versiones homológica y cohomológica de una sucesión espectral de Grothendieck. El uso de esta sucesión es conocido, y en este trabajo seguiremos la demostración de Stefan (ver [Ste]). Estos teoremas luego nos servirán de base para calcular un ejemplo en el que estamos muy interasados: la (co)homología de Hochschild de los $A \rtimes G$-bimódulos de la forma $M \rtimes G$, que definiremos más adelante.

Observación 2.1.1. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo a izquierda M, vemos de manera inmediata que los grupos de homología $H_\bullet(A, M)$ y de cohomología $H^\bullet(A, M)$ son $k[G]$-módulos. Vamos a demostrarlo en detalle:*

Para el caso homológico sólo hay que definir una acción de G en $M \otimes A^{\otimes n}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, que sea compatible con los diferenciales. La accción es la evidente:

$$g.(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = g.m \otimes g(a_1) \otimes \cdots \otimes g(a_n).$$

Esta acción es tal que el complejo simplicial de Hochschild asociado a M:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M \otimes A^{\otimes(n+1)} \xrightarrow{d_{n+1}} M \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{d_n} \ldots,$$

con

$$\begin{aligned} d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &= m.a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i.a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^n a_n.m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, \end{aligned}$$

se vuelve un complejo de G-módulos (recordar que $g.(a.m) = g(a).g(m)$, y $g.(m.a) = g(m).g(a)$). De aquí se ve directamente de la definición que los grupos de homología son $k[G]$-módulos.

Para el caso cohomológico es análogo: dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo M, vemos de manera inmediata que los grupos de cohomología $H^\bullet(A, M)$ son $k[G]$-módulos. Definimos una acción de G en $\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La accción es la evidente:

$$(g.f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = g.(f(g^{-1}.a_1 \otimes \cdots \otimes g^{-1}.a_n)).$$

Esta acción es tal que el complejo cohomológico de Hochschild asociado a M:

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n}, M) \xrightarrow{d^n} \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes(n+1)}, M) \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots,$$

con

$$\begin{aligned} d^n(f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1}.a_i \otimes \cdots \otimes a_n) &+ (-1)^n f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}).a_n, \end{aligned}$$

se vuelve también un complejo de G-módulos, como se ve inmediatamente (recordar que $g.(a.m) = g(a).(g.m)$ y $g.(m.a) = (g.m).(g(a))$). De manera semajante al caso homológico, se ve directamente de la definición que los grupos de cohomología son $k[G]$-módulos.

A su vez, dado un $A \rtimes G$-bimódulo M, al considerar a M con la acción adjunta resulta un $A^e \rtimes G$-módulo, por lo que en este caso también tenemos que $H^\bullet(A, M)$ y $H_\bullet(A, M)$ son $k[G]$-módulos.

Teorema 2.1.2. *Dados un cuerpo k, una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A \rtimes G$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral homológica convergente*

$${}^I E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(A, M)) \Rightarrow H_{p+q}(A \rtimes G, M).$$

Demostración. Para demostrar este resultado, utilizamos la sucesión espectral de Grothendieck (ver [Wei], 5.8.3, pp.150-152). En otras palabras, tenemos tres funtores

$$\begin{gathered} D : {}_{A\rtimes G}\mathrm{Mod}_{A\rtimes G} \to {}_k\mathrm{Mod} \\ D(-) = (-)_{A\rtimes G}, \\ E : {}_{A\rtimes G}\mathrm{Mod}_{A\rtimes G} \to {}_G\mathrm{Mod} \\ E(-) = (-)_A, \\ F : {}_G\mathrm{Mod} \to {}_k\mathrm{Mod} \\ F(-) = (-)_G. \end{gathered}$$

Como se ve inmediatamente estos funtores son tales que los derivados a izquierda de E y F son $H_\bullet(A,-)$ y $H_\bullet(G,-)$ respectivamente (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303 y def 6.1.2, p. 161). Por otro lado, se ve fácilmente que $F \circ E = D$. Falta ver que el funtor E manda objetos proyectivos en objetos F-acíclicos. Para demostrarlo, hay que tener en cuenta que $(-)_A$ y $(-)_G$ preservan sumas directas (trivial), y por lo tanto basta probar que el funtor E manda el objeto libre $(A \rtimes G)^e$ en un objeto $k[G]$-playo. Es decir, vamos a probar que $(A \rtimes G)^e_A$ es $k[G]$-playo.

Para ver esto último, hay que notar que el siguiente morfismo

$$\psi : (A \rtimes G)^e_A \to k[G] \otimes (A \rtimes G),$$

es un isomorfismo $k[G]$-lineal, y donde la acción de G es siempre la acción adjunta. Vamos a bosquejar la demostración del isomorfismo anterior. El morfismo ψ está dado por

$$\overline{a'g' \otimes ag} \mapsto g' \otimes ag(a')g,$$

con inversa, que denotaremos ϕ, definida como

$$g' \otimes ag \mapsto \overline{g' \otimes ag}.$$

Veremos que la buena definición de estos morfismos es inmediata (tener en cuenta que dada una k-álgebra B, la acción de B en B^{op} está dada por la acción regular a la derecha de B en B). Para probar la buena definición del primero, definimos el morfismo

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : (A \rtimes G)^e &\to k[G] \otimes (A \rtimes G) \\ a'g' \otimes ag &\mapsto g' \otimes ag(a')g. \end{aligned}$$

Este morfismo anula el conjunto $\{b.a'.g' \otimes a.g - a'.g' \otimes a.g(b).g\}$, ya que

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(b.a'.g' \otimes a.g - a'.g' \otimes a.g(b).g) &= \tilde{\psi}(b.a'.g' \otimes a.g) - \tilde{\psi}(a'.g' \otimes a.g(b).g) \\ &= g' \otimes ag(b)g(a').g - g' \otimes ag(b)g(a').g = 0, \end{aligned}$$

por lo que al pasar este morfismo al cociente por

$$\langle \{b.a'.g' \otimes a.g - a'.g' \otimes a.g(b).g\} \rangle,$$

obtenemos ψ. La buena definición de ϕ es inmediata.

Por otro lado, ψ y ϕ son morfismos de $k[G]$-lineales, pues estamos considerando la acción adjunta. La $k[G]$-linealidad de ψ se ve directamente de

$$s.(\overline{a'g' \otimes ag}) = \overline{s(a')sg' \otimes ags^{-1}} \mapsto sg' \otimes a.g(a')gs^{-1} = s.(g' \otimes ag(a').g).$$

La linealidad de ϕ es también evidente.

Para concluir la demostración necesitamos un lema, que presentamos de manera separada, ya que tiene importancia propia.

Lema 2.1.3. *Dados un $k[G]$-módulo a derecha N, y un $k[G]$-módulo a izquierda V tenemos el siguiente isomorfismo de k-módulos*

$$N \otimes_{k[G]} (k[G] \otimes V) \simeq N \otimes V,$$

donde $k[G] \otimes V$ tiene la acción diagonal.

Demostración. Definimos los morfismos

$$\begin{aligned} f : N \otimes_{k[G]} (k[G] \otimes V) &\to N \otimes V \\ n \otimes g \otimes v &\mapsto n.g \otimes g^{-1}.v, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f' : N \otimes V &\to N \otimes_{k[G]} (k[G] \otimes V) \\ n \otimes v &\mapsto n \otimes 1_G \otimes v. \end{aligned}$$

Evidentemente los morfismos están bien definidos. Probaremos la buena definición del primero, ya que la del segundo es inmediata.

El morfismo siguiente

$$(n, g \otimes v) \mapsto (n.g \otimes g^{-1}.v),$$

está bien definido, es $k[G]$-bilineal y balanceado. Para demostrar esto último, vemos que

$$(n.s, g \otimes v) \mapsto (n.s.g \otimes g^{-1}.v)$$

y

$$(n, s.(g \otimes v)) \mapsto (n.s.g \otimes g^{-1}.s^{-1}.s.v)$$

que son evidentemente iguales.

Además, los morfismos son k-lineales e inversos, como se ve fácilmente:

$$n \otimes g \otimes v \mapsto n.g \otimes g^{-1}.v \mapsto n.g \otimes 1_G \otimes g^{-1}.v = n \otimes g \otimes v,$$
$$n \otimes v \mapsto n \otimes 1_G \otimes v \mapsto n \otimes v.$$

El lema queda demostrado.

□

Observación 2.1.4. *Existe también una versión a derecha del isomorfismo anterior*

$$(V \otimes k[G]) \otimes_{k[G]} N \simeq V \otimes N,$$

donde $V \otimes k[G]$ tiene la acción diagonal.

El lema anterior implica que el funtor $- \otimes_{k[G]} (k[G] \otimes A \rtimes G)$ es exacto, y por lo tanto $k[G] \otimes (A \rtimes G)$ es $k[G]$-playo.

El teorema está demostrado.

□

Tenemos ahora la versión cohomológica al teorema 2.1.2

Teorema 2.1.5. *Dados un cuerpo k, una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A \rtimes G$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral cohomológica convergente*

$${}^{I}E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(A, M)) \Rightarrow H^{p+q}(A \rtimes G, M).$$

Demostración. Para demostrar este resultado, utilizamos también la sucesión espectral de Grothendieck antes citada. En otras palabras, tenemos tres funtores

$$D : {}_{A\rtimes G}\mathrm{Mod}_{A\rtimes G} \to {}_k\mathrm{Mod}$$
$$D(-) = (-)^{A\rtimes G},$$
$$E : {}_{A\rtimes G}\mathrm{Mod}_{A\rtimes G} \to {}_G\mathrm{Mod}$$
$$E(-) = (-)^{A},$$
$$F : {}_{G}\mathrm{Mod} \to {}_k\mathrm{Mod}$$
$$F(-) = (-)^{G}.$$

Los funtores derivados a izquierda de E y F son $H^\bullet(A,-)$ y $H^\bullet(G,-)$ respectivamente (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303 y def 6.1.2, p. 161). Por otro lado, es claro que $F \circ E = D$. Falta ver que el funtor E manda objetos inyectivos en objetos F-acíclicos. Vamos a demostrarlo en detalle. Sea M un $A \rtimes G$-bimódulo inyectivo. Por un lado, existe un morfismo

$$i : M \to \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)$$
$$i(m)(b \otimes b') = b.m.b',$$

que es $(A \rtimes G)^e$-lineal e inyectivo, como se ve fácilmente (la estructura de $A \rtimes G$-módulo de $\mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)$ es la usual, i.e., $b.f(b') = f(b'.b)$ para $b, b' \in (A \rtimes G)^e$). Entonces, como M es inyectivo, existe un $A \rtimes G$-bimódulo N tal que

$$M \oplus N \simeq \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M).$$

Al aplicar $(-)^A$, resulta

$$M^A \oplus N^A \simeq \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A.$$

Por lo tanto, demostrar que M^A es F-acíclico es equivalente a demostrar que $\mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A$ es F-acíclico. Vamos a probar esto último, i.e., veremos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Ext}^n_{k[G]}(k, \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A) = 0.$$

Para ello, antes probaremos que existe un isomorfismo de $k[G]$-módulos

$$\mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A \simeq \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G) \otimes k[G], M),$$

que sale directo de la definición, ya que, dada $f \in \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)$, entonces $f \in \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A$ si y sólo si $f \in \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G) \otimes k[G], M)$, como se ve de

$$(a.f - f.a)(b \otimes b') = f(b.a \otimes b') - f(b \otimes a.b') = f(b.a \otimes b' - b \otimes a.b'),$$

para $b, b' \in A \rtimes G$, $a \in A$ (recordar que la acción de A^e en $(A \rtimes G)^e$ proviene de su acción regular, es decir, $a.(b \otimes b).a' = (a1_G \otimes a'1_G)(b \otimes b')$).

Para terminar la demostración, hay notar que, si $P_\bullet$ es una resolución proyectiva de k como $k[G]$-módulo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^n_{k[G]}(k, \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A) \\
&\simeq H^n(\mathrm{Hom}_{k[G]}(P_\bullet, \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G)^e, M)^A)) \\
&\simeq H^n(\mathrm{Hom}_{k[G]}(P_\bullet, \mathrm{Hom}_k((A \rtimes G) \otimes k[G], M))) \\
&\simeq H^n(\mathrm{Hom}_k((A \rtimes G) \otimes k[G] \otimes_{k[G]} P_\bullet, M)) \\
&\simeq H^n(\mathrm{Hom}_k((A \rtimes G) \otimes P_\bullet, M)) \simeq 0,
\end{aligned}$$

donde empleamos el lema 2.1.3 y el último isomorfismo se debe a que $P_\bullet$ es un complejo exacto y k un cuerpo. El teorema está demostrado.

$\square$

2.2 Ejemplo fundamental

Una vez recordados los teoremas fundamentales, empezaremos a desarrollar las bases para el cálculo de nuestro ejemplo principal.

Definición 2.2.1. *Dado un $A^e \rtimes G$-módulo a izquierda M, definimos $M \rtimes G$ como el conjunto formado por los elementos de la forma*

$$\sum_{s\in G} m_s.s,$$

donde m_s está en M y s en G, y la suma es de soporte finito. Se ve trivialmente que $M \rtimes G$ posee una estructura de $A \rtimes G$-bimódulo dada por

$$\begin{aligned}(m.s).(a.g) &= (m.s(a)).(s.g),\\ (a.g).(m.s) &= (a.g(m)).(g.s).\end{aligned}$$

(la compatibilidad de las acciones es consecuencia de que M sea un $A^e \rtimes G$-módulo, y en general no se cumple para el caso de un $A \rtimes G$-A-bimódulo). Pero también posee una acción de $A^e \rtimes G$ a izquierda y otra a derecha dadas por

$$\begin{aligned}(a.g).(m.s) &= (a.g(m)).(g.s.g^{-1}),\\ (m.s).(a.g) &= (g^{-1}(m).g^{-1}(s(a))).(g^{-1}.s.g),\end{aligned}$$

que son las acciones adjunta a izquierda y a derecha, respectivamente, de la acción anterior. Notar que estas acciones no dan una estructura de G-bimódulo (i.e. $k[G]$-bimódulo) a $M \rtimes G$.

Por otro lado, dado $g \in G$, si $\mathcal{Z}(g)$ denota al centralizador de g en G, definimos

$$M.g = \{m.g \in M \rtimes G : m \in M\},$$

que no es un G-módulo, sino un $\mathcal{Z}(g)$-módulo con la acción inducida por la acción adjunta en $M \rtimes G$, pues como se ve, si $s \in \mathcal{Z}(g)$

$$(a.s) \cdot (m.g) = (a.s(m)) \cdot (s.g.s^{-1}) = (a.s(m)) \cdot g.$$

Finalmente, si $\langle g\rangle$ denota la clase de conjugación de g en el grupo G, definimos

$$M_{\langle g\rangle} = \bigoplus_{s\in\langle g\rangle} M.s,$$

que es un G-módulo con la acción inducida por la acción adjunta en $M \rtimes G$.

Notación 2.2.2. *Denotamos $\langle G\rangle$ al conjunto de las clases de conjugación de G.*

A partir de ahora, excepto que se diga otra cosa, vamos a suponer que para el resto de esta sección $M \rtimes G$ tiene la acción adjunta.

Proposición 2.2.3. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo M, existe un isomorfismo de $k[G]$-módulos*

$$\begin{aligned} M \rtimes G/[M \rtimes G, A] &\longrightarrow \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} M_{\langle g\rangle}/[M_{\langle g\rangle}, A]\\ \overline{m.g}^{[M\rtimes G,A]} &\longmapsto \overline{m.g}^{[M_{\langle g\rangle},A]},\end{aligned}$$

donde $[M \rtimes G, A]$ denota al k-módulo generado por el conjunto de los conmutadores $\{am.g - mg(a).g : a \in A, m \in M, g \in G\}$, y $[M_{\langle g\rangle}, A]$ denota al k-módulo generado por el conjunto de los conmutadores $\{am.s - ms(a).s : a \in A, m \in M, s \in \langle g\rangle\}$.

Demostración. Por un lado, hay que notar que el submódulo $[M \rtimes G, A]$ está definido como el k-módulo generado por los conmutadores, pero al ser

$$a\overline{(m.g)} - \overline{(m.g)}a = \overline{(am).g} - \overline{(m.g(a)).g},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} & s.\overline{(a(m.g) - (m.g)a)} \\ &= s.(\overline{(am).g} - \overline{(m.g(a)).g}) \\ &= \overline{s(a)s(m).sgs^{-1}} - \overline{s(m)s(g(a)).sgs^{-1}} \\ &= s(a).\overline{s(m).sgs^{-1}} - \overline{s(m).sgs^{-1}}.s(a), \end{aligned}$$

que también está en $[M \rtimes G, A]$, con lo que $[M \rtimes G, A]$ es también un $k[G]$-módulo, o sea, es el $k[G]$-módulo generado por los conmutadores. El mismo resultado vale para $[M_{\langle g\rangle}, A]$.

Sea ahora el morfismo

$$\begin{aligned} \psi : M \rtimes G &\to \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} M_{\langle g\rangle}/[M_{\langle g\rangle}, A] \\ m.g &\mapsto \overline{m.g}^{[M_{\langle g\rangle},A]}. \end{aligned}$$

Este morfismo es $A^e \rtimes G$-lineal, pues

$$\begin{aligned} \psi((a.s).(m.g)) &= \psi((a.s(m))(s.g.s^{-1})) \\ = \overline{(a.s(m))(s.g.s^{-1})} &= (a.s) \cdot \overline{m.g} = (a.s)\psi(m.g). \end{aligned}$$

También es claramente suryectivo, y su núcleo es $[M \rtimes G, A]$, ya que

$$[M \rtimes G, A] = \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} [M_{\langle g\rangle}, A]$$

(suma directa interna como $k[G]$-módulos). Esto concluye la demostración.

□

Dado un A-bimódulo M, notaremos M^A al conjunto formado por los elementos invariantes por la acción adjunta de A, es decir, $M^A = \{m \in M : a.m = m.a, \forall a \in A\}$, que es un k-módulo trivialmente. Teniendo esto en cuenta, formulamos la siguiente proposición, que es un enunciado "dual" a la proposición 2.2.3.

Proposición 2.2.4. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo a izquierda M, existe un isomorfismo de $k[G]$-módulos a izquierda*

$$(M \rtimes G)^A \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} (M_{\langle g\rangle})^A.$$

Demostración. Por un lado, hay que notar que la condición de invariancia preserva sumas directas, i.e., $\sum_{g\in S\subset G} m_g.g \in (\bigoplus_{g\in S} M.g)^A$ sii $m_g.g \in (Mg)^A, \forall g \in S$. Por otro lado, los conjuntos de A-invariantes considerados, i.e., $(M \rtimes G)^A$ y $(M_{\langle g\rangle})^A$, son $k[G]$-módulos. Para probar esto, supongamos que N es un $A^e \rtimes G$-módulo a izquierda cualquiera, y sea $m \in N^A$. Entonces tenemos que

$$a.m = m.a, \forall a \in A.$$

Esta igualdad implica que

$$g(a).g(m) = g(m).g(a), \forall a \in A.$$

Si elegimos $a = g^{-1}(b)$, entonces obtenemos

$$b.g(m) = g(m).b, \forall b \in A,$$

o sea, $g(m) \in N^A$. Para los casos particulares $N = M \rtimes G$ o $N = M_{\langle g \rangle}$, obtenemos que tanto $(M \rtimes G)^A$ como $(M_{\langle g \rangle})^A$ son $k[G]$-módulos a izquierda.

El isomorfismo ahora es inmediato, ya que sólo es una descomposición como suma directa interna de $k[G]$-módulos.

□

Proposición 2.2.5. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo M, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$f : M_{\langle g \rangle}/[M_{\langle g \rangle}, A] \xrightarrow{\sim} k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M.g/[M.g, A]$$
$$(\overline{m.s}) \mapsto t \otimes \overline{t^{-1}(m).g},$$

donde t cumple que $s = t.g.t^{-1}$. La estructura de $k[G]$-módulo de

$$k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M.g/[M.g, A]$$

es la dada por $k[G]$, es decir, es el $k[G]$-módulo inducido.

Demostración. El morfismo de $k[G]$-módulos $m.s \mapsto t \otimes \overline{t^{-1}(m).g}$, que denotaremos $\tilde{f}$, está bien definido, pues si $s = t.g.t^{-1} = u.g.u^{-1}$, resulta que $u^{-1}.t \in \mathcal{Z}(g)$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} t \otimes \overline{t^{-1}(m).g} = u.u^{-1}.t \otimes \overline{t^{-1}(m).g} &= u \otimes \overline{u^{-1}.t.t^{-1}(m).((u^{-1}.t).g.(u^{-1}.t)^{-1})} \\ &= u \otimes \overline{u^{-1}(m).g}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede ver que $a(m.s) - (m.s)a \in \operatorname{Ker}(\tilde{f})$, pues

$$(am).s - ms(a).s \mapsto t \otimes \overline{t^{-1}(am).g - t^{-1}(ms(a)).g} = 0,$$

donde la última igualdad vale ya que $t^{-1}(am).g - t^{-1}(ms(a)).g \in [M.g, A]$. Al pasar esta flecha al cociente, se obtiene f.

A su vez, definimos

$$j : k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M.g/[M.g, A] \to M_{\langle g \rangle}/[M_{\langle g \rangle}, A]$$
$$\sum_{t \in G} n_t t \otimes \overline{m_t.g} \mapsto \sum_{t \in G} \overline{n_t t(m_t).t.g.t^{-1}},$$

donde g y t pertenecen a G, m_t está en M y n_t pertence a k.

Este morfismo está bien definido y es $k[G]$-lineal. La linealidad sobre $k[G]$ sale directamente de la definición. Por otro lado, para probar que está bien definido es suficiente ver que la flecha $(ns, \overline{m.g}) \mapsto \overline{ns(m).s.g.s^{-1}}$ está bien definida, es bilineal y $k[\mathcal{Z}(g)]$-balanceada. Para demostrar la buena definición, basta probar que al aplicar la flecha anterior a $(ns, \overline{(am).g} - \overline{(mg(a)).g})$ obtenemos el elemento nulo. Para demostrar esto último, hay que notar que, por un lado

$$(ns, \overline{(am).g} - \overline{(mg(a)).g}) \mapsto \overline{ns(am).s.g.s^{-1} - ns(mg(a)).s.g.s^{-1}},$$

y por otro

$$\begin{aligned}
&\overline{ns(am).s.g.s^{-1} - ns(mg(a)).s.g.s^{-1}}\\
=\ &\overline{ns(a)s(m).s.g.s^{-1} - ns(m)s(g(a)).s.g.s^{-1}}\\
=\ &\overline{(ns(a)s(m) - ns(m)s(g(a))).s.g.s^{-1}} = 0.
\end{aligned}$$

La última igualdad vale, ya que si tomamos $g' = s.g.s^{-1}$, $m' = s(m)$, y $a' = ns(a)$, el último miembro tiene la forma $\overline{a'm'.g' - m'g'(a).g'}$, y como $a'm'.g' - m'g'(a).g'$ está en $[M_{\langle g\rangle}, A]$, luego su clase es la nula.

El morfismo es trivialmente bilineal, y es $k[\mathcal{Z}(g)]$-balanceado porque si $t \in \mathcal{Z}(g)$, las imágenes de

$$(n(s.t), \overline{m.g}) \mapsto \overline{n(s.t)(m).(s.t).g.(s.t)^{-1}}$$

y

$$(ns, t\overline{m.g}) \mapsto \overline{ns(t(m)).s.(t.g.t^{-1}).s^{-1}}$$

son evidentemente iguales.

Finalmente, el morfismo j es el inverso de f, pues

$$\overline{m.s} \mapsto t \otimes t^{-1}(\overline{m.g}) \mapsto \overline{m.t.g.t^{-1}} = \overline{m.s}$$

y

$$\sum_{t\in G} n_t t \otimes \overline{m_t.g} \mapsto \sum_{t\in G} \overline{n_t t(m_t).t.g.t^{-1}} \mapsto \sum_{t\in G} n_t t \otimes \overline{m_t.g}.$$

La naturalidad del morfismo es evidente. Esto concluye la demostración.

□

A su vez, tenemos también las versiones cohomológicas de la proposición 2.2.5:

Proposición 2.2.6. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, un $A^e \rtimes G$-módulo M, un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, y un conjunto $\{s_i : i = 1, \ldots, n\}$ de representantes de $\mathcal{Z}(g)\backslash G$, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$\begin{aligned}
\phi : (M_{\langle g\rangle})^A &\xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^A)\\
m.s &\mapsto f,
\end{aligned}$$

donde f es la extensión $\mathcal{Z}(g)$-lineal de $\sum_{i=1}^n k_i s_i \mapsto k_{i_0} s_{i_0}(m).g$, si $s = s_{i_0}^{-1}.g.s_{i_0}$ La estructura de $k[G]$-módulo de $\operatorname{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^A)$ es la dada por $k[G]$, es decir, es el $k[G]$-módulo coinducido.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $s = s_1^{-1}.g.s_1$. El morfismo ϕ es $k[G]$-lineal. Vamos a demostrarlo en detalle.

Por un lado, si $t.s.t^{-1} = t.s_1^{-1}.g.s_1.t^{-1} = s_{i_0}^{-1}.g.s_{i_0}$, entonces $\overline{s_{i_0}.t} = \overline{s_1}$, es decir, existe $z \in \mathcal{Z}(g)$ que cumple que $s_{i_0}.t = z.s_1$, y por lo tanto resulta

$$\begin{aligned}\phi(t.(m.s))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i) &= \phi(t(m).t.s.t^{-1})(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i)\\ &= k_{i_0} s_{i_0}(t(m)).g = k_{i_0} z(s_1(m)).g.\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}t.(\phi(m.s))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i) &= \phi(m.s)((\sum_{i=1}^{n} k_i s_i).t)\\ = \phi(m.s)(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i.t) &= k_{j_0} z'(s_1(m)).g,\end{aligned}$$

donde j_0 es el único índice tal que $s_{j_0}.t = z'.s_1$, con $z' \in \mathcal{Z}(g)$ (es decir, $\overline{s_{j_0}.t} = \overline{s_1}$). Pero por lo dicho arriba $\overline{s_{i_0}.t} = \overline{s_1}$, es decir, $s_{i_0}.t = z.s_1$, y por lo tanto $j_0 = i_0$ y $z' = z$. Entonces resulta que

$$\phi(t.(m.s))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i) = t.(\phi(m.s))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i),$$

o sea,

$$\phi(t.(m.s)) = t.(\phi(m.s)),$$

por lo que ϕ es $k[G]$-lineal.

A su vez, el morfismo ϕ tiene inversa dada por el morfismo siguiente

$$\begin{aligned}\psi : \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^A) &\xrightarrow{\sim} (M_{\langle g\rangle})^A\\ f &\mapsto \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.f(s_i).\end{aligned}$$

La buena definición es inmediata. A su vez, la $k[G]$-linealidad también, ya que

$$\begin{aligned}\psi(t.f) &= \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.(t.f)(s_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.f(s_i.t) = \sum_{i=1}^{n} t.t^{-1}.s_i^{-1}.f(z_i s_{\sigma(i)})\\ &= \sum_{i=1}^{n} t.(s_i.t)^{-1}.z_i.f(s_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{n} t.s_{\sigma(i)}^{-1} z_i^{-1}.z_i.f(s_{\sigma(i)})\\ &= t.\sum_{i=1}^{n} s_{\sigma(i)}^{-1}.f(s_{\sigma(i)}) = t.\psi(f)\end{aligned}$$

donde σ es la permutación generada al multiplicar por t los representantes de las coclases a derecha.

Los morfismos ϕ y ψ son inversos, como se ve de las siguientes cadenas de igualdades

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi(\sum_{i=1}^{n} m_i s_i^{-1}.g.s_i) &= \psi(\sum_{i=1}^{n} \phi(m_i s_i^{-1}.g.s_i)) \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi(\phi(m_i s_i^{-1}.g.s_i)) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}.\phi(m_i s_i^{-1}.g.s_i)(s_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.(s_i(m_i).g) &= \sum_{i=1}^{n} m_i s_i^{-1}.g.s_i\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(\phi \circ \psi(f))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) &= \phi(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.f(s_i))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} \phi(s_i^{-1}.f(s_i))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) &= \sum_{i=1}^{n} \phi(s_i^{-1}.(s_i(m_i).g))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} \phi(m_i.s_i^{-1}.g.s_i)(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) &= \sum_{i=1}^{n} k_i.s_i(m_i).g \\ = \sum_{i=1}^{n} k_i.f(s_i) &= f(\sum_{i=1}^{n} k_i.s_i),\end{aligned}$$

donde se escribió $f(s_i) = s_i(m_i).g$.

La naturalidad del morfismo es inmediata de la definición. Esto concluye la demostración.

□

Observación 2.2.7. *La proposición anterior no es válida para el caso de que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ no sea finito, porque en ese caso tenemos que*

$$(M_{\langle g\rangle})^A \simeq \bigoplus_{s\in\langle g\rangle} (M.s)^A,$$

que no es isomorfo a

$$\mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^A) \simeq \prod_{\mathcal{Z}(g)\backslash G} (k[\mathcal{Z}(g)], (M.g)^A)$$

evidentemente, ya que no son isomorfos como k-espacios vectoriales.

A partir de la proposición 2.2.5, vemos que existe un isomorfismo natural

$$H_0(A, M_{\langle g\rangle}) \simeq k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_0(A, M.g).$$

Vamos a probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ hay un isomorfismo natural entre $H_n(A, M_{\langle g\rangle})$ y $k[G]\otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_n(A, M.g)$.

Para eso, primero definimos la siguiente colección de funtores ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$F_n : {}_{A^e\rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_{G}\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores

$$M \mapsto M_{\langle g\rangle} \mapsto H_n(A, M_{\langle g\rangle}),$$

donde $M_{\langle g\rangle} \in {}_{A^e \rtimes G}\mathrm{Mod}$, y

$$E_n : {}_{A^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores

$$M \mapsto M.g \mapsto H_n(A, M.g) \mapsto k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_n(A, M.g),$$

donde $M.g \in {}_{A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ y $H_n(A, M.g) \in {}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ (ver observación 2.1.1).

Por la última proposición, existe un isomorfimo natural en grado 0 entre $F_\bullet$ y $E_\bullet$. Vamos a demostrar que $F_\bullet$ y $E_\bullet$ son δ-funtores universales. Si eso pasa, como existe un isomorfismo natural en grado cero, luego existe un único isomorfismo en cada grado (ver [Wei], sección 2.1, p. 32).

Veamos que son δ-funtores:

Para $E_\bullet$ hay que tener en cuenta que $M \mapsto M.g$ es un funtor exacto (esto es trivial), preserva sumas directas y objetos proyectivos. Para demostrar esto último, sólo hay que notar que el funtor preserva objetos libres, pues, dado $H \leq G$, tenemos el isomorfismo de $A^e \rtimes H$-módulos dado por la descomposición

$$(A^e \rtimes G) \simeq \bigoplus_{\overline{x} \in H\backslash G} (A^e \rtimes Hx) \simeq \bigoplus_{\overline{x} \in H\backslash G} (A^e \rtimes H)$$
$$a_s.s \mapsto a_s.tx \mapsto a_s.t,$$

donde, $a_s \in A^e$, $t \in H$ es tal que $t.x = s$ y fijamos representantes $x \in \overline{x}$. En lugar de A^e, el isomorfismo anterior es válido para cualquier anillo B en el que G actúe, pero el isomorfismo anterior sólo vale para coclases a derecha como vemos de ($b \in A^e$, $u \in H$)

$$(b.u).(a_s.s) = (b.u).(a_s.t.x) = b.u(a_s).u.t.x.$$

Al aplicar el funtor $(-).g$, para $H = \mathcal{Z}(g)$, obtenemos que

$$(A^e \rtimes G).g \simeq \bigoplus_{\overline{x} \in \mathcal{Z}(g)\backslash G} (A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)).g,$$

por preservar sumas directas, luego preserva objetos proyectivos. A su vez, $M \mapsto H_\bullet(A, M)$ es un δ-funtor (visto como funtor de ${}_{A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ en ${}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$, ver la observación 2.2.9) y $M \mapsto k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M$ es un funtor exacto, con lo que al componerlos se obtiene $H_\bullet(A, -)^{(\mathcal{Z}(g)\backslash G)}$, que es un δ-funtor. Al realizar la composición de los tres, $E_\bullet$ resulta un δ-funtor.

Para $F_\bullet$ hay que notar que $M \mapsto M_{\langle g\rangle}$ es un funtor exacto que preserva objetos proyectivos. Esto último vale ya que $(A^e \rtimes G).s$ es $A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-libre, para todo $s \in G$, con lo que es $(A^e \rtimes G)_{\langle g\rangle}$ es $A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-libre, y por lo tanto $A^e \rtimes G$-proyectivo, pues $A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$ es sumando directo de $A^e \rtimes G$. Nuevamente $H_\bullet(A, -)$ es un δ-funtor de $\mathrm{Mod}_{A^e \rtimes G}$ en Mod_G (ver la observación 2.2.9), con lo que al componerlo con el funtor anterior, $F_\bullet$ resulta un δ-funtor.

Ahora vamos a ver que los dos son δ-funtores universales. Para probarlo, vamos a emplear que $H_\bullet(A, -)$ es lo mismo que $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(-, A)$ (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303). Este último es un δ-funtor coborrable -coeffaceable- de ${}_{A^e \rtimes H}\mathrm{Mod}$ en ${}_H\mathrm{Mod}$, para cualquier grupo H que actúe en A

por morfismos de k-álgebras, (en particular para $H = G$ o $H = \mathcal{Z}(g)$, ver la observación 2.2.9), y es por lo tanto universal (ver [Wei], secciones 2.1 y 2.4, Exercise 2.4.5, pp. 30-32,49).

Vamos a ver que tanto $F_\bullet$ como $E_\bullet$ son coborrables, y por lo tanto universales. Para el caso de $F_\bullet$, hay que notar que $(-)_{\langle g\rangle}$ es un funtor exacto y preserva proyectivos y $H_\bullet(A,-)$ es un δ-funtor coborrable. Entonces al componerlos, resulta que $H_\bullet(A,(-)_{\langle g\rangle}) = F_\bullet$ es coborrable, y luego universal.

Para el segundo, el razonamiento es análogo. Como $E_\bullet$ es la composición del funtor $(-).g$, que es exacto y preserva proyectivos, con $k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(A,-)$, que es $H_\bullet(A,-)^{(\mathcal{Z}(g)\backslash G)}$ (por lo que es coborrable), $E_\bullet$ resulta un δ-funtor coborrable.

Así hemos obtenido que:

Teorema 2.2.8. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo M, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$H_\bullet(A, M_{\langle g\rangle}) \simeq k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(A, M.g).$$

Observación 2.2.9. *Para ver que $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(-,A)$ es un δ-funtor universal coborrable de ${}_{A^e\rtimes H}\mathrm{Mod}$ en ${}_H\mathrm{Mod}$, para cualquier grupo H que actúa en A por morfismos de k-álgebras, basta ver que los objetos $A^e \rtimes H$-proyectivos son A^e-proyectivos, pues entonces $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(-,A)$ se anula en los objetos $A^e \rtimes H$-proyectivos. Para ver que un objeto $A^e \rtimes H$-proyectivo es A^e-proyectivo, se hace lo siguiente: $A^e \rtimes H$ es A^e-proyectivo (porque es A^e-libre), y luego los sumandos directos de sumas directas de $A^e \rtimes H$ (i.e. los objetos $A^e \rtimes H$-proyectivos) son sumandos directos de sumas directas de un objeto A^e-libre, luego A^e-proyectivos.*

Usando el teorema 2.2.8 y la proposición 2.2.3, obtenemos el primer resultado principal de esta sección:

Teorema 2.2.10. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo a izquierda M, existe una cadena de isomorfismos $k[G]$-lineales naturales en M*

$$H_\bullet(A, M \rtimes G) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H_\bullet(A, M_{\langle g\rangle}) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(A, M.g).$$

Como una aplicación del teorema 2.2.10, tenemos el siguiente corolario

Corolario 2.2.11. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo a izquierda M, tenemos el siguiente isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$*

$$H_n(G, H_m(A, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H_n(\mathcal{Z}(g), H_m(A, M.g)).$$

Demostración. La demostración es inmediata del teorema 2.2.10 y el lema de Shapiro (ver [Wei], lema 6.3.2, pp.171-172)

$$\begin{aligned}
H_n(G, H_m(A, M \rtimes G)) &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H_n(G, H_m(A, M_{\langle g\rangle})) \\
&\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H_n(G, k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_m(A, M.g)) \\
&\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H_n(\mathcal{Z}(g), H_m(A, M.g)).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

□

De la misma manera que para el caso homológico, obtenemos los resultados duales a los teoremas 2.2.8 y 2.2.10:

Teorema 2.2.12. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, un $A^e \rtimes G$-módulo M, y un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$H^\bullet(A, M_{\langle g\rangle}) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^\bullet(A, M.g)).$$

Demostración. A partir de la proposición 2.2.6, vemos que existe un isomorfismo natural

$$H^0(A, M_{\langle g\rangle}) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^0(A, M.g)).$$

Vamos a probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ hay un isomorfismo natural entre $H^n(A, M_{\langle g\rangle})$ y $\mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^n(A, M.g))$.

Para eso, primero definimos la siguiente colección de funtores ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$F^n : {}_{A^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores

$$M \mapsto M_{\langle g\rangle} \mapsto H^n(A, M_{\langle g\rangle}),$$

donde $M_{\langle g\rangle} \in {}_{A^e \rtimes G}\mathrm{Mod}$, y

$$E^n : {}_{A^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores siguientes:

$$M \mapsto M.g \mapsto H^n(A, M.g) \mapsto \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^n(A, M.g)),$$

donde $M.g \in {}_{A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ y $H^n(A, M.g) \in {}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$.

Por la última proposición, existe un isomorfimo natural en grado 0 entre $F^\bullet$ y $E^\bullet$. Vamos a demostrar que $F^\bullet$ y $E^\bullet$ son δ-funtores universales. Si eso pasa, como existe un isomorfismo natural en grado cero, luego existe un único isomorfismo en cada grado (ver [Wei], sección 2.1, p. 32).

Veamos que son δ-funtores:

Para $E^\bullet$ hay que tener en cuenta que $M \mapsto M.g$ es un funtor exacto (trivial), preserva productos y objetos inyectivos. Para demostrar esto último, sólo hay que notar que este funtor transforma al cogenerador inyectivo $\mathrm{Hom}_k(A \rtimes G, C)$ (C es un cogenerador inyectivo en la categoría de k-módulos) en otro inyectivo, pues

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_k(A \rtimes G, C).g &\simeq \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{\mathcal{Z}(g)\backslash G} A \rtimes \mathcal{Z}(g), C).g \\ &\simeq \prod_{\mathcal{Z}(g)\backslash G} \mathrm{Hom}_k(A \rtimes \mathcal{Z}(g), C).g\end{aligned}$$

es inyectivo, y como preserva productos, luego preserva objetos inyectivos (usamos el isomorfismo $A \rtimes G \simeq \bigoplus_{\mathcal{Z}(g)\backslash G} A \rtimes \mathcal{Z}(g)$ de la demostración del teorema 2.2.8). A su vez,

$$M \mapsto H^\bullet(A, M)$$

es un δ-funtor (visto como funtor de ${}_{A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ en ${}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$, ver la observación 2.2.13) y $M \mapsto \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], M)$ es un funtor exacto, con lo que al componerlos se obtiene $H^\bullet(A, -)^{\mathcal{Z}(g)\backslash G}$, que es un δ-funtor. Al realizar la composición de los tres, $E^\bullet$ resulta un δ-funtor.

Para $F^\bullet$ hay que notar que $M \mapsto M_{\langle g \rangle}$ es un funtor exacto que preserva objetos inyectivos. Esto último vale ya que $(\mathrm{Hom}_k(A^e \rtimes G, C))_{\langle g \rangle}$ es un módulo $A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-inyectivo, porque $\langle g \rangle \simeq \mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito. Como $A^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$ es sumando directo de $A^e \rtimes G$, es decir, $\mathrm{Hom}_k(A^e \rtimes \mathcal{Z}(g), C)$ es sumando directo de $\mathrm{Hom}_k(A^e \rtimes G, C)$, resulta que $(\mathrm{Hom}_k(A^e \rtimes G, C))_{\langle g \rangle}$ es $A^e \rtimes G$-inyectivo. Nuevamente $H^\bullet(A, -)$ es un δ-funtor de ${}_{A \rtimes G}\mathrm{Mod}_A$ en ${}_G\mathrm{Mod}$ (ver la observación 2.2.13), por lo que al componerlo con el funtor anterior, $F^\bullet$ resulta un δ-funtor.

Ahora vamos a ver que los dos son δ-funtores universales. Para probarlo, vamos a emplear que $H^\bullet(A, -)$ es lo mismo que $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, -)$ (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303). Este último es un δ-funtor borrable -effaceable- de ${}_{A \rtimes H}\mathrm{Mod}_A$ en ${}_H\mathrm{Mod}$, para cualquier grupo H que actúe en A por morfismos de k-álgebras, (en particular para $H = G$ o $H = \mathcal{Z}(g)$, ver la observación 2.2.13), y es por lo tanto universal (ver [Wei], secciones 2.1 y 2.4, Exercise 2.4.5, pp. 30-32,49).

Vamos a ver que tanto $F^\bullet$ como $E^\bullet$ son borrables, y por lo tanto universales. Para el caso de $F^\bullet$, hay que notar que $(-)_{\langle g \rangle}$ es un funtor exacto y preserva inyectivos y $H^\bullet(A, -)$ es un δ-funtor borrable. Entonces al componerlos, resulta que $H^\bullet(A, (-)_{\langle g \rangle}) = F^\bullet$ es borrable, y luego universal.

Para el segundo, el razonamiento es análogo. Como $E^\bullet$ es la composición del funtor $(-).g$, que es exacto y preserva inyectivos, con

$$\mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H_\bullet(A, -)),$$

que es $H^\bullet(A, -)^{\mathcal{Z}(g)\backslash G}$ (por lo que es borrable), $E^\bullet$ resulta un δ-funtor borrable.

$\square$

Observación 2.2.13. *Para ver que $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, -)$ es un δ-funtor universal borrable de ${}_{A \rtimes H}\mathrm{Mod}_A$ en ${}_H\mathrm{Mod}$, para cualquier grupo H que actúa en A por morfismos de k-álgebras, basta ver que los objetos $A^e \rtimes H$-inyectivos son A^e-inyectivos, pues entonces $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, -)$ se anula en los objetos $A^e \rtimes H$-inyectivos. Para demostrar que un objeto $A^e \rtimes H$-inyectivo es A^e-inyectivo, se hace lo siguiente: si C es un cogenerador inyectivo en la categoría de k-módulos, $\mathrm{Hom}_k(A^e \rtimes H, C)$ es un cogenerador $A^e \rtimes H$-inyectivo, y luego los sumandos directos de productos de*

$$\mathrm{Hom}_k(A^e \rtimes H, C) \simeq \prod_H \mathrm{Hom}_k(A^e, C)$$

(i.e., los objetos $A^e \rtimes H$-inyectivos) son sumandos directos de productos de un objeto A^e-inyectivo, luego A^e-inyectivos.

Usando el teorema 2.2.12 y la proposición 2.2.4, obtenemos el segundo resultado principal de esta sección:

Teorema 2.2.14. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, un $A^e \rtimes G$-módulo M, y un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, existe una cadena de isomorfismos $k[G]$-lineales naturales en M*

$$H^\bullet(A, M \rtimes G) \simeq \bigoplus_{\langle g \rangle \in \langle G \rangle} H^\bullet(A, M_{\langle g \rangle}) \simeq \bigoplus_{\langle g \rangle \in \langle G \rangle} \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^\bullet(A, M.g)).$$

Como una aplicación del teorema 2.2.14, tenemos el siguiente corolario, dual del 2.2.11:

Corolario 2.2.15. *Dados una k-álgebra A con la acción de un grupo G, un $A^e \rtimes G$-módulo M, y un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, tenemos el siguiente isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$*

$$H^n(G, H^m(A, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H^n(\mathcal{Z}(g), H^m(A, M.g)).$$

Demostración. La demostración es inmediata del teorema 2.2.14 y el lema de Shapiro (ver [Wei], lema 6.3.2, pp.171-172)

$$\begin{aligned} H^n(G, H^m(A, M \rtimes G)) &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H^n(G, H^m(A, M_{\langle g\rangle})) \\ &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H^n(G, \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^m(A, M.g))) \\ &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H^n(\mathcal{Z}(g), H^m(A, M.g)). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

□

Aplicando el corolario 2.2.11 y el teorema 2.1.2 para el el $A \rtimes G$-bimódulo $M \rtimes G$, obtenemos:

Corolario 2.2.16. *Dados un cuerpo k, una k-álgebra A con la acción de un grupo G, y un $A^e \rtimes G$-módulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral homológica*

$${}^{I}E^2_{n,m} = H_n(G, H_m(A, M \rtimes G)) \Rightarrow H_{n+m}(A \rtimes G, M \rtimes G),$$

que puede descomponerse como

$$H_n(G, H_m(A, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H_n(\mathcal{Z}(g), H_m(A, M.g)).$$

A su vez, obtenemos el resultado dual, al aplicar el corolario 2.2.15 y el teorema 2.1.5 para el $A \rtimes G$-bimódulo $M \rtimes G$:

Corolario 2.2.17. *Dados un cuerpo k, una k-álgebra A con la acción de un grupo G, un $A^e \rtimes G$-módulo M, y un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, tenemos la siguiente sucesión espectral cohomológica*

$${}^{I}E_2^{n,m} = H^n(G, H^m(A, M \rtimes G)) \Rightarrow H^{n+m}(A \rtimes G, M \rtimes G),$$

que puede descomponerse como

$$H^n(G, H^m(A, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H^n(\mathcal{Z}(g), H^m(A, M.g)).$$

Capítulo 3

Homología de Hochschild-Mitchell

3.1 Definiciones y resultados básicos

Vamos a precisar brevemente las definiciones básicas para luego construir la homología de Hochschild-Mitchell. Para mayores referencias, ver [C-M], [C-R] y [Mit2].

Para una categoría $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ va a denotar a la clase objetos de $\mathcal{C}$, y para x, y elementos de $\mathcal{C}_0$ vamos a denotar ${}_y\mathcal{C}_x$ al conjunto de morfismos de x en y. Con cardinalidad de una categoría $\mathcal{C}$ nos referiremos siempre a la cardinalidad de $\mathcal{C}_0$

Dado un anillo conmutativo con unidad k, una **categoría k-lineal** es una categoría pequeña (i.e., $\mathcal{C}_0$ es un conjunto) donde ${}_y\mathcal{C}_x$ es un k-módulo para todo x, y en $\mathcal{C}_0$, y la composición de morfismos es k-bilineal y balanceada. Luego, la composición está dada por un morfismo k-lineal del producto tensorial

$$\circ_{z,y,x} : {}_z\mathcal{C}_y \otimes {}_y\mathcal{C}_x \to {}_z\mathcal{C}_x.$$

El ejemplo más sencillo de categoría k-lineal es el ver una k-álgebra A como la categoría con un sólo objeto y conjunto de morfismos igual a A.

Notación 3.1.1. *La mayoría de las veces vamos a escribir $\circ$ sin subíndices. En esos casos, el contexto dejará claro cuáles son éstos.*

Una categoría k-lineal sobre un cuerpo k, se llama **localmente de dimensión finita** si ${}_y\mathcal{C}_x$ es de dimensión finita para cualesquiera $x, y \in \mathcal{C}_0$.

Observación 3.1.2. *Empleamos el nombre localmente de dimensión finita en lugar de localmente finita, usado en [C-R], ya que éste último término lo emplea Takeuchi para designar categorías con colímites exactos y con un conjunto de generadores de longitud finita (ver [Tak]).*

Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un funtor F de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ se dice **k-lineal** si

$$F(\lambda.f) = \lambda.F(f),$$

para todo $f \in {}_y\mathcal{C}_x$ y $\lambda \in k$. Denotaremos con $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ la categoría de funtores $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, donde el conjunto de morfismos de un funtor F en otro G está dado por las transformaciones naturales $\mathrm{Nat}(F, G)$. Si las categorías son k-lineales, denotaremos $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a la subcategoría de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de funtores k-lineales. Trivialmente, $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es una categoría k-lineal.

Notación 3.1.3. *Dados dos funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$, que denotaremos con M y N, y una transformación natural $t \in \mathrm{Nat}(M, N)$, denotaremos*

$$t_x : M(x) \to N(x)$$

a los morfismos definidos en $\mathcal{D}$, para todo $x \in \mathcal{C}_0$.

De ahora en adelante, supondremos que todas las categorías son k-lineales y k-proyectivas, i.e. que ${}_y\mathcal{C}_x$ es k-proyectivo, para todo x, y en $\mathcal{C}_0$ (ver [A-K], sección III, 11.2, p. 59). También supondremos que los funtores son k-lineales y omitiremos el subíndice k en $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ a menos que se diga lo contrario.

Si $k = \mathbb{Z}$, la categoría se llama **aditiva**, con lo que se ve directamente que toda categoría k-lineal es aditiva.

Observación 3.1.4. *En la definición de categoría k-lineal (o aditiva) no impusimos que $\mathcal{C}$ posea productos finitos (o equivalentemente coproductos finitos, ver [Wei], A.4.1, p. 425), siguiendo la definición de Mitchell (ver [Mit1] y [Mit2]). Si $\mathcal{C}$ posee coproductos, entonces puede ser aditiva a lo sumo de una manera como se ve inmediatamente (ver [Mit2], sección 1, p. 9).*

Dado un grupo G, una **acción** de G en la categoría $\mathcal{C}$ es dar un morfismo de grupos

$$G \to Aut_k(\mathcal{C})$$

entre el grupo G y los autofuntores k-lineales de $\mathcal{C}$ (i.e., los funtores k-lineales que tienen inverso), que forma un grupo con la composición. Equivalentemente, una acción de G en $\mathcal{C}$ es tener una acción de G en el conjunto $\mathcal{C}_0$ y para todo s en G y x, y en $\mathcal{C}_0$ tener morfismos k-lineales

$$\tilde{s}_{y,x} : {}_y\mathcal{C}_x \to {}_{sy}\mathcal{C}_{sx},$$

que cumplan que

$$\tilde{s}_{x,z}(f.g) = \tilde{s}_{x,y}(f).\tilde{s}_{y,z}(g)$$
$$\tilde{s}_{x,x}({}_x1_x) = {}_{sx}1_{s.x},$$

donde ${}_x1_x$ es la identidad de x.

De ahora en adelante, vamos a denotar $s.f$, o a veces $\tilde{s}(f)$, en lugar de $\tilde{s}_{x,y}(f)$, a menos que sea necesario aclarar los subíndices.

Observación 3.1.5. *Como la categoría $\mathcal{C}$ no posee necesariamente coproductos finitos, la definición de funtor aditivo, o k-lineal no significa que el funtor preserve coproductos, sino lo que se precisó más arriba. Si $\mathcal{C}$ posee coproductos finitos, entonces ser aditivo tiene un significado único (i.e. preservar coproductos).*

Definición 3.1.6. *Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$, definimos la* ***categoría producto tensorial (externo) sobre*** *k, que se denotará $\mathcal{D} \boxtimes_k \mathcal{C}$. La clase de objetos está dada por $\mathcal{D}_0 \times \mathcal{C}_0$, y dados c, c' elementos de $\mathcal{C}_0$ y d, d' elementos de $\mathcal{D}_0$, definimos*

$${}_{(d',c')}(\mathcal{D} \boxtimes_k \mathcal{C})_{(d,c)} = {}_{d'}\mathcal{D}_d \otimes_k {}_{c'}\mathcal{C}_c.$$

A la categoría $\mathcal{C} \boxtimes_k \mathcal{C}^{op}$ la denotamos $\mathcal{C}^e$ (categoría envolvente).

De la misma manera que para las álgebras, el producto tensorial se toma sobre k, a menos que se diga otra cosa.

Observación 3.1.7. *Si G actúa en $\mathcal{C}$, luego lo hace evidentemente en $\mathcal{C}^e$, con la acción diagonal, i.e., dada por*

$$s.(x, y) = (sx, sy)$$
$$s.(f \otimes f') = s.f \otimes s.f',$$

donde $f \in {}_x\mathcal{C}_y$ y $f' \in {}_{x'}\mathcal{C}_{y'}$.

Dadas categorías k-lineales $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$, la definición de producto tensorial es tal que se cumple la adjunción dada por el isomorfismo siguiente (ver [Mit2], sección 2, p. 13)

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E}),$$

como se ve inmediatamente. Lo probaremos en detalle.

Dado un funtor $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}))$, luego induce un único funtor en $\mathrm{Fun}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E})$ de la manera evidente, es decir, tenemos el siguiente funtor

$$j : \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E}),$$

definido en los objetos por $j(F)(x, y) = F(x)(y)$ y $j(F)(f \otimes g) = F(f)(g)$, para todo $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}))$, $x \in \mathcal{C}_0$, $y \in \mathcal{D}_0$, $f \in {}_{x'}\mathcal{C}_x$ y $g \in {}_{y'}\mathcal{D}_y$. En los morfismos, se define de la manera siguiente: si $t \in \mathrm{Nat}(F, G)$, $j(t)_{(x,y)} = (t_x)_y$.

Por otro lado tenemos el funtor l inverso de j,

$$l : \mathrm{Fun}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E})),$$

definido en los objetos por $l(F)(x)(y) = F(x, y)$ y $j(F)(f)(g) = F(f \otimes g)$, para todo $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{E}))$, $x \in \mathcal{C}_0$, $y \in \mathcal{D}_0$, $f \in {}_{x'}\mathcal{C}_x$ y $g \in {}_{y'}\mathcal{C}_y$. En los morfismos, se define de la manera siguiente: si $t \in \mathrm{Nat}(F, G)$, $(l(t)_x)_y = t_{(x,y)}$. Trivialmente estos funtores son inversos uno del otro.

Observación 3.1.8. *Con las mismas hipótesis que antes, obtenemos otra adjunción, que es un isomorfismo de la forma*

$$\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})) = \mathrm{Fun}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{C} \boxtimes_k \mathcal{D}, \mathcal{E}),$$

con la misma identificación que se usó antes.

También tenemos los siguientes isomorfismos

$$k \boxtimes \mathcal{C} = \mathcal{C} \boxtimes k = \mathcal{C},$$
$$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} = \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C},$$
$$(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}) \boxtimes \mathcal{E} = \mathcal{C} \boxtimes (\mathcal{D} \boxtimes \mathcal{E}),$$

que se obtienen de manera trivial.

Dada un categoría $\mathcal{C}$, definimos, siguiendo a Mitchell (ver [Mit2], sección 1, p.11, o también el apéndice de [Til], pp. 19-21) la **categoría de matrices de** $\mathcal{C}$ (también llamada **aditivización de** $\mathcal{C}$) que denotaremos $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$, donde $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})_0 = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_0^n$, y

$${}_{(y_1,\ldots,y_m)}\mathrm{Mat}(\mathcal{C})_{(x_1,\ldots,x_n)} = \{({}_{y_j}f_{x_i})_{i=1,\ldots,n; j=1,\ldots,m} : {}_{y_j}f_{x_i} \in {}_{y_j}\mathcal{C}_{x_i}\}.$$

La categoría $\mathcal{C}$ se ve como una subcategoría de $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$ trivialmente, i.e., tenemos un funtor

$$\begin{aligned} mat : \mathcal{C} &\to \mathrm{Mat}(\mathcal{C}) \\ x &\mapsto x \\ f &\mapsto f, \end{aligned}$$

donde $x \in \mathcal{C}_0$ y $f \in {}_{x'}\mathcal{C}_x$.

Vemos trivialmente que el elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ junto con los morfismos

$$\pi_i = (0 \ldots {}_{x_i}1_{x_i} \ldots 0) \in {}_{x_i}\mathrm{Mat}(\mathcal{C})_{(x_1,\ldots,x_n)},$$

es el producto de los elementos $x_1, \dots, x_n$ (o el coproducto, con los morfismos $u_i \in {}_{(x_1,\dots,x_n)}\mathrm{Mat}(\mathcal{C})_{x_i}$ dados por matrices del tipo $n \times 1$ donde ${}_{x_i}(u_i)_{x_j} = \delta_{ij} \cdot {}_{x_i}1_{x_i}$, que cumplen que

$$\pi_i \circ u_j = \delta_{i,j} \cdot {}_{x_i}1_{x_i},$$
$$\sum_{i=1}^{n} u_i \circ \pi_i = {}_{(x_1,\dots,x_n)}1_{(x_1,\dots,x_n)}.$$

En este sentido, $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$ es una aditivización de $\mathcal{C}$).

Observación 3.1.9. *A su vez, la categoría $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})^e$ cumple algo parecido, pues $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m))$ es el producto (o coproducto, es lo mismo en el caso finito) de los elementos (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), con los morfismos*

$$\pi_{(i,j)} : ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) \to (x_i, y_j)$$
$$\pi_{(i,j)} = \pi_i \otimes \pi_j,$$

donde π_i es la flecha en $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$ definida más arriba. Que es un producto es trivial, pues dado $((v_1, \dots, v_p), (z_1, \dots, z_q))$ y flechas $\sigma_{(i,j)}$, como tenemos las flechas $u_i \otimes u_j$, nos construimos el morfismo σ de $((v_1, \dots, v_p), (z_1, \dots, z_q))$ en $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m))$ definido de la siguiente manera

$$\sigma = \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} (u_i \otimes u_j) \circ \sigma_{(i,j)},$$

que cumple que $\pi_{(i,j)} \circ \sigma = \sigma_{(i,j)}$.

También existe otro proceso, llamado completación idempotente que describiremos ahora (ver [Mit2], sección 1, pp. 11-12). Una categoría $\mathcal{C}$ se llama **idempotente completa** si todo idempotente se parte, i.e., dado $f \in {}_x\mathcal{C}_x$ tal que $f^2 = f$, existen $y \in \mathcal{C}_0$ y morfismos $g \in {}_x\mathcal{C}_y$ y $h \in {}_y\mathcal{C}_x$ tales que $h \circ g = {}_y1_y$ y $g \circ h = f$. El morfismo h se llama **retracto**. Una **cubierta de** $\mathcal{C}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{C}$ tal que todo objeto de la subcategoría es un retracto de un objeto de $\mathcal{C}$, i.e. para todo x en la subcategía existe un objeto $y \in \mathcal{C}_0$ y un morfismo $f \in {}_x\mathcal{C}_y$ tal que f es un epimorfismo que se parte (el nombre es debido a Mitchell, no se lo debe confundir con cubrimiento de Galois).

La **completación idempotente de** $\mathcal{C}$ es una categoría, que denotaremos $\hat{\mathcal{C}}$, tal que $\mathcal{C}$ es una cubierta de $\hat{\mathcal{C}}$ y $\hat{\mathcal{C}}$ sea idempotente completa. Se puede ver fácilmente que es esencialmente única. Una construcción posible es la siguiente debida a Freyd (ver [Fre], Exercise B, p.61) : $\hat{\mathcal{C}}_0 = \{(x, f) : x \in \mathcal{C}_0, f \in {}_xC_x, f^2 = f\}$, y ${}_{(y,g)}\hat{\mathcal{C}}_{(x,f)} = \{h \in g.{}_y\mathcal{C}_x.f\}$ con la composición de $\mathcal{C}$.

Trivialmente, tenemos un funtor inclusión de $\mathcal{C}$ en $\hat{\mathcal{C}}$,

$$hat : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$$
$$x \mapsto (x, {}_x1_x)$$
$$f \mapsto f,$$

donde $x \in \mathcal{C}_0$ y $f \in {}_{x'}\mathcal{C}_x$.

Una categoría k-lineal se llama **manejable** (en inglés amenable) si es idempotente completa y tiene coproductos finitos. Trivialmente, dada una categoría $\mathcal{C}$, la categoría $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}$ es manejable.

La definición de categoría k-lineal es muy parecida a la de k-álgebra, y de la misma manera que para las álgebras, también se pueden definir módulos sobre una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ de la manera siguiente: un $\mathcal{C}$-**módulo a izquierda** es un funtor k-lineal

$$M : \mathcal{C} \to {}_k\mathrm{Mod}.$$

Esto es lo mismo que dar para todo x en $\mathcal{C}_0$ un k-módulo a izquierda ${}_xM$, y para todo y elemento de $\mathcal{C}_0$ dar un morfismo k-lineal

$$\rho_{y,x} : {}_y\mathcal{C}_x \otimes {}_xM \to {}_yM,$$

de manera tal que, si se escribe $f.m$ en lugar de $\rho_{y,x}(f,m)$, resulta

$$\begin{aligned} (f+f').m &= f.m + f'.m, \\ f.(m+n) &= f.m + f.n, \\ (g.h).m &= g.(h.m), \\ {}_x1_x.m &= m, \end{aligned}$$

para $m, n \in {}_xM$, $f, f' \in {}_y\mathcal{C}_x$, $g \in {}_z\mathcal{C}_y$, $h \in {}_y\mathcal{C}_x$, y 1_x la unidad de ${}_x\mathcal{C}_x$.

La clase de los $\mathcal{C}$-módulos a izquierda forma una categoría, fijando como morfismos de $\mathcal{C}$-módulos las transformaciones naturales entre los funtores (nombre: **morfismos $\mathcal{C}$-lineales**). Análogamente definimos los $\mathcal{C}$-**módulos a derecha** como los funtores aditivos de $\mathcal{C}^{op}$ en ${}_k\mathrm{Mod}$, lo que es equivalente a dar para todo $x \in \mathcal{C}_0$ un k-módulo M_x y para todo y elemento de $\mathcal{C}_0$ dar un morfismo k-lineal

$$\tau_{x,y} : M_x \otimes {}_x\mathcal{C}_y \to M_y,$$

de manera tal que, si se escribe $m.f$ en lugar de $\tau_{x,y}(m,f)$, resulta

$$\begin{aligned} m.(f+f') &= m.f + m.f', \\ (m+n).f &= m.f + n.f, \\ m.(h.g) &= (m.h).g, \\ m.{}_x1_x &= m, \end{aligned}$$

para $m, n \in M_x$, $f, f' \in {}_x\mathcal{C}_y$, $g \in {}_x\mathcal{C}_y$, $h \in {}_y\mathcal{C}_z$, y ${}_x1_x$ la unidad de ${}_x\mathcal{C}_x$.

A menos que se diga otra cosa, siempre nos referiremos a $\mathcal{C}$-módulos a izquierda.

Observación 3.1.10. *Aunque nosotros nos enfocaremos siempre en los casos de categorías k-lineales, deseamos recalcar que el caso aditivo es equivalente al k-lineal, de acuerdo con Mitchell (ver [Mit2], sección 11, p. 51).*

Con esto queremos decir que dada una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, la categoría de funtores aditivos de $\mathcal{C}$ en ${}_\mathbb{Z}\mathrm{Mod}$ es equivalente a la categoría de funtores k-lineales de $\mathcal{C}$ en ${}_k\mathrm{Mod}$.

Para demostrarlo, hay que notar que $\mathrm{Fun}_\mathbb{Z}(k, {}_\mathbb{Z}\mathrm{Mod}) = {}_k\mathrm{Mod}$ es una categoría k-lineal de manera trivial. Luego, por la adjunción del producto tensorial antes mencionada (ver observación 3.1.8) tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod})) &= \mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}_\mathbb{Z}(k, {}_\mathbb{Z}\mathrm{Mod})) \\ &= \mathrm{Fun}_\mathbb{Z}(\mathcal{C} \boxtimes_k k, {}_\mathbb{Z}\mathrm{Mod}) \\ &= \mathrm{Fun}_\mathbb{Z}(\mathcal{C}, {}_\mathbb{Z}\mathrm{Mod}). \end{aligned}$$

A su vez, podemos definir bimódulos de manera evidente. Un $\mathcal{C}$-**bimódulo** se define como un bifuntor k-lineal
$$M : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{op} \to {}_k\mathrm{Mod}.$$

Equivalentemente, un $\mathcal{C}$-bimódulo M es lo mismo que tener una familia de k-módulos $({}_yM_x)_{x,y\in\mathcal{C}_0}$ y para todo $x, y, z \in \mathcal{C}_0$ morfismos de k-módulos

$$\begin{aligned}\rho_{y,x,z} &: {}_y\mathcal{C}_x \otimes {}_xM_z \to {}_yM_z,\\ \tau_{z,x,y} &: {}_zM_x \otimes {}_x\mathcal{C}_y \to {}_zM_y,\end{aligned}$$

tales que, si se escribe $f.m$ en lugar de $\rho_{y,x,z}(f, m)$ y $m.f$ en lugar de $\tau_{z,x,y}(m, f)$, resulta

$$\begin{aligned}(f + f').m &= f.m + f'.m,\\ f.(m + n) &= f.m + f.n,\\ (h.f).m &= h.(f.m),\\ {}_{x'}1_{x'}.m &= m,\\ m.(g + g') &= m.g + m.g',\\ (m + n).g &= m.g + n.g,\\ m.(g.k) &= (m.g).k,\\ m.{}_x1_x &= m,\\ (f.m).g &= f.(m.g),\end{aligned}$$

para $m, n \in {}_{x'}M_x$, $f, f' \in {}_y\mathcal{C}_{x'}$, $g, g' \in {}_x\mathcal{C}_z$, $h \in {}_{y'}\mathcal{C}_y$, $k \in {}_z\mathcal{C}_{z'}$ y ${}_x1_x$ y ${}_{x'}1_{x'}$ las unidades de ${}_x\mathcal{C}_x$ y ${}_{x'}\mathcal{C}_{x'}$. En otras palabras, un $\mathcal{C}$-bimódulo, es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda y a derecha, que cumple una relación de compatibilidad.

Vemos fácilmente que los $\mathcal{C}$-bimódulos son lo mismo que los $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{op}$-módulos a izquierda. El ejemplo más natural es tomar $\mathcal{C}$ como un $\mathcal{C}$-bimódulo de manera evidente.

Ahora recordamos la definición debida a Mitchell del producto tensorial de módulos sobre una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ (ver [Mit2], sección 6, pp. 26-27). Dado un $\mathcal{C}$-módulo a derecha M y un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda N, definimos el **producto tensorial sobre** $\mathcal{C}$ entre M y N, $M \otimes_{\mathcal{C}} N$, como el k-módulo dado por

$$M \otimes_{\mathcal{C}} N = (\bigoplus_{x\in\mathcal{C}_0} M_x \otimes_k {}_xN)/\langle\{m.f \otimes n - m \otimes f.n : m \in M_x, n \in {}_yN, f \in {}_x\mathcal{C}_y\}\rangle.$$

Si M y N son $\mathcal{C}$-bimódulos, luego se puede definir el $\mathcal{C}$-**bimódulo producto tensorial sobre** $\mathcal{C}$:

$${}_y(M \otimes_{\mathcal{C}} N)_x = (\bigoplus_{z\in\mathcal{C}_0} {}_yM_z \otimes_k {}_zN_x)/\langle\{m.f \otimes n - m \otimes f.n\}\rangle.$$

para $m \in {}_yM_{y'}$, $n \in {}_{x'}N_x$, $f \in {}_{y'}\mathcal{C}_{x'}$. $M \otimes_{\mathcal{C}} N$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo de manera evidente.

De igual manera que para los módulos sobre una k-álgebra, $\otimes$ entre $\mathcal{C}$-módulos indicará producto tensorial sobre $\mathcal{C}$ a menos que se diga otra cosa.

Definición 3.1.11. *Dado un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda M, se llama* ***libre*** *si existe un conjunto $\{x_i : i \in I\} \subset \mathcal{C}_0$ y existe un isomorfismo natural*
$${}_-M \simeq \bigoplus_{i\in I} {}_-\mathcal{C}_{x_i}.$$

La definición de $\mathcal{C}$-módulo a derecha libre es completamente análoga.

Por otro lado, M se dice ***proyectivo*** *si es un objeto proyectivo en la categoría de funtores k-lineales de $\mathcal{C}$ en ${}_k\mathrm{Mod}$.*

También, un módulo M se dice ***finitamente generado*** *si existe un conjunto finito de índices I tal que tenemos un epimorfismo*

$$\bigoplus_{i\in I} {}_{-}\mathcal{C}_{x_i} \twoheadrightarrow {}_{-}M.$$

A su vez, un módulo M se llama ***pequeño*** *si $\mathrm{Nat}(M,-)$ preserva coproductos.*

A partir de la definición de $\mathcal{C}$-módulo libre es muy fácil demostrar que dado un $\mathcal{C}$-módulo M, éste es proyectivo si y sólo si es un retracto de un libre (ver [Mit2], prop 10.1, p. 47). Vamos a probarlo en detalle.

Lo primero que vamos a ver es que dado un $\mathcal{C}$-módulo M, siempre existe un epimorfismo de $\mathcal{C}$-módulos

$$\bigoplus_{i\in I} {}_{-}\mathcal{C}_{x_i} \twoheadrightarrow {}_{-}M.$$

Para demostrar esto, tomamos el conjunto de índices $I = \coprod_{x\in\mathcal{C}_0} {}_xM$ (unión disjunta). Entonces, por el lema de Yoneda, si x_i es el elemento de $\mathcal{C}_0$ tal que $i \in {}_{x_i}M$:

$$\mathrm{Nat}(\bigoplus_{i\in I} {}_{-}\mathcal{C}_{x_i}, M) \simeq \prod_{i\in I} \mathrm{Nat}({}_{-}\mathcal{C}_{x_i}, M) \simeq \prod_{i\in I} {}_{x_i}M.$$

Se verifica fácilmente que la transformación natural que se corresponde con la I-upla dada por I, es decir, $(m_i)_{i\in I}$ con $m_i = i$, es el epimorfismo que buscamos. Vamos a probarlo. Para ello, hay que escribir explícitamente la transformación natural que corresponde a la I-upla (que llamaremos τ), y mostrar que en cada objeto de la categoría $\mathcal{C}$ es un epimorfismo. Pero eso es muy sencillo, ya que nuevamente por el lema de Yoneda, τ esta dada por

$${}_x\tau(\sum_{i\in I} f_i) = \sum_{i\in I} {}_x\tau_{x_i}(f_i) = \sum_{i\in I} f_i.i,$$

donde τ_{x_i} es la transformación natural entre ${}_{-}\mathcal{C}_{x_i}$ y ${}_{-}M$ correspondiente a i. Se ve inmediatamente que es un epimorfismo, ya que ${}_x\tau(1_{x_i}) = i$.

El resto de la demostración es fácil, pues si M es $\mathcal{C}$-módulo proyectivo, por el resultado anterior, todo $\mathcal{C}$-módulo es cociente de un libre, luego todo $\mathcal{C}$-módulo proyectivo es sumando directo de un $\mathcal{C}$-módulo libre.

La recíproca es fácil, pues un $\mathcal{C}$-módulo libre es proyectivo y un sumando directo de un $\mathcal{C}$-módulo proyectivo es proyectivo.

Observación 3.1.12. *La demostración anterior es una prueba directa de que la categoría de funtores k-lineales tiene suficientes objetos proyectivos.*

Dos categorías k-lineales, se llaman **equivalentes Morita a izquierda** si sus categorías de módulos a izquierda son equivalentes. De manera análoga se definen los conceptos de equivalencia Morita a derecha y equivalencia Morita bilátera. De ahora en adelante, equivalencia Morita entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ significará equivalencia Morita a izquierda y la denotaremos $\mathcal{C} \sim_M \mathcal{D}$ (ver observación 3.1.13). Se demuestra fácilmente que, dada una categoría $\mathcal{C}$, las categorías $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$ y $\hat{\mathcal{C}}$ son equivalentes Morita a $\mathcal{C}$. También es sencillo ver que categorías equivalentes son equivalentes Morita.

Freyd demostró que una equivalencia Morita entre dos categorías es necesariamente una combinación de śolo tres tipos: equivalencia, aditivización y completación idempotente. La demostración se basa en lo siguiente: dos categorías manejables que son equivalentes Morita son equivalentes. Para demostrar esto último, sólo hay que notar que si $\mathcal{C}$ es idempotente completa, luego un retracto de un funtor representable es representable (por el lema de Yoneda versión k-lineal). De aquí se sigue que, si $\mathcal{C}$ es manejable, entonces los módulos proyectivos finitamente generados son representables y la subcategoría de $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod})$ formada por los proyectivos finitamente generados (o pequeños, es lo mismo) es equivalente a $\mathcal{C}^{op}$ (vía lema de Yoneda). Referimos al lector a [Mit2], sección 3, p.18, y al apéndice de [C-S] para mayores referencias.

Observación 3.1.13. *Se puede ver fácilmente que dos categorías equivalentes Morita a izquierda son equivalentes Morita a derecha. Para demostrarlo, basta ver que si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes Morita a izquierda, luego $\mathcal{C}^{op}$ y $\mathcal{D}^{op}$ son equivalentes Morita a izquierda. Supongamos que $\mathcal{C}$ es equivalente Morita a izquierda con $\mathcal{D}$, por lo que $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}$ y $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{D})}$ son equivalentes.*

A su vez, tenemos los siguientes isomorfismos evidentes

$$\mathrm{Mat}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Mat}(\mathcal{C})^{op},$$
$$\widehat{\mathcal{C}^{op}} = \hat{\mathcal{C}}^{op}.$$

Luego, como $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}^{op} \simeq \widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{D})}^{op}$, resulta $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{C}^{op})} \simeq \widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{D}^{op})}$, por lo que $\mathcal{C}^{op}$ y $\mathcal{D}^{op}$ son equivalentes Morita a izquierda.

También se puede ver que si dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son equivalentes Morita a izquierda, resulta equivalencia Morita bilátera. Para ello hay que observar que, si $\mathcal{C}$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{C}'$, y $\mathcal{D}$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{D}'$, luego

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{D}, {}_k\mathrm{Mod}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{D}', {}_k\mathrm{Mod}),$$

y de la djunción del producto tensorial

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, {}_k\mathrm{Mod}) &= \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, {}_k\mathrm{Mod})) \\ \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Fun}(\mathcal{D}', {}_k\mathrm{Mod})) &= \mathrm{Fun}(\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}', {}_k\mathrm{Mod}),\end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}'$. Como el producto tensorial es conmutativo, i.e., tenemos el isomorfismo

$$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D} = \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{C},$$

obtenemos que $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{C}' \boxtimes \mathcal{D}'$. Entonces, si $\mathcal{C}$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{C}'$, y al tomar $\mathcal{D} = \mathcal{C}^{op}$, resulta que $\mathcal{C}^{op}$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{C}'^{op}$, y por lo tanto $\mathcal{C}^e$ es equivalente Morita a izquierda a $\mathcal{C}'^e$, es decir, $\mathcal{C}$ es equivalente Morita bilátera a $\mathcal{C}'$.

Deseamos recalcar que una categoría puede ser equivalente Morita bilátera a otra sin que sean equivalentes Morita a izquierda, ya que ocurría también con las álgebras.

La siguiente definición se encuentra en [C-M]:

Definición 3.1.14. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, y un grupo G que actúa libremente en $\mathcal{C}$ (i.e., si $sx = x$ para algún $s \in G$ y $x \in \mathcal{C}_0$, entonces $s = 1_G$), se define la categoría $\mathcal{C}/G$ de la manera siguiente. La clase de objetos está dada por $(\mathcal{C}/G)_0 = \mathcal{C}_0/G$, es decir, las órbitas de la acción de G en $\mathcal{C}_0$, y para $\overline{x}, \overline{y} \in (\mathcal{C}/G)_0$, se define*

$${}_{\overline{y}}(\mathcal{C}/G)_{\overline{x}} = (\bigoplus_{s,t \in G} {}_{ty}\mathcal{C}_{sx})_G,$$

donde el subíndice G indica que tomamos los coinvariantes del G-módulo correspondiente. La composición es la dada por $\overline{g} \circ \overline{f} = \overline{g \circ t's^{-1}.f}$, con $f \in {}_{sy}\mathcal{C}_{s'x}$, $g \in {}_{tz}\mathcal{C}_{t'y}$, que está bien definida pues la acción es libre (ver [C-M]).

En esta situación se dice que el funtor proyección $\mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$ es un cubrimiento de Galois de $\mathcal{C}/G$ con grupo de Galois G.

Observación 3.1.15. *Se puede demostrar fácilmente que la siguiente flecha es un isomorfismo:*

$$(\bigoplus_{s,t\in G} {}_{ty}\mathcal{C}_{sx})_G \to \bigoplus_{s\in G} {}_{y}\mathcal{C}_{sx}$$
$$\overline{f} \mapsto t^{-1}.f,$$

para $f \in {}_{ty}\mathcal{C}_{sx}$. Su inversa está dada por la composición de la inclusión

$$\bigoplus_{s\in G} {}_{y}\mathcal{C}_{sx} \to \bigoplus_{s,t\in G} {}_{ty}\mathcal{C}_{sx}$$

y la proyección

$$\bigoplus_{s,t\in G} {}_{ty}\mathcal{C}_{sx} \to (\bigoplus_{s,t\in G} {}_{ty}\mathcal{C}_{sx})_G.$$

Definición 3.1.16. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, y un grupo G que actúa en $\mathcal{C}$, se define la **categoría producto semidireto** $\mathcal{C} \rtimes G$ de la manera siguiente. La clase de objetos está dada por $(\mathcal{C} \rtimes G)_0 = \mathcal{C}_0$, y para $x, y \in (\mathcal{C} \rtimes G)_0$, se define*

$${}_{y}(\mathcal{C} \rtimes G)_x = \bigoplus_{s\in G} {}_{y}\mathcal{C}_{sx},$$

donde la composición es la dada por $g \circ f = g \circ t.f$, con $f \in {}_{y}\mathcal{C}_{sx} \subset {}_{y}(\mathcal{C} \rtimes G)_x$, $g \in {}_{z}\mathcal{C}_{ty} \subset {}_{z}(\mathcal{C} \rtimes G)_y$ (ver [C-M], def 2.3, p. 4, aunque ahí se utiliza la notación $\mathcal{C}[G]$ para el producto semidirecto).

Observación 3.1.17. *Se puede ver fácilmente que dos objetos x, y de $\mathcal{C}$ en la misma órbita bajo la acción de G son isomorfos en $\mathcal{C} \rtimes G$ (el isomorfismo es ${}_{x}1_x$, con inversa ${}_{y}1_y$).*

A partir de esto, vemos que la subcategoría $\underline{\mathcal{C} \rtimes G}$ de $\mathcal{C} \rtimes G$ formada por un representante por cada clase de equivalencia de la acción de G en $\mathcal{C}$ es plena en $\mathcal{C} \rtimes G$. Por otro lado, por la observación anterior, vemos que esta subcategoría plena $\underline{\mathcal{C} \rtimes G}$ es isomorfa a $\mathcal{C}/G$, con lo que finalmente se obtiene que es equivalente a $\mathcal{C} \rtimes G$ (ver [C-M], Theorem 2.8, p. 5).

Luego, se puede probar el siguiente resultado

Lema 3.1.18. *Dada una categoría $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, para todo $\mathcal{C}$-módulo a izquierda M, son equivalentes:*

1. *Para todo x en $\mathcal{C}_0$, s en G, existen flechas k-lineales $\overline{s}_x : {}_{x}M \to {}_{sx}M$ que cumplen que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} {}_{y}\mathcal{C}_x \otimes {}_{x}M \arrow[r, "\tilde{s}_{y,x} \otimes \overline{s}_x"] \arrow[d, "\rho_{y,x}"] & {}_{sy}\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_{sx}M \arrow[d, "\rho_{sy,sx}"] \\ {}_{y}M \arrow[r, "\overline{s}_y"] & {}_{sy}M \end{tikzcd}$$

2. *M tiene una estructura de $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo.*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$

Que M sea un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo, significa que es un funtor aditivo de $\mathcal{C} \rtimes G$ en ${}_k\mathrm{Mod}$. Como los objetos de $\mathcal{C} \rtimes G$ son los mismos que los de $\mathcal{C}$, vemos inmediatamente que M está bien definido en los objetos.

Falta ver la correspondencia en los morfismos, i.e. la acción de $\mathcal{C} \rtimes G$ de M. Para ello, se define

$$\begin{aligned} {}_y(\mathcal{C} \rtimes G)_x \otimes {}_xM = \bigoplus_{s\in G} {}_y\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_xM \to \bigoplus_{s\in G} {}_y\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_{sx}M \to {}_yM, \\ c \otimes m \mapsto c \otimes \overline{s}_x(m) \mapsto c.\overline{s}_x(m). \end{aligned}$$

Ésta resulta una acción de $\mathcal{C} \rtimes G$-módulos, pues como veremos cumple la asociatividad y la propiedad del neutro. Vamos a probarlo en detalle. La asociatividad de la acción se ve de la conmutatividad del siguiente diagrama, usando que M es un $\mathcal{C}$-módulo y la condición 1.

$$\begin{tikzcd}
{}_z(\mathcal{C} \rtimes G)_y \otimes {}_y(\mathcal{C} \rtimes G)_x \otimes {}_xM \arrow[rr, "\circ\otimes id"] \arrow[dr, "id\otimes\rho"] \arrow[dd, equal] & & {}_z(\mathcal{C} \rtimes G)_x \otimes {}_xM \arrow[dr, "\rho"] \arrow[dd, equal] & \\
& {}_z(\mathcal{C} \rtimes G)_y \otimes {}_yM \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dd, equal] & & {}_zM \arrow[dd, equal] \\
\bigoplus_{s,t\in G} {}_z\mathcal{C}_{ty} \otimes {}_y\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_xM \arrow[rr, "\oplus m\circ(id\otimes\bar{t}_y)\otimes id"] \arrow[dr, "\oplus id\otimes\rho\circ(id\otimes\overline{s}_x)"'] & & \bigoplus_{s\in G} {}_z\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_xM \arrow[dr, "\oplus\rho\circ(id\otimes\overline{s}_x)"'] & \\
& \bigoplus_{t\in G} {}_z\mathcal{C}_{ty} \otimes {}_yM \arrow[rr, "\oplus\rho\circ(id\otimes\bar{t}_y)"'] & & {}_zM
\end{tikzcd}$$

El camino superior da como resultado

$$g \otimes f \otimes m \mapsto (g \circ t.f) \otimes m \mapsto (g \circ t.f).\bar{t}_{sx}(\overline{s}_x(m)),$$

y el camino inferior resulta

$$g \otimes f \otimes m \mapsto g \otimes f.\overline{s}_x(m) \mapsto g.\bar{t}_y(f.\overline{s}_x(m)).$$

Los dos son iguales, pues

$$g(\bar{t}_y(f(\overline{s}_x(m)))) = g(t.f.\bar{t}_{sx}(\overline{s}_x(m))) = (g \circ t.f).(\bar{t}_{sx}(\overline{s}_x(m))).$$

Por otro lado, para verificar que la unidad actúa trivialmente en M, basta notar que la unidad de ${}_x(\mathcal{C} \rtimes G)_x = \bigoplus_{s\in G} {}_x\mathcal{C}_{sx}$ es la unidad ${}_x1_x$ de ${}_x\mathcal{C}_x$.

$2 \Rightarrow 1$

Si M es un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo, resulta trivialmente que M es un $\mathcal{C}$-módulo. Definimos, para todo s en G, el siguiente morfismo k-lineal $\overline{s}_x$ dado por

$$\begin{aligned} {}_xM &\to {}_{sx}M \\ m &\mapsto {}_{sx}1_{sx}.m, \end{aligned}$$

donde ${}_{sx}1_{sx}.m$ está dado por la acción de ${}_{sx}(\mathcal{C} \rtimes G)_x$ en ${}_xM$.

Hay que ver que se cumple la conmutatividad del diagrama del enunciado. Para eso, hay que notar que, como M es un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo, por asociatividad mixta vale que $(g \circ t.f).m = g.(f.m)$, con $g \in {}_z\mathcal{C}_{t.y} \subset {}_z(\mathcal{C} \rtimes G)_y$, $f \in {}_y\mathcal{C}_{sx} \subset {}_y(\mathcal{C} \rtimes G)_x$, y $m \in {}_xM$, y donde el punto indica la acción correspondiente. El diagrama que debe conmutar es el siguiente

$$\begin{tikzcd}
{}_y\mathcal{C}_x \otimes {}_xM \arrow[r, "\tilde{s}\otimes\overline{s}_x"] \arrow[d, "\rho"] & {}_{sy}\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_{sx}M \arrow[d, "\rho"] \\
{}_yM \arrow[r, "\overline{s}_y"] & {}_{sy}M
\end{tikzcd}$$

El camino superior da

$$f \otimes m \mapsto s.f \otimes 1_{sx} \otimes m \mapsto s.f \otimes {}_{sx}1_{sx}.m \mapsto (s.f).({}_{sx}1_{sx}.m),$$

y el inferior

$$f \otimes m \mapsto f.m \mapsto {}_{sy}1_{sy} \otimes (f.m) \mapsto {}_{sy}1_{sy}.(f.m).$$

Luego, el diagrama conmuta si y sólo si ${}_{sy}1_{sy}.(f.m) = (s.f).({}_{sx}1_{sx}.m)$, para $f \in {}_y\mathcal{C}_x$, $m \in {}_xM$, $s \in G$, $x, y \in \mathcal{C}_0$ (se puso subíndices a las unidades para distinguirlas). Pero esa igualdad es directa:

$$\begin{aligned}
{}_{sy}1_{sy}.(f.m) &= ({}_{sy}1_{sy} \circ s.f).m = (s.f).m \\
&= s.(f \circ {}_x1_x).m = ((s.f).{}_{sx}1_{sx}).m \\
&= (s.f).({}_{sx}1_{sx}.m).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{s}_x$ cumple 1, y el lema queda demostrado.

□

Notación 3.1.19. *A partir de ahora, vamos a escribir $s.m$ en lugar de $\overline{s}_x(m)$.*

Observación 3.1.20. *El análogo del lema 3.1.18 para módulos a derecha es el siguiente: una estructura de $\mathcal{C}$-módulo a derecha sobre M se extiende a una estructura de $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo a derecha si y sólo si para todo $x \in \mathcal{C}_0$ existen morfismos k-lineales $\overline{s}_x : M_x \to M_{s^{-1}.x}$ que cumplen que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
M_x \otimes {}_x\mathcal{C}_y \arrow[r, "\overline{s}_x\otimes\tilde{s}^{-1}_{x,y}"] \arrow[d, "\rho"] & M_{s^{-1}x} \otimes {}_{s^{-1}x}\mathcal{C}_{s^{-1}y} \arrow[d, "\rho"] \\
M_y \arrow[r, "\overline{s}_y"] & M_{s^{-1}y}
\end{tikzcd}$$

Vamos a delinear la demostración. Si M es un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo a derecha, luego se puede definir

$$\begin{aligned}
\overline{s}_x : M_x &\to M_{s^{-1}x} \\
m &\mapsto m.{}_x1_x,
\end{aligned}$$

donde se toma ${}_x1_x \in {}_x\mathcal{C}_{ss^{-1}x} \subset {}_x(\mathcal{C} \rtimes G)_{s^{-1}x}$. Este morfismo cumple con lo pedido.

Recíprocamente, si M posee morfismos $\overline{s}_x$, de acuerdo al enunciado, entonces definimos, para $m \in M_x$, $f \in {}_x\mathcal{C}_{sy} \subset {}_x(\mathcal{C} \rtimes G)_y$

$$m.f = \overline{s}_{sy}(m.f),$$

donde la accción del segundo miembro es la dada por $\mathcal{C}$. La acción a derecha se notará $m.s$,y en menor medida $\overline{s}(m)$, en lugar de $\overline{s}_x(m)$.

Como ya se está viendo estas definiciones son una generalización de la teoría de módulos sobre un anillo. Queremos calcular homologías en una categoría de funtores k-lineales entre una categoría k-lineal pequeña $\mathcal{C}$ y la categoría abeliana ${}_k\mathrm{Mod}$. Para poder emplear estas técnicas, primero hay que verificar que la categoría de funtores k-lineales (entre una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y una categoría abeliana) es abeliana, completa y cocompleta, tiene suficientes inyectivos y suficientes proyectivos, y en otros casos será necesario que valgan los axiomas AB4, AB5, etc. (para las definiciones de estos axiomas ver [Wei], A.4.3, Exercise A.4.4, A.4.6, pp. 426-427, o [Gro], sección 1.5, pp. 128-129).

Ver que la categoría de funtores (k-lineales o no) es abeliana es un ejercicio sencillo que depende de que la categoría de llegada sea abeliana. Si la categoría de llegada es completa, la categoría de funtores (k-lineales o no) también; si es cocompleta, la categoría de funtores (k-lineales o no) también. Si la categoría de llegada es abeliana, cocompleta y tiene suficientes proyectivos, la categoría de funtores (k-lineales o no) tiene suficientes proyectivos (ver [Mit1], teo VI.4.1, p. 146, o si no, ver observación 3.1.12); y si es abeliana, cumple AB5 y tiene un generador, la categoría de funtores (k-lineales o no) tiene suficientes inyectivos (ver [Gro], teo 1.10.1, pp.135-137, aunque para una demostración del estilo de la observación 3.1.12, ver la observación 3.1.21).

Como la categoría de k-módulos es abeliana, cocompleta, cumple AB5, tiene suficientes proyectivos e inyectivos, y tiene generadores, resulta que la categoría de funtores k-lineales tiene suficientes proyectivos e inyectivos, es cocompleta, cumple AB5 y tiene generadores. A partir de aquí, se ve que pueden emplearse las técnicas homológicas estándar para estudiar los módulos sobre una categoría k-lineal, del mismo modo que se hace para los módulos sobre una k-álgebra.

Observación 3.1.21. *La siguiente construcción está basada en [Mit1], cap. VI, sección 4, pp. 146-147, aunque adaptada al caso especial de funtores con categoría de llegada ${}_k\mathrm{Mod}$. Mitchell presenta una demostración para el caso de categorías cocompletas abelianas con cogeneradores inyectivos. Nosotros lo haremos para el caso de módulos sobre k solamente para mantener la coherencia del texto, aunque la demostración es esencialmente la misma salvo algunas diferencias menores.*

Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, $x \in \mathcal{C}_0$ y un k-módulo M, definimos el funtor

$$I_{x,M} \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod}),$$

mediante $I_{x,M}(y) = \mathrm{Hom}_k({}_x\mathcal{C}_y, M)$. De hecho, esta construccción es funtorial, i.e., obtenemos el funtor

$$I_x : {}_k\mathrm{Mod} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod}),$$

dado por $I_x(M) = I_{x,M}$ como se ve inmediatamente de la definición.

Luego, por el lema de Yoneda, dado $F \in \mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod})$, resulta

$$\mathrm{Nat}(F, I_{x,M}) \simeq \mathrm{Hom}_k(F(x), M)).$$

Entonces, el funtor evaluación en x, definido por

$$\begin{aligned} ev_x : \mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod}) &\to {}_k\mathrm{Mod} \\ F &\mapsto F(x), \end{aligned}$$

es adjunto a izquierda del funtor I_x, para todo $x \in \mathcal{C}_0$.

Si C es un cogenerador inyectivo en la categoría de módulos sobre k, luego $I_x(C)$ es un objeto inyectivo de $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod})$. Esto ocurre ya que el funtor ev_x preserva monomorfismos trivialmente y, por lo tanto, su funtor adjunto a izquierda preserva objetos inyectivos. Así, resulta que $\prod_{x\in\mathcal{C}_0} I_x(C)$ es un cogenerador inyectivo en la categoría $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod})$. Por lo tanto, $\mathrm{Fun}_k(\mathcal{C}, {}_k\mathrm{Mod})$ tiene suficientes inyectivos.

Recordamos ahora una definición que es una generalización de la (co)homología de Hochschild para categorías k-lineales. Esta teoría fue creada y estudiada por B. Mitchell (ver [Mit2]) y recibe el nombre de (co)homología de Hochschild-Mitchell.

Definición 3.1.22. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría k-lineal. Dada una n-upla*

$$(x_{n+1}, \dots, x_1)$$

*de $(n+1)$ objetos de $\mathcal{C}$, el k-**nervio** de esa sucesión es el k-módulo*

$${}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_{x_n} \otimes \dots \otimes {}_{x_2}\mathcal{C}_{x_1}.$$

*El k-**nervio de $\mathcal{C}$ de grado** n, ($n \in \mathbb{N}_0$), se define como*

$$\overline{N}_n = \bigoplus_{(n+1)\text{-uplas}} {}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_{x_n} \otimes \dots \otimes {}_{x_2}\mathcal{C}_{x_1},$$

si $n > 0$, y

$$\overline{N}_0 = \bigoplus_{x \in \mathcal{C}_0} {}_x\mathcal{C}_x.$$

Se definen los bifuntores de $\mathcal{C}^e$ en ${}_k\mathrm{Mod}$ asociados a los k-nervios de grado n como

$${}_y(N_n)_x = \bigoplus_{(n+1)-uplas} {}_y\mathcal{C}_{x_{n+1}} \otimes {}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_{x_n} \otimes \dots \otimes {}_{x_2}\mathcal{C}_{x_1} \otimes {}_{x_1}\mathcal{C}_x,$$

para $n > 0$, y

$${}_y(N_0)_x = \bigoplus_{1-uplas} {}_y\mathcal{C}_{x_1} \otimes {}_{x_1}\mathcal{C}_x.$$

*A partir de esto, se define el **complejo de Hochschild-Mitchell**,*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} N_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} N_1 \xrightarrow{d_1} N_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{C} \to 0,$$

donde d_i está dado por la fórmula usual del complejo de Hochschild, es decir,

$$d_n(f_0 \otimes \dots \otimes f_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_0 \otimes \dots \otimes f_k.f_{k+1} \otimes \dots \otimes f_{n+1}.$$

Este complejo es una resolución del $\mathcal{C}$-bimódulo $\mathcal{C}$. La demostración es la misma que para el caso de homología de Hochschild, pero la escribiremos por completitud. Por un lado, es evidente que $d_n \circ d_{n+1} = 0$, pues es un complejo simplicial. Para ver que es una resolución, definimos el morfismo de $\mathcal{C}$-módulos a derecha

$$s_n : N_n \to N_{n+1},$$

dado por ${}_x(s_n)_y(f_0 \otimes \dots \otimes f_{n+1}) = {}_x1_x \otimes f_0 \otimes \dots \otimes f_{n+1}$, si $f_0 \in {}_x\mathcal{C}_{x_0}$ y $f_{n+1} \in {}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_y$. Trivialmente s_n cumple que

$$s_n \circ d_{n+1} + d_{n+2} \circ s_{n+1} = Id_{n+1},$$

por lo que el complejo de Hochschild-Mitchell es una resolución.

Definición 3.1.23. *Dado un $\mathcal{C}$-bimódulo M, se considera el siguiente complejo de cocadenas*

$$0 \to \prod_{x \in \mathcal{C}_0} {}_xM_x \xrightarrow{d^0} \operatorname{Hom}(N_1, M) \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \operatorname{Hom}(N_n, M) \xrightarrow{d^n} \dots,$$

donde d está dada por la fórmula usual de la cohomología de Hochschild, y

$$C^n(\mathcal{C}, M) = \operatorname{Hom}(N_n, M) = \operatorname{Nat}(N_n, M)$$
$$= \prod_{(n+1)-uplas} \operatorname{Hom}_k({}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_{x_n} \otimes \cdots \otimes {}_{x_2}\mathcal{C}_{x_1}, {}_{x_{n+1}}M_{x_1}).$$

La cohomología $H^\bullet(\mathcal{C}, M)$ de este complejo se llama la ***cohomología de Hochschild-Mitchell con coeficientes en*** M.

Análogamente, se define la homología tomando en cuenta el siguiente complejo de cadenas

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} M \otimes N_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} M \otimes N_1 \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{x \in \mathcal{C}_0} {}_xM_x \to 0,$$

donde d está dada por la fórmula usual de la homología de Hochschild, y

$$C_n(\mathcal{C}, M) = M \otimes_{\mathcal{C}^e} N_n$$
$$= \bigoplus_{(n+1)-uplas} {}_{x_1}M_{x_{n+1}} \otimes {}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_{x_n} \otimes \cdots \otimes {}_{x_2}\mathcal{C}_{x_1}.$$

La homología $H_\bullet(\mathcal{C}, M)$ de este complejo se llama la ***homología de Hochschild-Mitchell con coeficientes en*** M.

Observación 3.1.24. *La resolución de Hochschild es una resolución $\mathcal{C}^e$-proyectiva. Esto quiere decir, que cada bifuntor de la forma N_n es $\mathcal{C}^e$-proyectivo (recordar que $\mathcal{C}$ es una categoría k-proyectiva). Para demostrar eso, se va a usar que, dados x, y elementos de $\mathcal{C}_0$ y V un k-módulo, existe una adjunción de la forma*

$$\operatorname{Nat}({}_{-}\mathcal{C}_x \otimes V \otimes {}_y\mathcal{C}_{-}, {}_{-}M_{-}) \simeq \operatorname{Hom}_k(V, {}_xM_y).$$

La demostración de este hecho es sencilla, pues de la definición de transformación natural, tenemos la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} {}_x\mathcal{C}_x \otimes V \otimes {}_y\mathcal{C}_y \arrow[r, "{}_xt_y"] \arrow[d, "f.-.g"] & {}_xM_y \arrow[d, "f.-.g"] \\ {}_{x'}\mathcal{C}_x \otimes V \otimes {}_y\mathcal{C}_{y'} \arrow[r, "{}_{x'}t_{y'}"] & {}_xM_y \end{tikzcd}$$

para $f \in {}_{x'}\mathcal{C}_x$ y $g \in {}_y\mathcal{C}_{y'}$. De esto, vemos que

$${}_{x'}t_{y'}(f \otimes v \otimes g) = {}_{x'}t_{y'}(f.({}_x1_x \otimes v \otimes {}_y1_y).g) = f.({}_xt_y({}_x1_x \otimes v \otimes {}_y1_y)).g.$$

Resulta entonces que una transformación natural está completamente determinada por el morfismo k-lineal ${}_xt_y({}_x1_x \otimes - \otimes {}_y1_y)$, y se obtiene entonces la adjunción mencionada.

De la adjunción dicha, ahora resulta sencillo probar que N_n es $\mathcal{C}^e$-proyectivo. Como N_n es suma directa de bifuntores del tipo ${}_{-}\mathcal{C}_x \otimes \cdots \otimes {}_y\mathcal{C}_{-}$, luego N_n es proyectivo si y sólo si ${}_{-}\mathcal{C}_x \otimes \cdots \otimes {}_y\mathcal{C}_{-}$ es proyectivo, *para todo par x, y de elementos de $\mathcal{C}_0$. Entonces, basta demostrar que ${}_{-}\mathcal{C}_x \otimes \cdots \otimes {}_y\mathcal{C}_{-}$ es proyectivo, para todo par x, y de elementos de $\mathcal{C}_0$. Esto último equivale a poder extender un diagrama del tipo*

$$\begin{tikzcd} & {}_{-}\mathcal{C}_x \otimes \cdots \otimes {}_y\mathcal{C}_{-} \arrow[d, "t"] \\ {}_{-}M_{-} \arrow[r, "w"] & {}_{-}T_{-} \end{tikzcd}$$

donde M y T son $\mathcal{C}$-bimódulos, y t y w transformaciones naturales. Esto vale, porque si especializamos los bifuntores en un elemento $u \in \mathcal{C}_0$, y como ${}_u\mathcal{C}_x \otimes \cdots \otimes {}_y\mathcal{C}_u$ es un k-módulo proyectivo, podemos extender el morfismo ${}_ut_u$ a ${}_u\bar{t}_u$ para el diagrama

$$\begin{tikzcd} & {}_u\mathcal{C}_x \otimes \cdots \otimes {}_y\mathcal{C}_u \arrow[d, "{}_ut_u"] \arrow[dl, dashed, "\overline{{}_ut_u}"'] \\ {}_uM_u \arrow[r, "{}_uw_u"'] & {}_uT_u \end{tikzcd}$$

Por la adjunción anterior, esta flecha en realidad indica un levantamiento $\bar{t}$ de t como transformación natural.

Los grupos de homología y cohomología en grado cero son, respectivamente,

$$H_0(\mathcal{C}, M) = \bigoplus_{x \in \mathcal{C}_0} {}_xM_x / \langle \{ f.m - m.f : m \in {}_yM_x, f \in {}_x\mathcal{C}_y \} \rangle,$$

(cociente como k-módulos) que se denota también $M/[M, \mathcal{C}]$, y

$$H^0(\mathcal{C}, M) = \{ ({}_xm_x) \in \prod_{x \in \mathcal{C}_0} {}_xM_x : f.{}_xm_x = {}_ym_y.f, \textit{para todo } f \in {}_y\mathcal{C}_x \},$$

que se denota $M^{\mathcal{C}}$ (tiene también estructura de k-módulo).

Ahora vamos a ver una propiedad de la (co)homología de Hochschild-Mitchell que nos será útil. Para eso, primero necesitamos una definición:

Definición 3.1.25. *Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un $\mathcal{D}$-módulo a izquierda N y un funtor k-lineal F,*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

definimos el $\mathcal{C}$-módulo a izquierda FN dado por

$${}_x(FN) = {}_{F(x)}N,$$

donde $x \in \mathcal{C}$ y la acción esta dada por

$$f.n = F(f).n,$$

para $n \in {}_x(FN)$ y $f \in {}_z\mathcal{C}_x$. De manera análoga se puede hacer la construcción también para módulos a derecha.

Explicitaremos la construcción para bimódulos, ya que nos será de utilidad. Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un $\mathcal{D}$-bimódulo N y un funtor k-lineal F,

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

definimos el $\mathcal{C}$-bimódulo FN dado por

$$_x(FN)_y = {}_{F(x)}N_{F(y)},$$

donde $x \in \mathcal{C}$ y la acción está dada por

$$f.n.g = F(f).n.F(g),$$

para $n \in {}_x(FN)_y$, $f \in {}_z\mathcal{C}_x$ y $g \in {}_y\mathcal{C}_u$.

Observación 3.1.26. *Un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo a izquierda M resulta evidentemente un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, teniendo en cuenta el funtor*

$$I : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \rtimes G,$$

definido en los objetos como $I(x) = x$, y si $f \in {}_y\mathcal{C}_x$, entonces $I(f) = f \in {}_y\mathcal{C}_x \in {}_y(\mathcal{C} \rtimes G)_x$. Dado un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo M, denotaremos también con M al $\mathcal{C}$-módulo IM sin que ello cause confusión alguna. De hecho, eso fue lo que se hizo en el lema 3.1.18.

Ahora podemos probar el siguiente teorema que indica que la (co)homología de Hochschild-Mitchell es invariante ante equivalencias de categorías (cf. [B-W], teo. 1.11, lema 1.13, pp. 190-191):

Teorema 3.1.27. *Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un $\mathcal{D}$-bimódulo N y un funtor k-lineal F,*

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

que es una equivalencia de categorías, entonces tenemos los siguientes isomorfismos de k-módulos

$$H^\bullet(\mathcal{C}, FN) \simeq H^\bullet(\mathcal{D}, N),$$
$$H_\bullet(\mathcal{C}, FN) \simeq H_\bullet(\mathcal{D}, N).$$

Demostración. Para la demostración necesitamos los lemas siguientes, duales entre sí:

Lema 3.1.28. *Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un $\mathcal{D}$-bimódulo N y dos funtores k-lineales F y G,*

$$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

naturalmante isomorfos, i.e., con un isomorfismo natural

$$t : F \to G,$$

entonces

$$\tilde{t}^\bullet F^\bullet = G^\bullet$$

en $H^\bullet(\mathcal{D}, N)$, donde $\tilde{t}$ es el morfismo de bimódulos dado por

$$\tilde{t} : FN \to GN$$
$$_x\tilde{t}_y(n) = t_x.n.t_y^{-1}.$$

Demostración. Tenemos el diagrama siguiente

$$
\begin{tikzcd}
 & C^\bullet(\mathcal{C}, FN) \arrow[dr, "\tilde{t}^\bullet"] \arrow[dd, equal] & \\
C^\bullet(\mathcal{D}, N) \arrow[ur, "F^\bullet"] \arrow[rr, "G^\bullet"] \arrow[dd, equal] & & C^\bullet(\mathcal{C}, GN) \arrow[dd, equal] \\
 & \prod\limits_{n\text{-uplas}} ({}_{x_1}\mathcal{C}_{x_2}, \ldots, {}_{x_n}\mathcal{C}_{x_{n+1}}; {}_{x_1}(FN)_{x_{n+1}}) \arrow[dr, "\tilde{t}^\bullet"] & \\
\prod\limits_{n\text{-uplas}} ({}_{y_1}\mathcal{D}_{y_2}, \ldots, {}_{y_n}\mathcal{D}_{y_{n+1}}; {}_{y_1}N_{y_{n+1}}) \arrow[ur, "F^\bullet"] \arrow[rr, "G^\bullet"] & & \prod\limits_{n\text{-uplas}} ({}_{x_1}\mathcal{C}_{x_2}, \ldots, {}_{x_n}\mathcal{C}_{x_{n+1}}; {}_{x_1}(GN)_{x_{n+1}})
\end{tikzcd}
$$

donde denotamos los productos tensoriales con comas, escribimos $(M; N)$ en lugar de $\mathrm{Hom}(M, N)$ y las flechas están dadas por las siguientes expresiones:

Para el caso de F^n

$$F^n : C^n(\mathcal{D}, N) \to C^n(\mathcal{C}, FN),$$

donde $F^n((\alpha_i)_{n\text{-uplas}}) = (F^n(\alpha_i))_{n\text{-uplas}}$ y

$$F^n(\alpha_i)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = \alpha_i(F(g_1) \otimes \cdots \otimes F(g_n)),$$

para $g_i \in {}_{y_i}\mathcal{C}_{y_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\alpha_i \in \mathrm{Hom}({}_{y_1}\mathcal{D}_{y_2} \otimes \cdots \otimes {}_{y_n}\mathcal{D}_{y_{n+1}}, {}_{y_1}N_{y_{n+1}})$; mientras que para el caso de G^n

$$G^n : C^n(\mathcal{D}, N) \to C^n(\mathcal{C}, GN),$$

donde $G^n((\alpha_i)_{n\text{-uplas}}) = (G^n(\alpha_i))_{n\text{-uplas}}$ y

$$G^n(\alpha_i)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = \alpha_i(G(g_1) \otimes \cdots \otimes G(g_n)).$$

con la misma notación que para F. Por otro lado,

$$\tilde{t}^n : C^n(\mathcal{C}, FN) \to C^n(\mathcal{C}, GN),$$

con $\tilde{t}^n((\beta_i)_{n\text{-uplas}}) = (\tilde{t}^n(\beta_i))_{n\text{-uplas}}$ y

$$\tilde{t}^n(\beta_i)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)) = {}_{x_1}\tilde{t}_{x_{n+1}}(\beta_i(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)),$$

para $f_i \in {}_{x_i}\mathcal{C}_{x_{i+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\beta_i \in \mathrm{Hom}({}_{x_1}\mathcal{C}_{x_2} \otimes \cdots \otimes {}_{x_n}\mathcal{C}_{x_{n+1}}, {}_{x_1}(FN)_{x_{n+1}})$.

Para probar el lema basta ver que $\tilde{t}^\bullet \circ F^\bullet$ y $G^\bullet$ son homotópicas, es decir, existe un morfismo $h^\bullet$

$$h^n : C^n(\mathcal{D}, N) \to C^{n-1}(\mathcal{C}, GN)$$

tal que

$$\tilde{t}^\bullet \circ F^\bullet - G^\bullet = d^\bullet \circ h^\bullet + h^\bullet \circ d^\bullet.$$

Este morfismo está dado por

$$h^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i h^{n,i},$$

donde

$$h^{n,i}((\beta_i))(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = (\beta_i)(G(f_1) \otimes \cdots \otimes G(f_i) \otimes t_{x_i} \otimes F(f_{i+1}) \otimes \cdots \otimes F(f_n)).$$

Mediante cálculos largos pero simples, se puede demostrar que

$$h^{n,j} \circ \partial^{n-1,i} = \begin{cases} \partial^{n,i} \circ h^{n-1,j-1}, & \textbf{si } i < j, \\ h^{n,i-1} \circ \partial^{n-1,i}, & \textbf{si } i = j, \\ \partial^{n,i-1} \circ h^{n-1,j}, & \textbf{si } i > j+1, \end{cases}$$
$$h^{n,0} \circ \partial^{n-1,0} = \tilde{t}^{n-1} \circ F^{n-1},$$
$$h^{n,n} \circ \partial^{n-1,n-1} = G^{n-1},$$

por lo que $h^\bullet$ es una homotopía cosimplicial (ver [Wei], pp. 268-269) y el lema queda demostrado.

□

Lema 3.1.29. *Dadas dos categorías k-lineales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, un $\mathcal{D}$-bimódulo N y dos funtores k-lineales F y G,*

$$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

naturalmante isomorfos, i.e., con un isomorfismo natural

$$t : F \to G,$$

entonces

$$\tilde{t}_\bullet F_\bullet = G_\bullet$$

en $H_\bullet(\mathcal{D}, N)$, donde $\tilde{t}$ es el morfismo de bimódulos dado por

$$\tilde{t} : FN \to GN$$
$${}_x\tilde{t}_y(n) = t_x.n.t_y^{-1}.$$

Demostración. Tenemos el diagrama siguiente

$$
\begin{tikzcd}
C_\bullet(\mathcal{C}, FN) \arrow[rr, "F_\bullet"] \arrow[dr, "\tilde{t}_\bullet"] \arrow[dd, equal] & & C_\bullet(\mathcal{D}, N) \arrow[dd, equal] \\
& C_\bullet(\mathcal{C}, GN) \arrow[ur, "G_\bullet"] \arrow[dd, equal] & \\
\bigoplus\limits_{n\text{-uplas}} {}_{x_{n+1}}(FN)_{x_1} , {}_{x_1}\mathcal{C}_{x_2} , \dots , {}_{x_n}\mathcal{C}_{x_{n+1}} \arrow[rr, "F_\bullet"] \arrow[dr, "\tilde{t}_\bullet"] & & \bigoplus\limits_{n\text{-uplas}} {}_{y_{n+1}}N_{y_1} , {}_{y_1}\mathcal{D}_{y_2} , \dots , {}_{y_n}\mathcal{D}_{y_{n+1}} \\
& \bigoplus\limits_{n\text{-uplas}} {}_{x_{n+1}}(GN)_{x_1} , {}_{x_1}\mathcal{C}_{x_2} , \dots , {}_{x_n}\mathcal{C}_{x_{n+1}} \arrow[ur, "G_\bullet"] &
\end{tikzcd}
$$

donde el producto tensorial lo denotamos por comas y las flechas están dadas por las siguientes expresiones:

Para el caso de F_n,

$$F_n : C_n(\mathcal{C}, FN) \to C_n(\mathcal{D}, N),$$

donde

$$F_n(m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = m \otimes F(f_1) \otimes \cdots \otimes F(f_n),$$

para $f_i \in {}_{x_i}\mathcal{C}_{x_{i+1}}$ $(i = 1, \dots, n)$, $m \in {}_{x_{n+1}}(FN)_{x_1}$; mientras que para el caso de G_n

$$G_n : C_n(\mathcal{C}, GN) \to C_n(\mathcal{D}, N),$$

donde

$$G_n(m' \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = m' \otimes G(f_1) \otimes \cdots \otimes G(f_n).$$

para $m' \in {}_{x_{n+1}}(GN)_{x_1}$. Por otro lado

$$\tilde{t}_n : C_n(\mathcal{C}, FN) \to C_n(\mathcal{C}, GN),$$

donde

$$\tilde{t}_n(m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)) = {}_{x_{n+1}}\tilde{t}_{x_1}(m) \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n,$$

con la misma notación que para F.

Para probar el lema basta ver que $G_\bullet \circ \tilde{t}_\bullet$ y $F_\bullet$ son homotópicas, es decir, existe un morfismo $h_\bullet$

$$h_n : C_n(\mathcal{C}, FN) \to C_{n+1}(\mathcal{D}, N)$$

tal que

$$F_\bullet - G_\bullet \circ \tilde{t}_\bullet = d_\bullet \circ h_\bullet + h_\bullet \circ d_\bullet.$$

Este morfismo está dado por

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i h_{n,i},$$

donde

$$h_{n,i}(m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = m.t_{x_1}^{-1} \otimes (G(f_1) \otimes \cdots \otimes G(f_i) \otimes t_{x_{i+1}} \otimes F(f_{i+1}) \otimes \cdots \otimes F(f_n)).$$

Mediante cálculos largos pero simples, se puede demostrar que

$$\partial_{n+1,i} \circ h_{n,j} = \begin{cases} h_{n+1,j-1} \circ \partial_{n,i}, & \text{si } i < j, \\ \partial_{n+1,i} \circ h_{n,i-1}, & \text{si } i = j, \\ h_{n+1,j} \circ \partial_{n,i-1}, & \text{si } i > j+1, \end{cases}$$
$$\partial_{n+1,0} \circ h_{n,0} = F_n,$$
$$\partial_{n+1,n+1} \circ h_{n,n} = G_n \circ \tilde{t}_n,$$

por lo que $h_\bullet$ es una homotopía simplicial (ver [Wei], pp. 268-269) y el lema queda demostrado.

□

Ahora el teorema es muy fácil de demostrar, ya que si G es el quasiinverso de F, entonces existe una equivalencia t entre los funtores $F \circ G$ y $id_{\mathcal{D}}$ por un lado, y una equivalencia t' entre los funtores $G \circ F$ y $id_{\mathcal{C}}$ por otro. Esto quiere decir que, por el lema 3.1.28,

$$\tilde{t}^\bullet \circ (F \circ G)^\bullet = \tilde{t}^\bullet \circ F^\bullet \circ G^\bullet = id_{\mathcal{D}^\bullet} = id,$$
$$\tilde{t'}^\bullet \circ (G \circ F)^\bullet = \tilde{t'}^\bullet \circ G^\bullet \circ F^\bullet = id_{\mathcal{C}^\bullet} = id,$$

por lo que $F^\bullet$ es un isomorfismo.

Análogamente, por el lema 3.1.29

$$\tilde{t}_\bullet \circ (F \circ G)_\bullet = \tilde{t}_\bullet \circ F_\bullet \circ G_\bullet = id_{\mathcal{D}_\bullet} = id,$$
$$\tilde{t'}_\bullet \circ (G \circ F)_\bullet = \tilde{t'}_\bullet \circ G_\bullet \circ F_\bullet = id_{\mathcal{C}_\bullet} = id,$$

por lo que $F_\bullet$ es un isomorfismo. El teorema queda demostrado.

□

Otra manera de demostrar el teorema anterior es la siguiente.

El funtor inducido por F de ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod}$ en ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod}$ es una equivalencia, pues F lo es, y por lo tanto es exacto y preserva objetos inyectivos y proyectivos. Por otro lado, como $H^\bullet(\mathcal{C}, -)$ es un δ-funtor universal coborrable (pues $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{C}^e}(\mathcal{C}, -)$ lo es), tenemos que la coleccción de funtores

$$A^n : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{k}\mathrm{Mod}$$
$$M \mapsto FM \mapsto H^n(\mathcal{C}, FM)$$

es un δ-funtor universal, pues es la composición de un funtor exacto que preserva inyectivos con un δ-funtor universal.

A su vez, la colección de funtores

$$B^n : {}_{\mathcal{D}}\mathrm{Mod} \to {}_{k}\mathrm{Mod}$$
$$M \mapsto H^n(\mathcal{D}, M)$$

es un δ-funtor universal, como se ve inmediatamente.

Como son dos δ-funtores universales, para que sean isomorfos en todo grado basta ver que son isomorfos en grado cero (ver [Wei], sección 2.1, p. 32). Es decir, hay que demostrar que

$$H^0(\mathcal{D}, M) \simeq H^0(\mathcal{C}, FM).$$

Para ello, definimos el morfismo natural

$$\begin{aligned} i : H^0(\mathcal{D}, M) &\to H^0(\mathcal{C}, FM) \\ ({}_y m_y)_{y \in \mathcal{D}_0} &\mapsto ({}_x im_x)_{x \in \mathcal{C}_0}, \end{aligned}$$

donde ${}_x im_x = {}_{F(x)} m_{F(x)}$.

Como $({}_y m_y)_{y \in \mathcal{D}_0} \in H^0(\mathcal{D}, M)$, se tiene que:

$${}_{y'} f_y . {}_y m_y = {}_{y'} m_{y'} . {}_{y'} f_y,$$

donde ${}_{y'} f_y \in {}_{y'} \mathcal{D}_y$, vemos trivialmente que

$${}_{x'} f_x . {}_x im_x = {}_{x'} im_{x'} . {}_{x'} f_x,$$

para ${}_{x'} f_x \in {}_{x'} \mathcal{C}_x$.

Si y no está en la imagen de F, como es una equivalencia, existe $x \in \mathcal{C}_0$ tal que $y \simeq F(x)$ con isomorfismo $h \in {}_{F(x)} \mathcal{D}_y$. Por la propiedad arriba mencionada para los elementos de $H^0(\mathcal{D}, M)$, resulta

$${}_y m_y = h^{-1} . {}_{F(x)} m_{F(x)} . h = h^{-1} . {}_x im_x . h,$$

es decir, el morfismo i es un isomorfismo.

De manera análoga se hace el caso homológico, teniendo en cuenta que las equivalencias son exactas, preservan objetos proyectivos, y el siguiente isomorfismo natural

$$\begin{aligned} j : H_0(\mathcal{D}, M) &\to H_0(\mathcal{C}, FM) \\ \overline{\sum_{y \in \mathcal{D}_0} {}_y m_y} &\mapsto \overline{\sum_{x \in \mathcal{C}_0} {}_x jm_x}, \end{aligned}$$

donde ${}_x jm_x = {}_{F(x)} m_{F(x)}$ (es claro que si la primera suma es de soporte finito entonces la segunda también). La buena definición de este morfismo es inmediata.

Que la flecha j sea un isomorfismo depende del siguiente hecho: si y no está en la imagen de F, como F es una equivalencia, existe $x \in \mathcal{C}_0$ tal que $y \simeq F(x)$ con isomorfismo $h \in {}_{F(x)} \mathcal{D}_y$. Por la propiedad para los elementos de $H_0(\mathcal{D}, M)$, i.e.,

$$\overline{{}_{y'} f_y . {}_y m_y} = \overline{{}_{y'} m_{y'} . {}_{y'} f_y},$$

resulta

$$\overline{{}_y m_y} = h^{-1} . \overline{{}_{F(x)} m_{F(x)}} . h = h^{-1} . \overline{{}_x im_x} . h,$$

es decir, el morfismo j es un isomorfismo.

No sólo se puede probar que la (co)homología de Hochschild-Mitchell es invariante ante equivalencias de categorías, sino también ante equivalencias Morita. Sabemos, de acuerdo con Mitchell (ver [Mit2], sección 3, p.18), que dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son equivalentes Morita si y sólo si las categorías $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}$ y $\widehat{\mathrm{Mat}(\mathcal{D})}$ son equivalentes, como ya contamos al principio de esta sección. Luego la (co)homología de Hochschild-Mitchell es invariante ante equivalencias Morita si y sólo si es invariante ante equivalencias, aditivización y completación idempotente.

Ya probamos que es invariante ante equivalencias. Vamos a ver los otros dos: aditivización y completación idempotente, es decir, vamos a probar que

Teorema 3.1.30. *La (co)homología de Hochschild-Mitchell es invariante ante equivalencias Morita.*

Para demostrarlo seguimos las líneas de la demostración anterior. Empezamos con la aditivización.

El funtor

$$mat : \mathcal{C} \to \mathrm{Mat}(\mathcal{C})$$

induce una equivalencia de categorías ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}\mathrm{Mod}$ que llamamos también mat. Queremos ver que

$$H^{\bullet}(\mathcal{C}, matM) \simeq H^{\bullet}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M),$$
$$H_{\bullet}(\mathcal{C}, matM) \simeq H_{\bullet}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M),$$

donde M es un $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$-módulo.

Para eso, definimos dos colecciones de funtores:

$$A^{\bullet} : {}_{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}\mathrm{Mod} \to {}_{k}\mathrm{Mod}$$
$$M \mapsto matM \mapsto H^{\bullet}(\mathcal{C}, matM),$$

y

$$B^{\bullet} : {}_{\mathrm{Mat}(\mathcal{C})}\mathrm{Mod} \to {}_{k}\mathrm{Mod}$$
$$M \mapsto H^{\bullet}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M),$$

y para la homología es igual.

Estas dos colecciones de funtores son δ-funtores universales (coborrables en el caso homológico y borrables en el caso cohomológico), pues el primero es composición de un funtor exacto que preserva proyectivos e inyectivos (pues es una equivalencia) y un δ-funtor universal; mientras que para el último es inmediato.

Como se dijo más arriba, basta probar que existe un isomorfismo natural en grado cero para que sean isomorfos en todos los grados. Por lo tanto hay que demostrar que

$$H^{0}(\mathcal{C}, matM) \simeq H^{0}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M),$$
$$H_{0}(\mathcal{C}, matM) \simeq H_{0}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M),$$

pero estas dos flechas son evidentes, pues las definimos igual que en el caso anterior

$$l : H^{0}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M) \to H^{0}(\mathcal{C}, matM)$$
$$\left({}_{(x_1,\dots,x_n)}m_{(x_1,\dots,x_n)}\right)_{(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{Mat}(\mathcal{C})_0} \mapsto ({}_{x}lm_{x})_{x\in\mathcal{C}_0},$$

donde ${}_{x}lm_{x} = {}_{x}m_{x}$, y

$$p : H_{0}(\mathrm{Mat}(\mathcal{C}), M) \to H_{0}(\mathcal{C}, matM)$$
$$\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{Mat}(\mathcal{C})_0} \overline{{}_{(x_1,\dots,x_n)}m_{(x_1,\dots,x_n)}} \mapsto \sum_{x\in\mathcal{C}_0} \overline{{}_{x}pm_{x}},$$

donde ${}_{x}pm_{x} = {}_{x}m_{x}$. La buena definición de la primer flecha es directa. Para la última flecha es bastante simple: la flecha p se define en

$$\bigoplus_{(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{Mat}(\mathcal{C})_0} {}_{(x_1,\dots,x_n)}M_{(x_1,\dots,x_n)}$$

de acuerdo con la fórmula anterior, y dado

$$h._{(x_1,\dots,x_n)}m_{(y_1,\dots,y_m)} - {}_{(x_1,\dots,x_n)}m_{(y_1,\dots,y_m)}.h,$$

donde $h \in {}_{(y_1,\dots,y_m)}\mathrm{mat}(\mathcal{C})_{(x_1,\dots,x_n)}$, si $n = m = 1$, tenemos $h \in {}_{y_1}\mathcal{C}_{x_1}$ y la imagen de p es

$$h._{x_1}pm_{y_1} - {}_{x_1}pm_{y_1}.h.$$

Además, estas dos flechas son evidentemente suryectivas.

Para concluir la demostración, deseamos hacer notar que los k-módulos

$${}_{(x_1,\dots,x_n)}M_{(x_1,\dots,x_n)}$$

sobre $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})$ se pueden ver como el espacio de matrices de elementos de ${}_{x_i}M_{x_j}$. Esto se debe a que los elementos $(x_1, \dots, x_n)$ son el coproducto de $x_1, \dots, x_n$, y entonces $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m))$ es el coproducto de (x_i, y_j) ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) en $\mathrm{Mat}(\mathcal{C})^e$ (ver observación 3.1.9), luego

$$M(\bigoplus_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} (x_i, y_j)) \simeq \bigoplus_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} M((x_i, y_j)),$$

ya que M es aditivo. Para nuestro caso, se cumple que las flechas p y l son inyectivas, es decir, que los elementos del tipo ${}_xm_x$ ($x \in \mathcal{C}_0$) determinan los demás, ya que dado ${}_{(x_1,\dots,x_n)}m_{(x_1,\dots,x_n)}$, tenemos que

$$e_i._{(x_1,\dots,x_n)}m_{(x_1,\dots,x_n)} = {}_{x_i}m_{x_i}.e_i,$$

donde $e_i \in {}_{x_i}\mathrm{Mat}(\mathcal{C})_{(x_1,\dots,x_n)}$ es el dado por

$$e_i = (0 \dots {}_{x_i}1_{x_i} \dots 0).$$

La igualdad anterior equivale a decir que la i-ésima fila de

$${}_{(x_1,\dots,x_n)}m_{(x_1,\dots,x_n)}$$

está determinada por ${}_{x_i}m_{x_i}$ ($i = 1, \dots n$). Luego las flechas l y p son isomorfismos, y obtenemos que la aditivización respeta la homología de Hochschild-Mitchell.

Para la completación idempotente es más sencillo. Tenemos el funtor

$$hat : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}},$$

que induce una equivalencia de categorías ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{Mod} \simeq {}_{\hat{\mathcal{C}}}\mathrm{Mod}$, que llamaremos también hat. Queremos ver que

$$H^\bullet(\mathcal{C}, hatM) \simeq H^\bullet(\hat{\mathcal{C}}, M),$$
$$H_\bullet(\mathcal{C}, hatM) \simeq H_\bullet(\hat{\mathcal{C}}, M),$$

donde M es un $\hat{\mathcal{C}}$-módulo.

Ahora tenemos dos colecciones de funtores:

$$A^\bullet : {}_{\hat{\mathcal{C}}}\mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod}$$
$$M \mapsto hatM \mapsto H^\bullet(\mathcal{C}, hatM),$$

y

$$\begin{aligned} B^\bullet : {}_{\hat{\mathcal{C}}}\mathrm{Mod} &\to \mathrm{Mod} \\ M &\mapsto H^\bullet(\hat{\mathcal{C}}, M), \end{aligned}$$

y para la homología es igual. Estas dos colecciones de funtores son δ-funtores universales al igual que antes (de hecho coborrables en el caso homológico y borrables en el caso cohomológico), pues el primero es composición de un funtor exacto que preserva proyectivos e inyectivos (pues es una equivalencia) y un δ-funtor universal; mientras que para el último es inmediato.

Como se dijo más arriba, basta probar que existe un ismorfismo natural en grado cero para que sean isomorfos en todos los grados.

Por lo tanto hay que probar que

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{C}, hatM) &\simeq H^0(\hat{\mathcal{C}}, M), \\ H_0(\mathcal{C}, hatM) &\simeq H_0(\hat{\mathcal{C}}, M), \end{aligned}$$

Para eso, definimos, al igual que en el caso anterior,

$$\begin{aligned} l : H^0(\hat{\mathcal{C}}, M) &\to H^0(\mathcal{C}, hatM) \\ \big({}_{(x,f)}m_{(x,f)}\big)_{(x,f)\in\hat{\mathcal{C}}_0} &\mapsto ({}_x lm_x)_{x\in\mathcal{C}_0}, \end{aligned}$$

donde ${}_x lm_x = {}_{(x,{}_x1_x)}m_{(x,{}_x1_x)}$, y

$$\begin{aligned} p : H_0(\hat{\mathcal{C}}, M) &\to H_0(\mathcal{C}, hatM) \\ \overline{\sum_{(x,f)\in\hat{\mathcal{C}}_0} {}_{(x,f)}m_{(x,f)}} &\mapsto \overline{\sum_{x\in\mathcal{C}_0} {}_x pm_x}, \end{aligned}$$

donde ${}_x pm_x = {}_{(x,{}_x1_x)}m_{(x,{}_x1_x)}$. La buena definición del primer morfismo es evidente. Vamos a demostrar la buena definición del segundo, que es bastante simple: la flecha p se define en $\bigoplus_{(x,f)\in\hat{\mathcal{C}}_0} {}_{(x,f)}M_{(x,f)}$ de acuerdo con la fórmula anterior, y dado

$$h.{}_{(x,f)}m_{(y,g)} - {}_{(x,f)}m_{(y,g)}.h,$$

donde $h \in {}_{(y,g)}\hat{\mathcal{C}}_{(x,f)}$, si $f = {}_x1_x$ y $g = {}_y1_y$, tenemos $h \in {}_y\mathcal{C}_x$ y la imagen de p es

$$h.{}_x pm_y - {}_x pm_y.h.$$

Estas dos flechas son evidentemente suryectivas. Como los objetos $\hat{\mathcal{C}}$ son retractos de los objetos de $\mathcal{C}$, vemos que los elementos del tipo ${}_x m_x$ ($x \in \mathcal{C}_0$) determinan completamente los de la forma ${}_{(x,f)}m_{(x,f)}$. Esto ocurre porque dado ${}_{(x,f)}m_{(x,f)}$, tenemos que

$$f.{}_{(x,f)}m_{(x,f)} = {}_x m_x.f,$$

ya que $f \in {}_{(x,{}_x1_x)}\hat{\mathcal{C}}_{(x,f)}$. Por otro lado, $f.{}_{(x,f)}m_{(x,f)} = {}_{(x,f)}m_{(x,f)}$, ya que también $f \in {}_{(x,f)}\hat{\mathcal{C}}_{(x,f)}$ y de hecho $f = {}_{(x,f)}1_{(x,f)}$. Luego l y p son isomorfismos.

3.2 Teoremas principales

Continuaremos ahora presentando las versiones homológica y cohomológica de una sucesión espectral de Grothendieck, que generaliza la presentada para el caso de la (co)homología de Hochschild que aparece en los teoremas 2.1.2 y 2.1.5.

Observación 3.2.1. *Dados una k-categoría $\mathcal{C}$ con la acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo a izquierda M, vemos de manera inmediata que los grupos de homología $H_n(\mathcal{C}, M)$ y de cohomología $H^n(\mathcal{C}, M)$ son $k[G]$-módulos a izquierda. Vamos a demostrarlo en detalle.*

Para el caso homológico sólo hay que definir una acción de G en $C_n(\mathcal{C}, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ que sea compatible con los diferenciales. La accción es la evidente:

$$s.(m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = s.m \otimes s.f_1 \otimes \cdots \otimes s.f_n.$$

Esta acción es tal que el complejo de Hochschild asociado a M:

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M \otimes N_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M \otimes N_n \xrightarrow{d_n} \ldots,$$

con

$$\begin{aligned} d_n(m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) &= m.f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_i.f_{i+1} \otimes \cdots \otimes f_n \\ &+ (-1)^n f_n.m \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_{n-1} \end{aligned}$$

se vuelve un complejo de G-módulos, como se ve inmediatamente (recordar que $s.(f.m) = (s.f).s.m$, y $s.(m.f) = s.m.(s.f)$). De aquí se ve directamente de la definición que los grupos de homología son $k[G]$-módulos.

Para el caso cohomológico, es análogo: dados una k-categoría $\mathcal{C}$ con la acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, vemos de manera inmediata que los grupos de cohomología $H^\bullet(\mathcal{C}, M)$ son $k[G]$-módulos. Definimos una acción de G en $\operatorname{Hom}_k(N_n, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. La accción es la evidente:

$$(s.\phi)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = s.(\phi(s^{-1}.f_1 \otimes \cdots \otimes s^{-1}.f_n)).$$

Esta acción es tal que el complejo cohomológico de Hochschild asociado a M:

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} \operatorname{Hom}_k(N_n, M) \xrightarrow{d^n} \operatorname{Hom}_k(N_{n+1}, M) \xrightarrow{d^{n+1}} \ldots,$$

con

$$d^n(\phi)(f_0 \otimes \cdots \otimes f_n) = f_0 \phi(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \phi(f_0 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_{i-1}.f_i \otimes \cdots \otimes f_n) + (-1)^n \phi(f_0 \otimes \cdots \otimes f_{n-1}).f_n$$

se vuelve también un complejo de G-módulos, como se ve inmediatamente (recordar que $s.(f.m) = (s.f).(s.m)$ y $s.(m.f) = (s.m).(s.f)$). De manera semejante al caso homológico, se ve directamente de la definición que los grupos de cohomología son $k[G]$-módulos.

A su vez, dado un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo M, al considerar a M con la acción adjunta resulta un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo, por lo que en este caso también tenemos que $H^\bullet(\mathcal{C}, M)$ y $H_\bullet(\mathcal{C}, M)$ son $k[G]$-módulos.

Teorema 3.2.2. *Dados un cuerpo k, una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con la acción de un grupo G, y un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral homológica convergente (ver observación 3.1.26)*

$$^{I}E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(\mathcal{C}, M)) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{C} \rtimes G, M).$$

Demostración. Para demostrar este resultado, utilizamos la sucesión espectral de Grothendieck (ver [Wei], 5.8.3, pp.150-152). En otras palabras, tenemos tres funtores

$$\begin{gathered} D : {}_{\mathcal{C}\rtimes G}\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}\rtimes G} \to {}_{k}\mathrm{Mod} \\ D(-) = (-)_{\mathcal{C}\rtimes G}, \\ E : {}_{\mathcal{C}\rtimes G}\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}\rtimes G} \to {}_{G}\mathrm{Mod} \\ E(-) = (-)_{\mathcal{C}}, \\ F : {}_{G}\mathrm{Mod} \to {}_{k}\mathrm{Mod} \\ F(-) = (-)_{G}, \end{gathered}$$

Como se ve inmediatamente estos funtores son tales que los derivados a izquierda de E y F son $H_\bullet(\mathcal{C}, -)$ y $H_\bullet(G, -)$ respectivamente (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303 y def 6.1.2, p. 161). Por otro lado, se ve fácilmemte que $F \circ E = D$. Falta ver que el funtor E manda objetos proyectivos en objetos F-acíclicos. Para demostrarlo, hay que tener en cuenta que $(-)_{\mathcal{C}}$ y $(-)_G$ respetan sumas directas (trivial), y por lo tanto basta probar que el funtor E manda el objeto libre ${}_{-}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(x_0,y_0)}$ en un objeto $k[G]$-playo (para todo $x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0$). Es decir, vamos a probar que $((\mathcal{C} \rtimes G)^e)_{\mathcal{C}}$ es un $k[G]$-módulo playo.

Para ver esto último, hay que notar que la siguiente aplicación ψ es un isomorfismo $k[G]$-lineal

$$\psi : ({}_{(-)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(x_0,y_0)})_{\mathcal{C}} \to k[G] \otimes {}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0},$$

donde todos los módulos están provistos de la acción adjunta. Vamos a bosquejar la demostración del isomorfismo anterior.

Para esto, es útil escribir la definición de $({}_{(-)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(x_0,y_0)})_{\mathcal{C}}$:

$$({}_{(-)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(x_0,y_0)})_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{x \in \mathcal{C}_0, s,t \in G} {}_{x}\mathcal{C}_{sx_0} \otimes {}_{y_0}\mathcal{C}_{ty} / \langle \{ f.c \otimes c' - c \otimes c'.f \} \rangle,$$

donde $f \in {}_{x}\mathcal{C}_{y}$, $c \in {}_{y}\mathcal{C}_{sx_0} \subset {}_{y}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0}$, $c' \in {}_{y_0}\mathcal{C}_{tx} \subset {}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x}$.

El morfismo ψ está dado por

$$\overline{f \otimes g} \mapsto s \otimes g.\tilde{t}(f),$$

donde $f \in {}_{x}\mathcal{C}_{sx_0} \subset {}_{x}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0}$, $g \in {}_{y_0}\mathcal{C}_{tx} \subset {}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x}$. Este morfismo está bien definido, ya que

$$\psi(f.c \otimes c' - c \otimes c'.f) = s \otimes c'.(f.c) - s \otimes (c'.f).c = 0.$$

Por otro lado este morfismo es $k[G]$-lineal, ya que

$$\begin{aligned} \psi(u.\overline{f \otimes g}) &= \psi(\overline{\tilde{u}(f) \otimes g}) = u.s \otimes g.\tilde{u}(f) \\ &= (u.s \otimes g.f) = u.(s \otimes g.f) = u.\psi(\overline{f \otimes g}), \end{aligned}$$

donde $u \in G$, $f \in {}_{x}\mathcal{C}_{sx_0} \subset {}_{x}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0}$, $g \in {}_{y_0}\mathcal{C}_{tx} \subset {}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x}$, y donde el módulo $({}_{(-)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(x_0,y_0)})_{\mathcal{C}}$ tiene la acción adjunta.

También tiene inversa, que denotaremos ϕ, definida como

$$s \otimes g \mapsto \overline{{}_{sx_0}1_{sx_0} \otimes g},$$

para $g \in {}_{y_0}\mathcal{C}_{tx_0} \subset {}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0}$.

El lema 2.1.3 implica que el funtor $- \otimes_{k[G]} (k[G] \otimes {}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0})$ es exacto, y por lo tanto $k[G] \otimes ({}_{y_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x_0})$ es $k[G]$-playo.

El teorema está demostrado.

□

Teorema 3.2.3. *Dados un cuerpo k, una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con la acción de un grupo G, y un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral cohomológica convergente (ver observación 3.1.26)*

$$^{I}E_2^{p,q} = H^p(G, H^q(\mathcal{C}, M)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{C} \rtimes G, M).$$

Demostración. Para demostrar este resultado, utilizamos la sucesión espectral de Grothendieck (ver [Wei], 5.8.3, pp.150-152). En otras palabras, tenemos tres funtores

$$\begin{gathered} D : {}_{\mathcal{C}\rtimes G}\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}\rtimes G} \to {}_{k}\mathrm{Mod} \\ D(-) = (-)^{\mathcal{C}\rtimes G} \\ E : {}_{\mathcal{C}\rtimes G}\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}\rtimes G} \to {}_{G}\mathrm{Mod} \\ E(-) = (-)^{\mathcal{C}} \\ F : {}_{G}\mathrm{Mod} \to {}_{k}\mathrm{Mod} \\ F(-) = (-)^{G} \end{gathered}$$

Como se ve inmediatamente estos funtores son tales que los derivados a izquierda de E y F son $H^\bullet(\mathcal{C}, -)$ y $H^\bullet(G, -)$ respectivamente (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303 y def 6.1.2, p. 161). Por otro lado, se ve fácilmente que $F \circ E = D$. Falta ver que el funtor E manda objetos inyectivos en objetos F-acíclicos. Vamos a demostrarlo en detalle. Sea M un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo inyectivo. Por un lado, existe un morfismo

$$\begin{gathered} i : M \to \prod_{x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0}) \\ {}_{x_0}i(m)_{y_0}(c \otimes c') = c.m.c', \end{gathered}$$

donde $\mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})$ es un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo con la acción

$$(f.\phi.g)(c \otimes c') = \phi(c.f \otimes g.c'),$$

donde $f \in {}_{y}(\mathcal{C} \rtimes G)_{v}$, $g \in {}_{w}(\mathcal{C} \rtimes G)_{x}$, $\phi \in \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(y,x)}, {}_{x_0}M_{y_0})$, $c \in {}_{x_0}\mathcal{C}_{sy} \subset {}_{x_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{y}$ y $c' \in {}_{x}\mathcal{C}_{ty_0} \subset {}_{x}(\mathcal{C} \rtimes G)_{y_0}$. El morfismo es $(\mathcal{C} \rtimes G)^e$-lineal e inyectivo. La linealidad se ve inmediatamente, ya que i es producto de morfismos $(\mathcal{C} \rtimes G)^e$-lineales:

$$\begin{gathered} i(f.m.g)(c \otimes c') = c.f.m.g.c' \\ (f.i(m).g)(c \otimes c') = c.f.m.g.c' \end{gathered}$$

La inyectividad es también trivial.

Como M es inyectivo, existe un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo N tal que

$$M \oplus N \simeq \prod_{x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0}).$$

Al aplicar $(-)^{\mathcal{C}}$, resulta

$$M^{\mathcal{C}} \oplus N^{\mathcal{C}} \simeq \prod_{x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}},$$

ya que $(-)^{\mathcal{C}}$ conmuta con los productos.

Por lo tanto, demostrar que $M^{\mathcal{C}}$ es F-acíclico es equivalente a demostrar que $\prod_{x_0,y_0 \in \mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}}$ es F-acíclico. Vamos a probar esto último, i.e., veremos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Ext}^n_{k[G]}(k, \prod_{x_0, y_0 \in \mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}}) = 0.$$

Antes hay que probar que existe un isomorfismo de $k[G]$-módulos

$$\mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}} \simeq \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{y_0} \otimes k[G], {}_{x_0}M_{y_0}),$$

que sale directo de la definición, ya que, dada

$$\phi \in \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0}),$$

entonces

$${}_x(\overline{\phi})_x \in \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}}$$

si y sólo si

$${}_{y_0}\phi_{y_0} \in \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{y_0} \otimes k[G], {}_{x_0}M_{y_0}),$$

como se ve de

$$(f.{}_x(\phi)_x - {}_y(\phi)_y.f)(c \otimes c') = {}_x(\phi)_x(c.f \otimes c') - {}_y(\phi)_y(c \otimes f.c'),$$

para $c \in {}_{x_0}\mathcal{C}_{sy} \subset {}_{x_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_y$, $c' \in {}_x\mathcal{C}_{ty_0} \subset {}_x(\mathcal{C} \rtimes G)_{y_0}$, $f \in {}_y\mathcal{C}_x$. Luego obtenemos

$${}_x(\phi)_x(c \otimes c') = {}_{sy_0}(\phi)_{sy_0}(c.c' \otimes {}_{sy_0}1_{sy_0}),$$

lo que nos da el morfismo

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}} &\to \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{y_0} \otimes k[G], {}_{x_0}M_{y_0}) \\ {}_x(\phi)_x &\mapsto \overline{\phi} \end{aligned}$$

con $\overline{\phi}(c \otimes s) = {}_{sy_0}(\phi)_{sy_0}(c \otimes {}_{sy_0}1_{sy_0})$, que es el isomorfismo buscado, ya que su inversa es

$$\begin{aligned} \beta : \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C} \rtimes G)_{y_0} \otimes k[G], {}_{x_0}M_{y_0}) &\to \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C} \rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}} \\ \overline{\phi} &\mapsto {}_x(\phi)_x \end{aligned}$$

donde

$${}_x(\phi)_x(c \otimes c') = \overline{\phi}(c.c' \otimes {}_{sy_0}1_{sy_0}).$$

Para terminar la demostración, hay que notar que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ext}^n_{k[G]}(k, \prod_{x_0,y_0\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C}\rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}}) \\
&\simeq H^n(\mathrm{Hom}_{k[G]}(P_\bullet, \prod_{x_0,y_0\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{C}\rtimes G)^e_{(-)}, {}_{x_0}M_{y_0})^{\mathcal{C}})) \\
&\simeq H^n(\prod_{x_0,y_0\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_{k[G]}(P_\bullet, \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C}\rtimes G)_{y_0}\otimes k[G], {}_{x_0}M_{y_0}))) \\
&\simeq H^n(\prod_{x_0,y_0\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C}\rtimes G)_{y_0}\otimes k[G]\otimes_{k[G]} P_\bullet, {}_{x_0}M_{y_0})) \\
&\simeq H^n(\prod_{x_0,y_0\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C}\rtimes G)_{y_0}\otimes P_\bullet, {}_{x_0}M_{y_0})) \simeq 0,
\end{aligned}$$

donde empleamos el lema 2.1.3 y donde el último isomorfismo se debe a que $P_\bullet$ es un complejo exacto y k un cuerpo, con lo que cada cohomología resulta

$$H^n(\mathrm{Hom}_k({}_{x_0}(\mathcal{C}\rtimes G)_{y_0}\otimes P_\bullet, {}_{x_0}M_{y_0}))) \simeq 0,$$

es decir, es exacto, y como la categoría de módulos es AB4*, el producto de exactos es exacto. El teorema está demostrado.

□

A partir de los teoremas 3.1.27, 3.2.2 y 3.2.3 obtenemos los siguientes corolarios, que son una aplicación de la sucesión espectral demostrada anterior para los cubrimientos de Galois. Se obtienen entonces como caso particular las sucesiones espectrales de [C-R].

Corolario 3.2.4. *Dados un cuerpo k, una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción libre de un grupo G, y un $\mathcal{C}/G$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral homológica convergente*

$$H_n(G, H^m(\mathcal{C}, LM)) \Rightarrow H_{n+m}(\mathcal{C}/G, M).$$

donde L denota el funtor del cubrimiento de Galois, i.e.,

$$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/G$$

que cumple que

$$L(x) = \overline{x} \in (\mathcal{C}/G)_0,$$

y si $f \in {}_y\mathcal{C}_x$,

$$L(f) = \overline{f} \in (\bigoplus_{s,t\in G} {}_{sy}\mathcal{C}_{tx})/G.$$

Demostración. Por un lado, existe una equivalencia entre las categorías $\mathcal{C}/G$ y $\mathcal{C}\rtimes G$ dada por el funtor

$$L' : \mathcal{C}\rtimes G \to \mathcal{C}/G$$

definido en los objetos mediante $L'(x) = \overline{x} \in (\mathcal{C}/G)_0$, y si $f \in {}_y\mathcal{C}_{s'x} \subset {}_y(\mathcal{C}\rtimes G)_x$, $L'(f) = \overline{f} \in (\bigoplus_{s,t\in G} {}_{sy}\mathcal{C}_{ts'x})_G$ (ver [C-M], Theorem 2.8, p. 5, o si no observación 3.1.17) Por el teorema 3.1.27

$$H_n(\mathcal{C}/G, M) \simeq H_n(\mathcal{C}\rtimes G, L'M).$$

Pero por el teorema 3.2.2, tenemos una sucesión espectral homológica convergente de la forma

$$H_n(G, H_m(\mathcal{C}, LM)) \Rightarrow H_{n+m}(\mathcal{C} \rtimes G, L'M).$$

Pero como se ve inmediatamente $IL'M = LM$ (ver observación 3.1.26), por lo que obtenemos

$$H_n(G, H_m(\mathcal{C}, LM)) \Rightarrow H_{n+m}(\mathcal{C} \rtimes G, L'M) \simeq H_{n+m}(\mathcal{C}/G, M),$$

con lo que el corolario queda demostrado.

□

Corolario 3.2.5. *Dados un cuerpo k, una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción libre de un grupo G, y un $\mathcal{C}/G$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral cohomológica convergente*

$$H^n(G, H^m(\mathcal{C}, LM)) \Rightarrow H^{n+m}(\mathcal{C}/G, M)).$$

donde L denota el funtor del cubrimiento de Galois.

Demostración. La demostración es completamente análoga a la anterior.

□

3.3 Ejemplos y Aplicaciones

3.3.1 Ejemplo principal

A partir de ahora desarrrolaremos la generalización para la (co)homología de Hochschild-Mitchell del ejemplo fundamental del capítulo anterior.

Empezaremos definiendo los análogos de los módulos $M \rtimes G$, $M_{\langle g\rangle}$ y $M.g$ para este caso:

Definición 3.3.1. *Dadas una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, un grupo G que actúa en $\mathcal{C}$ y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, definimos el funtor*

$$M \rtimes G : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{op} \to {}_k\mathrm{Mod}$$
$${}_x(M \rtimes G)_y = \bigoplus_{s\in G} {}_xM_{sy},$$

para $x, y \in \mathcal{C}_0$, y donde la acción de $\mathcal{C}$ en $M \rtimes G$ es la inducida de M. Además, dado g en G, definimos también $M.g$ y $M_{\langle g\rangle}$, subfuntores de $M \rtimes G$, como

$${}_x(M.g)_y = {}_xM_{gy},$$
$${}_x(M_{\langle g\rangle})_y = \bigoplus_{s\in\langle g\rangle} {}_xM_{sy},$$

para $x, y \in \mathcal{C}_0$, $g \in G$, donde las acciones son las inducidas de M.

Proposición 3.3.2. *Los tres funtores de la definición anterior son $\mathcal{C}$-bimódulos. Más aún, $M \rtimes G$ y $M_{\langle g\rangle}$ son $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulos a izquierda y a derecha con la acción adjunta, mientras que $M.g$ es un $\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-módulo.*

Demostración. Para demostrar este enunciado vamos a emplear el lema 3.1.18, es decir, vamos a probar que $M \rtimes G$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo (o sea, un $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{op}$-módulo) y tiene morfismos como dice el enunciado de ese lema. Vamos a probar el caso a izquierda ya que el caso a derecha sale de forma análoga. Sólo lo demostraremos para $M \rtimes G$, pues para los demás sale de inmediato de haberlo hecho para $M \rtimes G$.

Para ver que $M \rtimes G$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo, definimos

$${}_z\mathcal{C}_x \otimes {}_x(M \rtimes G)_y \otimes {}_y\mathcal{C}_u \to {}_z(M \rtimes G)_u$$
$$f \otimes m \otimes h \mapsto f.m.(s.h),$$

si $m \in {}_xM_{sy}$. A su vez, definimos

$$t : {}_y(M \rtimes G)_x \to {}_{ty}(M \rtimes G)_{tx}$$
$$m \mapsto t.m,$$

con $m \in {}_yM_{sx}$, $t \in G$. Notar que $t.m$ está dada por la acción de $\mathcal{C} \rtimes G$ en M.

Evidentemente, $M \rtimes G$ resulta ser un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo a izquierda, a través de la acción de $\mathcal{C}^e \rtimes G$ en M. Vamos a probarlo en detalle. Para eso vemos que el diagrama siguiente, dado por el lema 3.1.18, conmuta

$$\begin{tikzcd}
{}_{(v,z)}\mathcal{C}^e_{(y,x)} \otimes {}_y(M \rtimes G)_x \arrow[r, "\tilde{s}\otimes\overline{s}"] \arrow[d, "\rho"] & {}_{(sv,sz)}\mathcal{C}^e_{(sy,sx)} \otimes {}_{sy}(M \rtimes G)_{sx} \arrow[d, "\rho"] \\
{}_v(M \rtimes G)_z \arrow[r, "\overline{s}"] & {}_{sv}(M \rtimes G)_{sz}
\end{tikzcd}$$

El camino superior da

$$f \otimes m \otimes g \mapsto s.f \otimes s.m \otimes s.g \mapsto (s.f).(s.m).s.t.s^{-1}.(s.g),$$

para $f \in {}_v\mathcal{C}_y$, $g \in {}_x\mathcal{C}_z$, $m \in {}_yM_{tx}$; y el camino inferior da

$$f \otimes m \otimes g \mapsto f.m.(t.g) \mapsto s.(f.m.(t.g)).$$

Resulta evidente que $(s.f).(s.m).s.t.s^{-1}.(s.g) = s.(f.m.(t.g))$, ya que M es un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo.

Para la acción a derecha, la demostración es análoga, ya que tenemos que $M \rtimes G$ es un $\mathcal{C}$-bimódulo, y se tiene como definición de la acción a derecha de G

$$m.s = s^{-1}.m,$$

que cumple que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{}_{(v,z)}\mathcal{C}^e_{(y,x)} \otimes {}_y(M \rtimes G)_x \arrow[r, "\tilde{s}^{-1}\otimes\overline{s}"] \arrow[d, "\rho"] & {}_{(s^{-1}v,s^{-1}z)}\mathcal{C}^e_{(s^{-1}y,s^{-1}x)} \otimes {}_{s^{-1}y}(M \rtimes G)_{s^{-1}x} \arrow[d, "\rho"] \\
{}_v(M \rtimes G)_z \arrow[r, "\overline{s}"] & {}_{s^{-1}v}(M \rtimes G)_{s^{-1}z}
\end{tikzcd}$$

La proposición queda demostrada.

□

Además de ser $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo, $M \rtimes G$ es un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo con las acciones dadas por

$$f.m.g = f.s.m.t.g,$$

donde $f \in {}_z\mathcal{C}_{sy} \subset {}_z(\mathcal{C} \rtimes G)_y$, $m \in {}_yM_{t.x} \subset {}_y(M \rtimes G)_x$ y $g \in {}_x\mathcal{C}_{uw} \subset {}_x(\mathcal{C} \rtimes G)_w$.

A partir de esta definición obtenemos las acciones a izquierda y a derecha del grupo G en el módulo M:

$$\begin{aligned} \overline{s}^l : {}_x(M \rtimes G)_y &\to {}_{sx}(M \rtimes G)_y \\ m &\mapsto \overline{s}(m), \end{aligned}$$

para $m \in {}_xM_{ty}$ y $\overline{s}$ la aplicación definida en la proposición anterior, y

$$\begin{aligned} \overline{s}^r : {}_x(M \rtimes G)_y &\to {}_x(M \rtimes G)_{s^{-1}y} \\ m &\mapsto m, \end{aligned}$$

para $m \in {}_xM_{ty}$ (notar que $\overline{s}^r$ manda elementos de ${}_xM_{ty}$ en elementos de ${}_xM_{tss^{-1}y} \subset {}_x(M \rtimes G)_{s^{-1}y}$).

Estas acciones cumplen que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
{}_z\mathcal{C}_x \otimes {}_x(M \rtimes G)_y \arrow[r, "\tilde{s}\otimes\overline{s}^l"] \arrow[d, "\rho"] & {}_{sz}\mathcal{C}_{sx} \otimes {}_{sx}(M \rtimes G)_y \arrow[d, "\rho"] \\
{}_z(M \rtimes G)_y \arrow[r, "\overline{s}^l"] & {}_{sz}(M \rtimes G)_y
\end{tikzcd}$$

para la acción a izquierda (es consecuencia de la definición de $\overline{s}^l$, que coincide con $\overline{s}$ y teniendo en cuenta la acción a derecha de $M \rtimes G$), y

$$\begin{tikzcd} {}_x(M \rtimes G)_y \otimes {}_y\mathcal{C}_z \arrow[r, "\overline{s}^r \otimes \tilde{s}^{-1}"] \arrow[d, "\rho"] & {}_x(M \rtimes G)_{s^{-1}y} \otimes {}_{s^{-1}y}\mathcal{C}_{s^{-1}z} \arrow[d, "\rho"] \\ {}_x(M \rtimes G)_z \arrow[r, "\overline{s}^r"] & {}_x(M \rtimes G)_{s^{-1}z} \end{tikzcd}$$

para la acción a derecha (es inmediato de la definición de $\overline{s}^r$), que muestran que $M \rtimes G$ es un $\mathcal{C} \rtimes G$-módulo a izquierda y a derecha respectivamente.

También, se cumple la compatibilidad de las acciones, es decir

$$\overline{s}^l(f.m.g) = \tilde{s}(f).\overline{s}^l(m).g,$$
$$\overline{s}^r(f.m.g) = f.\overline{s}^r(m).\tilde{s}^{-1}(g),$$

y

$$\overline{t}^r((\overline{s}^l(f.m.g))) = \overline{s}^l((\overline{t}^r(f.m.g))),$$

es decir, $M \rtimes G$ es un $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo.

Observación 3.3.3. *Las acciones de la proposición 3.3.2 son las acciones adjuntas a izquierda y a derecha de la estructura de $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo de $M \rtimes G$.*

Veamos ahora los enunciados para el caso Hochschild-Mitchell correspondientes a las proposiciones 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6 del capítulo anterior.

Proposición 3.3.4. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, el morfismo de k-módulos*

$$M \rtimes G/[M \rtimes G, \mathcal{C}] \to \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} M_{\langle g\rangle}/[M_{\langle g\rangle}, \mathcal{C}]$$
$$\overline{{}_x m_{sx}}^{[M\rtimes G,\mathcal{C}]} \mapsto \overline{{}_x m_{sx}}^{[M_{\langle g\rangle},\mathcal{C}]},$$

resulta un isomorfismo de $k[G]$-módulos natural en M.

Demostración. Por las aclaraciones anteriores, tenemos que

$$M \rtimes G/[M \rtimes G, \mathcal{C}] = \bigoplus_{x\in\mathcal{C}_0} {}_x(M \rtimes G)_x/\langle\{f.m - m.f : m \in {}_yM_x, f \in {}_x\mathcal{C}_y\}\rangle.$$

Se ve trivialmente que el k-módulo $M \rtimes G/[M \rtimes G, \mathcal{C}]$ es un $k[G]$-módulo, ya que por un lado

$$s.(f.m - m.f) = (s.f).(s.m) - (s.m).(s.f),$$

y por otro

$$M \rtimes G \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} M_{\langle g\rangle},$$

donde $\simeq$ denota un isomorfismo natural como $\mathcal{C}^e \rtimes G$-bimódulos, y está dado por la siguiente "identidad"

$${}_yt_x : \bigoplus_{s\in G} {}_yM_{sx} \to \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} \bigoplus_{s\in\langle g\rangle} {}_yM_{sx}.$$

Sea ahora el morfismo

$$\psi : \bigoplus_{x\in\mathcal{C}_0} {}_x(M \rtimes G)_x \to \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} M_{\langle g\rangle}/[M_{\langle g\rangle}, \mathcal{C}]$$
$${}_x m_{sx} \mapsto \overline{{}_x m_{sx}}^{[M_{\langle s\rangle},\mathcal{C}]}.$$

Esta flecha es $\mathcal{C}^e \rtimes G$-lineal, pues

$$\begin{aligned}\psi(f.m.h) = \psi(f.(t.m).(t.(s.h))) &= \overline{(f.(t.m).(t.(s.h)))} \\ &= f.(t.\overline{m}).(t.(s.h)) = f.\overline{m}.h,\end{aligned}$$

para $f \in {}_y\mathcal{C}_{tx}$, $m \in {}_xM_{sx}$, $h \in {}_x\mathcal{C}_z$ (los puntos indican acción donde corresponda, en tanto el punto de la primera igualdad indica acción de $\mathcal{C} \rtimes G$, mientras que el segundo es la de $\mathcal{C}$).

También es claramente suryectiva y su núcleo es $[M \rtimes G, \mathcal{C}]$, usando la descomposición

$$[M \rtimes G, \mathcal{C}] = \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} [M_{\langle g\rangle}, \mathcal{C}]$$

(como $k[G]$-módulos y que respeta la $\mathcal{C}^e$-linealidad).

La naturalidad es inmediata de la defininción. Esto concluye la demostración.

□

Tenemos por otro lado, la versión dual de la proposición anterior

Proposición 3.3.5. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, existe un isomorfismo de $k[G]$-módulos natural en M*

$$(M \rtimes G)^{\mathcal{C}} \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} (M_{\langle g\rangle})^{\mathcal{C}}.$$

Demostración. La demostración se basa en el sencillo hecho siguiente: la condición de invariancia preserva trivialmente sumas directas, i.e.,

$$(\bigoplus_{i\in I} N_i)^{\mathcal{C}} = \bigoplus_{i\in I}(N_i)^{\mathcal{C}},$$

para una colección de $\mathcal{C}$-módulos N_i.

Para probar esto, sea un elemento $(\sum_i {}_x(n_i)_x) \in \prod_{x\in\mathcal{C}_0} {}_x(\bigoplus_{i\in I} N_i)_x$ y sea $f \in {}_y\mathcal{C}_x$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}&(\sum_i {}_x(n_i)_x) \in (\bigoplus_{i\in I} N_i)^{\mathcal{C}} \\ &\Leftrightarrow f.(\sum_i {}_x(n_i)_x) = (\sum_i {}_y(n_i)_y).f \\ &\Leftrightarrow f.{}_x(n_i)_x = {}_y(n_i)_y.f, \forall i \in I.\end{aligned}$$

Es decir,

$$(\sum_i {}_x(n_i)_x) \in (\bigoplus_{i\in I} N_i)^{\mathcal{C}} \Leftrightarrow ({}_x(n_i)_x) \in (N_i)^{\mathcal{C}}, \forall i \in I.$$

Por otro lado, si N es un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo, luego $N^{\mathcal{C}}$ es un $k[G]$-módulo, pues de

$$f._x m_x = {_y m_y}.f,$$

para $f \in {_y\mathcal{C}_x}$, resulta

$$s.(f._x m_x) = s.({_y m_y}.f),$$

para todo $s \in G$.

Si elegimos $f = s^{-1}.h$, entonces obtenemos

$$h.(s._x m_x)) = s._y m_y.h,$$

o sea, $s.({_x m_x}) \in N^{\mathcal{C}}$.

Para el caso particular $N = M \rtimes G$ o $N = M_{\langle g\rangle}$, obtenemos que tanto $(M \rtimes G)^{\mathcal{C}}$ como $(M_{\langle g\rangle})^{\mathcal{C}}$ son $k[G]$-módulos.

El isomorfismo ahora es inmediato, ya que sólo es una descomposición como suma directa interna de $k[G]$-módulos. La naturalidad es también inmediata.

□

Proposición 3.3.6. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, hay un isomorfismo de $k[G]$-módulos natural en M*

$$i : M_{\langle g\rangle}/[M_{\langle g\rangle}, \mathcal{C}] \xrightarrow{\sim} k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M.g/[M.g, \mathcal{C}],$$

definido por $i(\overline{{_x m_{sx}}}) = t \otimes \overline{t^{-1}.m}$ si $s = t.g.t^{-1}$. La estructura de G-módulo de $k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M.g/[M.g, \mathcal{C}]$ es la dada por $k[G]$, es decir, es el $k[G]$-módulo inducido.

Demostración. Se ve que el morfismo de $k[G]$-módulos

$${_x m_{sx}} \mapsto t \otimes \overline{t^{-1}._x m_{sx}}$$

está bien definido, pues $t^{-1}._x m_{sx} \in {_{t^{-1}x}M_{gt^{-1}x}}$, y si $s = t.g.t^{-1} = u.g.u^{-1}$, luego $u^{-1}.t \in \mathcal{Z}(g)$, lo que implica que

$$\begin{aligned} t \otimes \overline{t^{-1}._x m_{gx}} &= u.u^{-1}.t \otimes \overline{t^{-1}._x m_{gx}} \\ &= u \otimes \overline{u^{-1}.t.t^{-1}._x m_{gx}} \\ &= u \otimes \overline{u^{-1}{_x m_{sx}}}. \end{aligned}$$

Por otro lado, se puede ver que $f.m - m.f \mapsto 0$, para $m \in {_y M_{sx}}$ y $f \in {_x\mathcal{C}_y}$, pues

$$f.m - m.f \mapsto t \otimes \overline{(t^{-1}.f).(t^{-1}\cdot m) - (t^{-1}.m).(t^{-1}.s.f)} = 0,$$

ya que $(t^{-1}.f).(t^{-1}\cdot m) - (t^{-1}.m).(t^{-1}.s.f)$ está en el $k[\mathcal{Z}(g)]$-módulo $[M.g, \mathcal{C}]$. Al pasar esta flecha al cociente se obtiene i.

A su vez, i tiene inversa dada por la extensión k-lineal del siguiente morfismo

$$\begin{gathered} j : k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M.g/[M.g, \mathcal{C}] \to M_{\langle g\rangle}/[M_{\langle g\rangle}, \mathcal{C}] \\ j(t \otimes \overline{m}) = \overline{t.m}, \end{gathered}$$

con $m \in {}_xM_{gx}$ y $g, t \in G$. Este morfismo es $k[G]$-lineal y está bien definido, pues la flecha $(t, \overline{m}) \mapsto \overline{t.m}$ está bien definida, es bilineal y $k[\mathcal{Z}(g)]$-balanceada. Esto último vale porque si $y \in \mathcal{Z}(g)$,

$$(tu, \overline{m}) \mapsto \overline{(tu).m},$$

y

$$(t, u.\overline{m}) \mapsto \overline{t.(u.m)},$$

son evidentemente iguales ($t, u \in G$, $m \in {}_xM_{gx}$). La buena definición sale de aplicar la flecha anterior a $(t, \overline{f.m} - \overline{m.f})$, con $f \in {}_x\mathcal{C}_y$ y $m \in {}_yM_{gx}$, lo que da

$$(t, \overline{f.m} - \overline{m.f}) \mapsto \overline{t.(f.m - m.(g.f))},$$

y la imagen es igual a

$$\overline{(t.f).(t.m) - (t.m).(t.(g.f))} = \overline{(t.f).(t.m) - (t.m).(t.(g.f))} = 0,$$

donde la última igualdad vale, pues si se toma $g' = t.g.t^{-1}$, $m' = t.m$, y $f' = t.f$, el último miembro tiene la forma $\overline{f'.m' - m'.(g'.f')}$, y $f'.m' - m'.(g'.f')$ está en $[M_{\langle g\rangle}, \mathcal{C}]$.

La flecha j es la inversa de i pues

$$\overline{m} \mapsto t \otimes \overline{t^{-1}.m} \mapsto \overline{m},$$

y

$$t \otimes \overline{m} \mapsto \overline{t.m} \mapsto t \otimes \overline{t^{-1}.(t.m)}.$$

La naturalidad es inmediata de la definición, con lo que la proposición está demostrada.

$\square$

Proposición 3.3.7. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, y dado $\{s_i : i = 1, \dots, n\}$ un conjunto de representantes de $\mathcal{Z}(g)\backslash G$, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$\begin{aligned}\phi : (M_{\langle g\rangle})^{\mathcal{C}} &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^{\mathcal{C}})\\ ({}_xm_{sx}) &\mapsto f,\end{aligned}$$

donde f es la extensión $\mathcal{Z}(g)$-lineal de $\sum_{i=1}^{n} k_i s_i \mapsto k_{i_0} s_{i_0}.({}_xm_{sx})$, si $s = s_{i_0}^{-1}.g.s_{i_0}$. La estructura de $k[G]$-módulo de $\mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^{\mathcal{C}})$ es la dada por $k[G]$, es decir, es el $k[G]$-módulo coinducido.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que tomamos $s = s_1^{-1}.g.s_1$. El morfismo ϕ está bien definido y es $k[G]$-lineal. La buena definición es inmediata. Vamos a demostrarlo en detalle la $k[G]$-linealidad. Por un lado, si $t.s.t^{-1} = t.s_1^{-1}.g.s_1.t^{-1} = s_{i_0}^{-1}.g.s_{i_0}$, entonces $\overline{s_{i_0}.t} = \overline{s_1}$, es decir, existe $z \in \mathcal{Z}(g)$ que cumple que $s_{i_0}.t = z.s_1$, y por lo tanto resulta

$$\begin{aligned}\phi(t.({}_xm_{sx}))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i) &= \phi((t.{}_xm_{sx}))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i)\\ &= k_{i_0} s_{i_0}.(t.({}_xm_{sx})) = k_{i_0} z(s_1.({}_xm_{sx})).\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} t.(\phi(({}_x m_{sx})))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i) = \phi(({}_x m_{sx}))((\sum_{i=1}^{n} k_i s_i).t) \\ = \phi(({}_x m_{sx}))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i.t) = k_{j_0} z'.(s_1.(({}_x m_{sx}))), \end{aligned}$$

donde j_0 es el único índice tal que $s_{j_0}.t = z'.s_1$, con $z' \in \mathcal{Z}(g)$ (es decir, $\overline{s_{j_0}.t} = \overline{s_1}$). Pero por lo dicho arriba $\overline{s_{i_0}.t} = \overline{s_1}$, es decir, $s_{i_0}.t = z.s_1$, y por lo tanto $j_0 = i_0$ y $z' = z$. Entonces resulta que

$$\phi(t.({}_x m_{sx}))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i) = t.(\phi(({}_x m_{sx})))(\sum_{i=1}^{n} k_i s_i),$$

o sea,

$$\phi(t.({}_x m_{sx})) = t.(\phi(({}_x m_{sx}))),$$

por lo que ϕ es $k[G]$-lineal.

A su vez, el morfismo ϕ tiene inversa dada por el morfismo siguiente

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], (M.g)^{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\sim} M^{\mathcal{C}}_{\langle g\rangle} \\ f \mapsto \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.f(s_i). \end{aligned}$$

La buena definición es inmediata. A su vez, la $k[G]$-linealidad también, ya que

$$\begin{aligned} \psi(t.f) = \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.(t.f)(s_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.f(s_i.t) = \sum_{i=1}^{n} t.t^{-1}.s_i^{-1}.f(z_i s_{\sigma(i)}) \\ = \sum_{i=1}^{n} t.(s_i.t)^{-1}.z_i.f(s_{\sigma(i)}) = \sum_{i=1}^{n} t.s_{\sigma(i)}^{-1} z_i^{-1}.z_i.f(s_{\sigma(i)}) \\ = t.\sum_{i=1}^{n} s_{\sigma(i)}^{-1}.f(s_{\sigma(i)}) = t.\psi(f) \end{aligned}$$

donde σ es la permutación generada al multiplicar por t los representantes de las coclases a derecha.

Los morfismos ϕ y ψ son inversos, como se ve de las siguientes cadenas de igualdades

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)(\sum_{i=1}^{n}(({}_x m_{s_i^{-1}.g.s_i x}))) = \psi(\sum_{i=1}^{n} \phi(({}_x m_{s_i^{-1}.g.s_i x}))) \\ = \sum_{i=1}^{n} \psi(\phi(({}_x m_{s_i^{-1}.g.s_i x}))) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}.\phi(({}_x m_{s_i^{-1}.g.s_i x}))(s_j) \\ = \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.(s_i.({}_x m_{s_i^{-1}.g.s_i x})) = \sum_{i=1}^{n}({}_x m_{s_i^{-1}.g.s_i x}), \end{aligned}$$

y

$$(\phi \circ \psi(f))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) = \phi(\sum_{i=1}^{n} s_i^{-1}.f(s_i))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \phi(s_i^{-1}.f(s_i))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j) = \sum_{i=1}^{n} \phi(s_i^{-1}.({}_x(m_i)_{gx}))(\sum_{j=1}^{n} k_j s_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_j({}_x(m_i)_{gx}) = \sum_{i=1}^{n} k_i.f(s_i) = f(\sum_{i=1}^{n} k_i.s_i),$$

donde se escribió $f(s_i) = ({}_x(m_i)_{gx})$, y hay que notar que $s_i^{-1}.({}_x m_{gx}) \in {}_{s_i^{-1}x}M_{s_i^{-1}.g.s_i.s_i^{-1}x}$. Esto concluye la demostración.

□

Análogamente al capítulo anterior, tenemos

Teorema 3.3.8. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$H_\bullet(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}) \simeq k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(\mathcal{C}, M.g).$$

Demostración. Definimos la siguiente colección de funtores ($n \in \mathbb{N}_0$)

$$F_n : {}_{\mathcal{C}^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de

$$M \mapsto M_{\langle g\rangle} \mapsto H_\bullet(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}),$$

donde $M_{\langle g\rangle} \in {}_{\mathcal{C}^e \rtimes G}\mathrm{Mod}$, y

$$E_n : {}_{\mathcal{C}^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores

$$M \mapsto M.g \mapsto H_\bullet(\mathcal{C}, M.g) \mapsto k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(\mathcal{C}, M.g),$$

donde $M.g \in {}_{\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ y $H_n(\mathcal{C}, M.g) \in {}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$.

Por la proposición anterior hay un isomorfismo natural en grado 0. Se demostrará que $F_\bullet$ y $E_\bullet$ son δ-funtores universales, ya que, como se sabe, si eso pasa, como existe un isomorfismo natural en grado cero, luego existe un único isomorfismo natural en cada grado (ver [Wei], sección 2.1, p. 32).

Veamos primero que son δ-funtores:

Para $E_\bullet$ hay que tener en cuenta que, por un lado $M \mapsto M.g$ es exacto (trivial) y por otro, preserva objetos proyectivos. Esto último se debe a que si M es $\mathcal{C}^e \rtimes G$-proyectivo, entonces es un sumando directo de un libre (esto vale para toda categoría, ver [Mit2], sección 3, pp. 17-18, o si no la observación 3.1.12). Como $-.g$ es exacto, si demostramos que preserva objetos libres, luego preserva también objetos proyectivos. Es fácil ver que $-.g$ preserva objetos libres, pues si M es $\mathcal{C}^e \rtimes G$-libre, entonces existe un conjunto I y, para todo i en I, existen elementos x_i, y_i en $\mathcal{C}_0$, tales que para todo par u, v de elementos de $\mathcal{C}_0$ resulta

$${}_uM_v \simeq \bigoplus_{i\in I} {}_{(u,v)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x_i,y_i)} = \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{s\in G} {}_u\mathcal{C}_{sx_i} \otimes {}_{sy_i}\mathcal{C}_v.$$

Así obtenemos que $M.g$ cumple

$$
\begin{aligned}
{}_u(M.g)_v &= {}_uM_{gv} \simeq \bigoplus_{i\in I} {}_{(u,gv)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x_i,y_i)} = \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{s\in G} {}_u\mathcal{C}_{sx_i} \otimes {}_{sy_i}\mathcal{C}_{gv} \\
&\simeq \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{s\in \mathcal{Z}(g)\backslash G}\bigoplus_{t\in\mathcal{Z}(g)} {}_u\mathcal{C}_{tsx_i} \otimes {}_{tsy_i}\mathcal{C}_{gv} = \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{s\in \mathcal{Z}(g)\backslash G} {}_{(u,gv)}(\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g))_{(sx_i,sy_i)},
\end{aligned}
$$

que es una suma directa de funtores $\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-libres. Además, como

$$M \mapsto H_\bullet(\mathcal{C}, M)$$

es un δ-funtor de ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ en ${}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$, y $M \mapsto k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} M$ es un funtor exacto (al componerlo con el funtor $H_\bullet(\mathcal{C}, -)$ da $H_\bullet(\mathcal{C}, -)^{(\mathcal{Z}(g)\backslash G)}$), por lo que al realizar la composición de los tres, $E_\bullet$ resulta un δ-funtor.

Para $F_\bullet$ hay que notar que $M \mapsto M_{\langle g\rangle}$ es un funtor exacto que preserva proyectivos. Esto último vale ya que $({}_{(-)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x,y)}).s$ es $\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-libre, para todo $s \in G$ y $x, y \in \mathcal{C}_0$ con lo que es $({}_{(-)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x,y)})_{\langle g\rangle}$ es $\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-libre, y por lo tanto $\mathcal{C}^e \rtimes G$-proyectivo, pues un funtor ${}_{(-)}(\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g))_{(x,y)}$ es sumando directo de ${}_{(-)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x,y)}$. Nuevamente $H_\bullet(\mathcal{C}, -)$ es un δ-funtor de ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes G}\mathrm{Mod}$ en ${}_G\mathrm{Mod}$ (ver la observación 3.3.9), por lo que al componerlo con el funtor anterior, resulta que $F_\bullet$ también es un δ-funtor.

A su vez los dos son δ-funtores universales, pues $H_\bullet(\mathcal{C}, -)$ coincide con $\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{C}^e}(-, \mathcal{C})$ (por la observación 3.1.24) Este último es un δ-funtor coborrable -coeffaceable- de ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes H}\mathrm{Mod}$ en ${}_H\mathrm{Mod}$, para cualquier grupo H que actúe en la categoría $\mathcal{C}$, (en particular para $H = G$ o $H = \mathcal{Z}(g)$, ver la observación 3.3.9), y es por lo tanto universal (ver [Wei], secciones 2.1 y 2.4, Exercise 2.4.5, pp. 30-32,49).

Vamos a ver que tanto $F_\bullet$ como $E_\bullet$ son coborrables, y por lo tanto universales. Ahora, como $F_\bullet = H_\bullet(\mathcal{C}, (-)_{\langle g\rangle})$, $(-)_{\langle g\rangle}$ es exacto y preserva proyectivos y $H_\bullet(\mathcal{C}, -)$ es coborrable, al componerlos resulta que $H_\bullet(\mathcal{C}, (-)_{\langle g\rangle}) = F_\bullet$ es coborrable y luego universal.

Para el segundo el razonamiento es análogo. Como $E_\bullet$ es la composición de $-.g$, que es exacto y preserva objetos proyectivos, con $k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(\mathcal{C}, -)$, que es $H_\bullet(\mathcal{C}, -)^{(\mathcal{Z}(g)\backslash G)}$ (por lo que es coborrable), luego resulta de la definición que es un δ-funtor coborrable.

$\square$

Observación 3.3.9. *Para ver que* $\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{C}^e}(-, \mathcal{C})$ *es un δ-funtor universal coborrable de* ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes H}\mathrm{Mod}$ *en* ${}_H\mathrm{Mod}$, *con cualquier grupo H que actúa en la categoría $\mathcal{C}$, basta ver que los $\mathcal{C}^e \rtimes H$-proyectivos son $\mathcal{C}^e$-proyectivos, pues entonces* $\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{C}^e}(-, \mathcal{C})$ *se anula en los $\mathcal{C}^e \rtimes H$-proyectivos. Para ver que un $\mathcal{C}^e \rtimes H$-proyectivo es $\mathcal{C}^e$-proyectivo, se hace lo siguiente: los $\mathcal{C}^e \rtimes H$-libres son $\mathcal{C}^e$-proyectivos (porque son libres), y luego los sumandos directos de los $\mathcal{C}^e \rtimes H$-libres (i.e. los $\mathcal{C}^e \rtimes H$-proyectivos) son sumandos directos de $\mathcal{C}^e$-libres, luego $\mathcal{C}^e$-proyectivos.*

Usando el teorema 3.3.8 y la proposición 3.3.4, se obtiene:

Teorema 3.3.10. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, existen isomorfismos $k[G]$-lineales naturales en M*

$$H_\bullet(\mathcal{C}, M \rtimes G) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H_\bullet(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_\bullet(\mathcal{C}, M.g).$$

Como una aplicación del teorema 3.3.10, tenemos el siguiente corolario

Corolario 3.3.11. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, resulta el siguiente isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$*

$$H_n(G, H_m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H_n(\mathcal{Z}(g), H_m(\mathcal{C}, M.g)).$$

Demostración. La demostración es inmediata del teorema 3.3.8 y el lema de Shapiro (ver [Wei], lema 6.3.2, pp.171-172)

$$H_n(G, H_m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H_n(G, H_m(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}))$$

$$\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H_n(G, k[G] \otimes_{k[\mathcal{Z}(g)]} H_m(\mathcal{C}, M.g)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle \in \langle G\rangle} H_n(\mathcal{Z}(g), H_m(\mathcal{C}, M.g)).$$

El corolario está demostrado.

□

Teorema 3.3.12. *Dados una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con una acción de un grupo G, un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, y un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, existe un isomorfismo $k[G]$-lineal natural en M*

$$H^\bullet(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^\bullet(\mathcal{C}, M.g)).$$

Demostración. A partir de la proposición 3.3.14, vemos que existe un isomorfismo natural

$$H^0(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}) \simeq \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^0(\mathcal{C}, M.g)).$$

Vamos a probar que para todo $n \in \mathbb{N}_0$ hay un isomorfismo natural entre $H^n(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle})$ y $\mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^n(\mathcal{C}, M.g))$.

Para eso, primero definimos la siguiente colección de funtores ($n \in \mathbb{N}_0$):

$$F^n : {}_{\mathcal{C}^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores

$$M \mapsto M_{\langle g\rangle} \mapsto H^n(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}),$$

donde $M_{\langle g\rangle} \in {}_{\mathcal{C}^e \rtimes G}\mathrm{Mod}$, y

$$E^n : {}_{\mathcal{C}^e \rtimes G}\mathrm{Mod} \to {}_G\mathrm{Mod},$$

dada por la composición de los funtores siguientes:

$$M \mapsto M.g \mapsto H^n(\mathcal{C}, M.g) \mapsto \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^n(\mathcal{C}, M.g)),$$

donde $M.g \in {}_{\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ y $H^n(\mathcal{C}, M.g) \in {}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$.

Por la última proposición, existe un isomorfimo natural en grado 0 entre $F^\bullet$ y $E^\bullet$. Vamos a demostrar que $F^\bullet$ y $E^\bullet$ son δ-funtores universales. Si eso pasa, como existe un isomorfismo natural en grado cero, luego existe un único isomorfismo en cada grado (ver [Wei], sección 2.1, p. 32).

Veamos que son δ-funtores:

Para $E^\bullet$ hay que tener en cuenta que $M \mapsto M.g$ es un funtor exacto de manera trivial, preserva productos y objetos inyectivos. Para demostrar esto último, sólo hay que notar que este funtor transforma al cogenerador inyectivo en la categoría de $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulos (ver [Mit1], capítulo IV, sección 3, pp. 102) $\prod_{x,y\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(-)}, C)$ en otro inyectivo (C es un cogenerador inyectivo en la categoría de k-módulos), pues

$$\begin{aligned}
&\prod_{x,y\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x',y')}, C).g \\
&\simeq \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0} {}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(x',y')}, C).g \\
&\simeq \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0, s\in G} {}_{(x,y)}\mathcal{C}^e_{(sx',sy')}, C).g \\
&\simeq \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0, s\in G} {}_{x}\mathcal{C}_{sx'} \otimes {}_{sy'}\mathcal{C}_{y}, C).g \\
&\simeq \mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0} \bigoplus_{u\in\mathcal{Z}(g)\backslash G} {}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g))_{(ux',uy')}, C).g \\
&\simeq \prod_{u\in\mathcal{Z}(g)\backslash G} \prod_{x,y\in\mathcal{C}_0} \mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g))_{(ux',uy')}, C).g
\end{aligned}$$

es inyectivo, y como $M \mapsto M.g$ preserva productos, luego preserva objetos inyectivos. A su vez, $M \mapsto H^\bullet(\mathcal{C}, M)$ es un δ-funtor (visto como funtor de ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$ en ${}_{\mathcal{Z}(g)}\mathrm{Mod}$, ver la observación 3.3.13) y $M \mapsto \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], M)$ es un funtor exacto, con lo que al componerlos se obtiene $H^\bullet(\mathcal{C}, -)^{\mathcal{Z}(g)\backslash G}$, que es un δ-funtor. Al realizar la composición de los tres, $E^\bullet$ resulta un δ-funtor.

Para $F^\bullet$ hay que notar que $M \mapsto M_{\langle g\rangle}$ es un funtor exacto que preserva objetos inyectivos. Esto último vale ya que $(\mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(-)}, C))_{\langle g\rangle}$ es $\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g)$-inyectivo para todo $x, y \in \mathcal{C}_0$, (ya que $\langle g\rangle \simeq \mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito). Como ${}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g))_{(-)}$ es sumando directo de ${}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(-)}$, es decir,

$$\mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes \mathcal{Z}(g))_{(-)}, C)$$

es sumando directo de $\mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(-)}, C)$, resulta que

$$(\mathrm{Hom}_k({}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes G)_{(-)}, C))_{\langle g\rangle}$$

es $\mathcal{C}^e \rtimes G$-inyectivo. Nuevamente $H^\bullet(\mathcal{C}, -)$ es un δ-funtor de ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes G}\mathrm{Mod}$ en ${}_G\mathrm{Mod}$ (ver la observación 2.2.13), por lo que al componerlo con el funtor anterior, $F^\bullet$ resulta un δ-funtor.

Ahora vamos a ver que los dos son δ-funtores universales. Para probarlo, vamos a emplear que $H^\bullet(\mathcal{C}, -)$ coincide con $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{C}^e}(\mathcal{C}, -)$ (ver [Wei], cor 9.1.5, p. 303). Éste último es un δ-funtor borrable -effaceable- de ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes H}\mathrm{Mod}$ en ${}_H\mathrm{Mod}$, para cualquier grupo H que actúe en $\mathcal{C}$, (en particular para $H = G$ o $H = \mathcal{Z}(g)$, ver la observación 2.2.13), y es por lo tanto universal (ver [Wei], secciones 2.1 y 2.4, Exercise 2.4.5, pp. 30-32,49).

Vamos a ver que tanto $F^\bullet$ como $E^\bullet$ son borrables, y por lo tanto universales. Para el caso de $F^\bullet$, hay que notar que $(-)_{\langle g\rangle}$ es un funtor exacto y preserva objetos inyectivos y $H^\bullet(\mathcal{C}, -)$ es un δ-funtor borrable. Entonces al componerlos, resulta que $H^\bullet(C, (-)_{\langle g\rangle}) = F^\bullet$ es borrable, y luego universal.

Para el segundo, el razonamiento es análogo. Como $E^\bullet$ es la composición del funtor exacto $(-).g$ (que preserva inyectivos) con

$$\mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H_\bullet(\mathcal{C}, -)),$$

que es $H^\bullet(\mathcal{C},-)^{\mathcal{Z}(g)\backslash G}$ (por lo que es borrable), $E^\bullet$ resulta un δ-funtor borrable.

□

Observación 3.3.13. *Para ver que* $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{C}^e}(\mathcal{C},-)$ *es un* δ*-funtor universal borrable de* ${}_{\mathcal{C}^e\rtimes H}\mathrm{Mod}$ *en* ${}_H\mathrm{Mod}$*, para cualquier grupo* H *que actúa en* $\mathcal{C}$*, basta ver que los objetos* $\mathcal{C}^e \rtimes H$*-inyectivos son* $\mathcal{C}^e$*-inyectivos, pues entonces* $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{C}^e}(\mathcal{C},-)$ *se anula en los objetos* $\mathcal{C}^e \rtimes H$*-inyectivos. Para demostrar que un objeto* $\mathcal{C}^e \rtimes H$*-inyectivo es* $\mathcal{C}^e$*-inyectivo, se hace lo siguiente:*

$$\mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0}{}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes H)_{(-)}, C)$$

es un cogenerador $\mathcal{C}^e \rtimes H$*-inyectivo, y luego los sumandos directos de productos de*

$$\mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0}{}_{(x,y)}(\mathcal{C}^e \rtimes H)_{(-)}, C) \simeq \prod_{s\in H}\mathrm{Hom}_k(\bigoplus_{x,y\in\mathcal{C}_0}{}_{(x,y)}\mathcal{C}^e_{s.(-)}, C)$$

(i.e., los objetos $\mathcal{C}^e \rtimes H$*-inyectivos) son sumandos directos de productos de un objeto* $\mathcal{C}^e$*-inyectivo, luego* $\mathcal{C}^e$*-inyectivos.*

Usando el teorema 3.3.12 y la proposición 3.3.5, obtenemos el segundo resultado principal de esta sección

Teorema 3.3.14. *Dados una categoría* k*-lineal* $\mathcal{C}$ *con una acción de un grupo* G*, un* $\mathcal{C}^e \rtimes G$*-módulo* M*, y un elemento* $g \in G$ *tal que* $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ *es finito, existe una cadena de isomorfismos* $k[G]$*-lineales naturales en* M

$$H^\bullet(\mathcal{C}, M \rtimes G) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H^\bullet(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle}) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^\bullet(\mathcal{C}, M.g)).$$

Como una aplicación del teorema 3.3.14, tenemos el siguiente corolario

Corolario 3.3.15. *Dados una categoría* k*-lineal* $\mathcal{C}$ *con una acción de un grupo* G*, un* $\mathcal{C}^e \rtimes G$*-módulo* M*, y un elemento* $g \in G$ *tal que* $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ *es finito, tenemos el siguiente isomorfismo* $k[G]$*-lineal natural en* M *para todo* $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$H^n(G, H^m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H^n(\mathcal{Z}(g), H^m(\mathcal{C}, M.g)).$$

Demostración. La demostración es inmediata del teorema 3.3.14 y el lema de Shapiro (ver [Wei], lema 6.3.2, pp.171-172)

$$\begin{aligned} H^n(G, H^m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H^n(G, H^m(\mathcal{C}, M_{\langle g\rangle})) \\ &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H^n(G, \mathrm{Hom}_{k[\mathcal{Z}(g)]}(k[G], H^m(\mathcal{C}, M.g))) \\ &\simeq \bigoplus_{\langle g\rangle\in\langle G\rangle} H^n(\mathcal{Z}(g), H^m(\mathcal{C}, M.g)). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.

□

Aplicando el corolario 3.3.11 y el teorema 3.2.2 para el el $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo $M \rtimes G$, obtenemos:

Corolario 3.3.16. *Dados un cuerpo k, una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con la acción de un grupo G, y un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, tenemos la siguiente sucesión espectral homológica*

$$^{I}E^2_{n,m} = H_n(G, H_m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \Rightarrow H_{n+m}(\mathcal{C} \rtimes G, M \rtimes G),$$

que puede descomponerse como

$$H_n(G, H_m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g \rangle \in \langle G \rangle} H_n(\mathcal{Z}(g), H_m(\mathcal{C}, M.g)).$$

A su vez, obtenemos el resultado dual, al aplicar el corolario 3.3.15 y el teorema 3.2.3 para el $\mathcal{C} \rtimes G$-bimódulo $M \rtimes G$:

Corolario 3.3.17. *Dados un cuerpo k, una categoría k-lineal $\mathcal{C}$ con la acción de un grupo G, un $\mathcal{C}^e \rtimes G$-módulo M, y un elemento $g \in G$ tal que $\mathcal{Z}(g)\backslash G$ es finito, tenemos la siguiente sucesión espectral cohomológica*

$$^{I}E_2^{n,m} = H^n(G, H^m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \Rightarrow H^{n+m}(\mathcal{C} \rtimes G, M \rtimes G),$$

que puede descomponerse como

$$H^n(G, H^m(\mathcal{C}, M \rtimes G)) \simeq \bigoplus_{\langle g \rangle \in \langle G \rangle} H^n(\mathcal{Z}(g), H^m(\mathcal{C}, M.g)).$$

3.3.2 Cohomología de árboles

Como una segunda aplicación, en esta subsección vamos a calcular la cohomología de Hochschild-Mitchell para un árbol numerable. Sabemos que para el caso de un álgebra de dimensión finita A, si es un árbol, sus grupos de cohomología $HH^n(A)$ son todos nulos para $n \geq 1$ (ver [Cib], remark, p. 646, y prop. pp. 647-648). Vamos a probar que esto vale en general, es decir, si una categoría $\mathcal{C}$ es localmente de dimensión finita y un árbol numerable (la definición se presenta a continuación), luego sus grupos de cohomología $HH^n(\mathcal{C})$ son todos nulos para $n \geq 1$. Empezamos recordando la definición de árbol (para la definición de un árbol para álgebras, ver [Red], example 3.2, p. 120).

Definición 3.3.18. *Dada una categoría k-lineal $\mathcal{C}$, se dice un* **árbol** *si no existe $x_0 \in \mathcal{C}_0$ tal que existan $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathcal{C}_0$ y $f_1, \dots, f_n$ no nulas, distintas entre sí y de múltiplos escalares de la identidad, que cumplen que $f_i \in {}_{x_{i-1}}\mathcal{C}_{x_i}$ o $f_i \in {}_{x_i}\mathcal{C}_{x_{i-1}}$ ($i = 1, \dots, n$, $x_n = x_0$).*

A pesar de que la definición de árbol en la teoría de representaciones de álgebras es sobre el quiver asociado al álgebra, deseamos hacer notar que en realidad no existe diferencia alguna (esto es estándar en la teoría de representaciones, ver por ejemplo [Bus], p. 5309): por un lado, dada un álgebra de dimensión finita, existe una categoría asociada, que cumple que es un árbol si y sólo si el quiver lo es; y por otro, si una categoría finita $\mathcal{C}$ es un árbol, el quiver asociado al álgebra de $\mathcal{C}$ es un árbol (para entender lo siguiente recomendamos [C-L-S], pp. 25-34).

Para ello, recordamos una construcción: dada un álgebra de dimensión finita A, si $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos de A, nos construimos una categoría $\mathcal{C}_A$ asociada a A, donde $(\mathcal{C}_A)_0 = \{x_1, \dots, x_n\}$ son n elementos cualesquiera, y ${}_{x_j}(\mathcal{C}_A)_{x_i} = e_j.A.e_i$. Luego, esta categoría cumple que su álgebra asociada es A y es equivalente Morita a la categoría formada por un solo objeto y con espacio de morfismos A (ver [C-R], prop. 2.8, pp. 6-7).

El conjunto de vértices Q_0 del quiver asociado a A coincide con $(\mathcal{C}_A)_0$, y la cantidad de flechas del vértices e_i al e_j del quiver está dada por la dimensión del espacio vectorial $e_j.(\mathrm{rad}(A)/\mathrm{rad}^2(A)).e_i$. El radical del álgebra $\mathrm{rad}(A)$ coincide con el k-espacio vectorial formado por los caminos de longitud mayor o igual a uno, que denotaremos F, cocientado con las relaciones ([C-L-S], prop. 2.3.4, pp. 34). Sin embargo, vemos inmediatamente que $e_j.A.e_i$ denota el k-espacio vectorial de todos los caminos (dirigidos) de e_i en e_j. Así, resulta inmediato ver que la categoría $\mathcal{C}_A$ es un árbol si y sólo si el quiver asociado al álgebra lo es.

Recíprocamente, dada una categoría finita $\mathcal{C}$, resulta inmediato que si es un árbol, luego el quiver del álgebra también los es. Nos construimos el álgebra asociada a $\mathcal{C}$, que denotaremos A. Si $\mathcal{C}$ es un árbol, luego las identidades en los objetos de la categoría forman un conjunto completo de idempotentes primitivos de A (son primitivos por la condición de árbol). A su vez, nuevamente $e_j.A.e_i$ es el k-espacio vectorial de todos los caminos dirigidos de e_i en e_j, tanto en el quiver como en la categoría, por lo que resulta que si $\mathcal{C}$ es un árbol, el quiver asociado a su álgebra también.

Presentamos también la siguiente definición

Definición 3.3.19. *Dado un anillo k, una* **torre de k-módulos** *es un sistema proyectivo en la categoría de k-módulos donde el conjunto de índices son los números naturales $\mathbb{N}$ con el orden usual.*

Dada una categoría $\mathcal{C}$, definimos el conjunto I de las subcategorías plenas finitas de $\mathcal{C}$, que es un conjunto parcialmente ordenado (POSET) para la inclusión. Si M es un $\mathcal{C}$-módulo a izquierda, y $\mathcal{D}$ es una subcategoría plena finita de $\mathcal{C}$, luego resulta también un $\mathcal{D}$-módulo a izquierda de manera natural, de acuerdo con la definición 3.1.25. Lo mismo vale para $\mathcal{C}$-módulos a derecha y para $\mathcal{C}$-bimódulos.

A partir del POSET anterior, vemos facilmente que el siguiente conjunto $\mathcal{A} = \{C^\bullet(\mathcal{D}, M), \mathcal{D} \in I\}$ es un sistema proyectivo, es decir, existen morfismos de cocadenas

$$\pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}} : C^\bullet(\mathcal{E}, M) \to C^\bullet(\mathcal{D}, M),$$

donde $\mathcal{D}, \mathcal{E} \in \mathcal{A}$, tales que

$$\pi^\bullet_{\mathcal{E}\leq\mathcal{F}} \circ \pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}} = \pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{F}}.$$

Vamos a probarlo en detalle. Para ello hay que notar que, de la definición de cohomología de Hochschild-Mitchell,

$$C^\bullet(\mathcal{D}, M) \simeq \prod_{y_{n+1},\dots,y_1 \in \mathcal{D}_0} \operatorname{Hom}({}_{y_{n+1}}\mathcal{D}_{y_n} \otimes \cdots \otimes {}_{y_2}\mathcal{D}_{y_1}, {}_{y_{n+1}}M_{y_1}),$$

por lo que el morfismo $\pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}}$ está inducido por la inclusión de categorías (i.e., la proyección de índices en $\mathcal{E}_0$ en índices en $\mathcal{D}_0$). Vemos trivialmente que $\pi^n_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}}$ es suryectiva para todo $n \in \mathbb{N}_0$, y $\mathcal{D}, \mathcal{E} \in I$. Por otro lado, estos morfismos trivialmente forman un morfismo de cocadenas, como se ve de escribir los morfismos de borde de los complejos de Hochschild-Mitchell. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{A}$ junto con los morfismos $\{\pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}} : \mathcal{D}, \mathcal{E} \in I\}$ forman un sistema proyectivo.

También notamos que, si definimos los morfismos inducidos por la inclusión

$$\pi^\bullet_{\mathcal{D}} : C^\bullet(\mathcal{C}, M) \to C^\bullet(\mathcal{D}, M),$$

éstas cumplen que

$$\pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}} \circ \pi^\bullet_{\mathcal{D}} = \pi^\bullet_{\mathcal{E}}.$$

Veremos que el límite inverso del sistema proyectivo dado por $(\mathcal{A}, \pi^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}})$ es $C^\bullet(\mathcal{C}, M)$ junto con los morfismos $\pi^\bullet_{\mathcal{D}}$. Para probarlo, sólo basta ver que, dado cualquier complejo de cocadenas $(B^\bullet, b^\bullet)$, junto con morfismos de cocadenas

$$p^\bullet_{\mathcal{D}} : B^\bullet \to C^\bullet(\mathcal{D}, M),$$

que cumplen que

$$p^\bullet_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}} \circ p^\bullet_{\mathcal{D}} = p^\bullet_{\mathcal{E}}, \forall \mathcal{D}, \mathcal{E},$$

existe un único morfismo $\psi^\bullet$ de $B^\bullet$ en $C^\bullet(\mathcal{C}, M)$ tal que $p^\bullet_{\mathcal{E}} = \pi^\bullet_{\mathcal{E}} \circ \psi^\bullet$, para todo $\mathcal{E} \in I$. Pero, como $C^n(\mathcal{C}, M)$ es el límite inverso de $(\mathcal{A}^n, \pi^n_{\mathcal{D}\leq\mathcal{E}})$ donde $\mathcal{A}^n = \{C^n(\mathcal{D}, M), \mathcal{D} \in I\}$, luego existe un único morfismo

$$\psi^n : B^n \to C^n(\mathcal{C}, M),$$

que cumple que $p^n_{\mathcal{E}} = \pi^n_{\mathcal{E}} \circ \psi^n$. Lo único que falta ver es el que $\psi^\bullet$ forman un morfismo de cocadenas. Vamos a demostrarlo en detalle.

Queremos ver que $\psi^{n+1} \circ b^n = d^n \circ \psi^n$, es decir,

$$(\psi^{n+1} \circ b^n)(b)_{(x_{n+1},\dots x_1)}(f) = (d^n \circ \psi^n)(b)_{(x_{n+1},\dots x_1)}(f),$$

para $b \in B^n$, $f \in \operatorname{Hom}({}_{x_{n+1}}\mathcal{C}_{x_n} \otimes \cdots \otimes {}_{x_2}\mathcal{C}_{x_1}, {}_{x_{n+1}}M_{x_1})$, y $(x_{n+1}, \dots x_1) \in \mathcal{C}_0^{n+1}$. Pero, dado $b \in B^n$, por definición del morfismo ψ^n,

$$(\psi^n(b))_{(x_{n+1},\dots,x_1)} = p^n_{\mathcal{E}}(b)_{(x_{n+1},\dots,x_1)},$$

para $\mathcal{E}$ cualquier subcategoría plena finita de $\mathcal{C}$ que cumpla que

$$(x_{n+1}, \dots x_1) \in \mathcal{E}_0^{n+1}.$$

Como el morfismo $\psi_{\mathcal{E}}^{\bullet}$ es un morfismo de cocadenas para todo $\mathcal{E} \in I$, luego $\psi^{\bullet}$ también.

Entonces, hemos probado que

$$\varprojlim_I C^{\bullet}(\mathcal{D}, M) = C^{\bullet}(\mathcal{C}, M),$$

para todo $\mathcal{C}$-módulo M.

De la misma manera, también vale que

$$\varprojlim_I C^{\bullet}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = C^{\bullet}(\mathcal{C}, \mathcal{C}),$$

como se ve trivialmente, ya que si tomamos $M = \mathcal{C}$, resulta $C^{\bullet}(\mathcal{D}, M) = C^{\bullet}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, para todo $\mathcal{D} \in I$ pues las subcategorías $\mathcal{D} \in I$ son plenas.

Si la categoría $\mathcal{C}$ es numerable, podemos definir el conjunto J como una colección numerable creciente de subcategorías plenas finitas de $\mathcal{C}$, y luego tomamos el subsistema proyectivo del anterior dado por

$$\mathcal{B} = \{C^{\bullet}(\mathcal{D}, M), \mathcal{D} \in J\},$$

con los mismos morfismos de cocadenas, i.e.,

$$\pi_{\mathcal{D} \leq \mathcal{E}}^{\bullet} : C^{\bullet}(\mathcal{E}, M) \to C^{\bullet}(\mathcal{D}, M),$$

donde $\mathcal{D}, \mathcal{E} \in J$. Notamos que $\mathcal{B}$ es una torre de k-módulos.

Como el sistema $\mathcal{B}$ es cofinal en $\mathcal{A}$, tienen el mismo límite inverso, por lo tanto

$$\varprojlim_J C^{\bullet}(\mathcal{D}, M) = C^{\bullet}(\mathcal{C}, M),$$

para todo $\mathcal{C}$-módulo M. Análogamente ocurre para el caso en que $\mathcal{C} = M$, con lo que

$$\varprojlim_J C^{\bullet}(\mathcal{D}, \mathcal{D}) = C^{\bullet}(\mathcal{C}, \mathcal{C}).$$

Definición 3.3.20. *Dados un POSET $(A, \leq)$ y un sistema proyectivo dado por $(C_a, f_{a\leq b})$, se dice que $(C_a, f_{a\leq b})$ satisface la* ***condición de Mittag-Leffler*** *si para todo $a \in A$, existe $b \geq a$ tal que la imagen de $f_{a\leq b} : C_b \to C_a$ es igual que la imagen de $f_{a\leq d} : C_d \to C_a$, para todo $d \geq b$. Se dice que $(C_a, f_{a\leq b})$ satisface la* ***condición de Mittag-Leffler trivial*** *si para todo $a \in A$, existe $b \geq a$ tal que la imagen de $f_{a\leq b} : C_b \to C_a$ es nula.*

La siguiente proposición se encuentra en [Wei] (prop 3.5.7, p. 83):

Proposición 3.3.21. *Dada una torre de k-módulos $(A_i, f_{i\leq j})$ que satisface la condición de Mittag-Leffler, resulta*

$$\varprojlim^1_{\mathbb{N}} A_i = 0.$$

El siguiente teorema se encuentra, para el caso homológico, en [Wei] (teo 3.5.8, pp 83-84). Para el caso cohomológico, que es el que nos interesa, la demostración es esencialmente la misma y la damos por completitud.

Teorema 3.3.22. *Dada una torre de complejos de cocadenas $(C_i^\bullet, f_{i\leq j}^\bullet)$ que satisface la condición de Mittag-Leffler con límite inverso $C^\bullet$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \to \varprojlim^1_{\mathbb{N}} H^{\bullet-1}(C_i) \to H^\bullet(C) \to \varprojlim_{\mathbb{N}} H^\bullet(C_i) \to 0.$$

donde $\varprojlim^1_{\mathbb{N}}$ indica el funtor derivado a derecha de $\varprojlim_{\mathbb{N}}$.

Demostración. Sean $B_i^\bullet \subset Z_i^\bullet \subset C_i^\bullet$ los complejos de cobordes, cociclos en el complejo C_i, de manera que $Z_i^\bullet/B_i^\bullet$ es el complejo de cocadenas $H^\bullet(C_i)$ con morfismos nulos. Al aplicar el funtor exacto a izquierda $\varprojlim_{\mathbb{N}}$ a

$$0 \to Z_i^\bullet \to C_i^\bullet \to^{d^\bullet} C_i^\bullet[-1] \to 0,$$

obtenemos que $\varprojlim^1_{\mathbb{N}} Z_i^\bullet$ es el sucomplejo $Z^\bullet$ de cociclos de $C^\bullet$. Si $B^\bullet$ denota el subcomplejo de cobordes de $C^\bullet$, luego $Z^\bullet/B^\bullet$ es el mismo complejo que $H^\bullet(C)$ con diferenciales nulas.

De la siguiente sucesión exacta

$$0 \to Z_i^\bullet \to C_i^\bullet \to^{d^\bullet} B_i^\bullet[-1] \to 0,$$

vemos que $\varprojlim^1_{\mathbb{N}} B_i^\bullet = (\varprojlim^1_{\mathbb{N}} B_i^\bullet[-1])[1] = 0$, y que la siguiente sucesión corta

$$0 \to B^\bullet[-1] \to \varprojlim_{\mathbb{N}} B_i^\bullet \to \varprojlim^1_{\mathbb{N}} Z_i^\bullet \to 0$$

es exacta.

Por otro lado, de la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \to B_i^\bullet \to Z_i^\bullet \to^{d^\bullet} H^\bullet(C_i) \to 0,$$

resulta que $\varprojlim^1_{\mathbb{N}} Z_i^\bullet \simeq \varprojlim^1_{\mathbb{N}} H^\bullet(C_i)$, y

$$0 \to \varprojlim_{\mathbb{N}} B_i^\bullet \to Z^\bullet \to \varprojlim_{\mathbb{N}} H^\bullet(C_i) \to 0,$$

es exacta.

Por lo tanto, tenemos la siguiente filtración de complejos

$$0 \subset B^\bullet \subset \varprojlim_{\mathbb{N}} B_i^\bullet \subset Z^\bullet,$$

con cocientes $B^\bullet$, $\varprojlim^1_{\mathbb{N}} H^\bullet(C_i)[1]$ y $\varprojlim_{\mathbb{N}} H^\bullet(C_i)$ respectivamente. De lo anterior y $H^\bullet(C) = C^\bullet/B^\bullet$ obtenemos la sucesión exacta corta que buscábamos.

□

Observación 3.3.23. *Análogamente al caso anterior, dada una torre de complejos de cadenas $((C_\bullet)_i, (f_\bullet)_{i\leq j})$ que satisface la condición de Mittag-Leffler con límite inverso $C_\bullet$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \to \varprojlim^1_{\mathbb{N}} H_{\bullet+1}(C_i) \to H_\bullet(C) \to \varprojlim_{\mathbb{N}} H_\bullet(C_i) \to 0.$$

La demostración es exactamente la misma que la anterior y como ya hemos dicho se encuentra en [Wei] (teo 3.5.8, pp. 83-84).

Observación 3.3.24. *La cardinalidad de la categoría es fundamental. Si no es numerable, no es posible emplear este procedimiento, ya que entonces $\varprojlim^n_I$ deja ser nulo para $n \geq 2$. De hecho, si tiene cardinal $\aleph_n$, luego ocurre que $\varprojlim^j_I = 0$ si $j \geq n+2$ (ver [Mit2], sección 16, p. 68-70), donde $\aleph_n$ indica el n-ésimo cardinal infinito ($n \geq 0$).*

Para el sistema proyectivo $\mathcal{B}$ antes definido, al aplicar el teorema 3.3.22, obtenemos de manera inmediata los siguientes teoremas que relacionan la cohomología de Hochschild-Mitchell de una categoría con la cohomología de Hochschild de las álgebras asociadas a sus subcategorías finitas.

Teorema 3.3.25. *Dada una categoría k-lineal numerable $\mathcal{C}$, y un $\mathcal{C}$-bimódulo M, tenemos la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \to \varprojlim{}_J^1 H^{\bullet-1}(\mathcal{D}, M) \to H^\bullet(\mathcal{C}, M) \to \varprojlim{}_J H^\bullet(\mathcal{D}, M) \to 0.$$

donde $\varprojlim{}_J^1$ indica el funtor derivado a derecha de $\varprojlim{}_J$.

Teorema 3.3.26. *Dada una categoría k-lineal numerable $\mathcal{C}$, tenemos la siguiente sucesión exacta corta*

$$0 \to \varprojlim{}_J^1 HH^{\bullet-1}(\mathcal{D}) \to HH^\bullet(\mathcal{C}) \to \varprojlim{}_J HH^\bullet(\mathcal{D}) \to 0.$$

donde $\varprojlim{}_J^1$ indica el funtor derivado a derecha de $\varprojlim{}_J$.

Ahora podemos probar que

Teorema 3.3.27. *Dada una categoría k-lineal numerable $\mathcal{C}$, que sea localmente de dimensión finita, si $\mathcal{C}$ es un árbol, luego $HH^n(\mathcal{C}) = 0$, para $n \geq 1$.*

Demostración. Si una categoría es un árbol, vemos trivialmenteque toda subcategoría también lo es. De la sucesión exacta corta del teorema 3.3.26, obtenemos que

$$\varprojlim{}_J^1 HH^{n-1}(\mathcal{D}) \simeq HH^n(\mathcal{C}),$$

para $n \geq 1$, ya que $HH^n(\mathcal{D}) = 0$, para $n \geq 1$, pues $\mathcal{D}$ es un árbol finito, y la homología de Hochschild-Mitchell coincide con la homología de Hochschild para categorías finitas (ver [Red], cor. 4.5, p. 125).

Si $n \geq 2$, luego, como $HH^{n-1}(\mathcal{D}) = 0$, para todo $\mathcal{D} \in J$, resulta

$$\varprojlim{}_J^1 HH^{n-1}(\mathcal{D}) = 0,$$

y por lo tanto

$$HH^n(\mathcal{C}) = 0.$$

Para el caso $n = 1$, como $HH^0(\mathcal{D}) = \mathcal{Z}(\mathcal{D})$, luego

$$\varprojlim{}_J^1 \mathcal{Z}(\mathcal{D}) \simeq HH^1(\mathcal{C}).$$

Pero como $\mathcal{D}$ es finita y $\mathcal{C}$ es localmente de dimensión finita, el álgebra asociada a $\mathcal{D}$ tiene dimensión finita, y por lo tanto $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ tiene dimensión finita. Entonces, $\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ cumple la condición de Mittag-Leffler trivialmente (por dimensión), por lo que

$$\varprojlim{}_J^1 \mathcal{Z}(\mathcal{D}) = 0,$$

es decir,

$$HH^1(\mathcal{C}) = 0.$$

El teorema queda demostrado.

□

Referencias

[A-F-L-S] Alev, J.; Farinati, M.; Lambre, T.; Solotar, A. *Hochschild (co)homology of fixed ponit subalgebras of $A_n(\mathbb{C})$ under finite group actions*. J. of Alg. **103**, (1995), pp. 221-233.

[A-K] André, Y.; Kahn, B. *Nilpotence, radicaux et structures monoïdales*. Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universitá de Padova **108**, (2002), pp. 107-291.

[B-W] Baues, H-J.; Wirsching, G. *Cohomology of small categories*. J. of Pure and App. Alg. **38**, (1985), pp. 187-211.

[Ben] Benson, D. J. *Representations and cohomology, I*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Bus] Bustamante, J. *On the fundamental group of a shurian algebra*. Comm. in Alg. **30(11)**, (2002), pp. 5307-5329.

[Cib] Cibils, C. *On the Hochschild cohomology of finite dimensional algebras*. Comm. in Alg. **16(3)**, (1988), pp. 645-649.

[C-L-S] Cibils, C.; Larrión, F.; Salmerón, L. *Métodos diagramáticos en la teoría de representaciones*. Monografías del Inst. de Matemática de la UNAM. México, 1982.

[C-M] Cibils, C.; Marcos, E. *Skew category, Galois covering and smash product of a category over a ring*. Aparecerá en J. of Alg. Preprint 2004. http://arxiv.org/abs/math.RA/0312214.

[C-R] Cibils, C.; Redondo M. J. *Cartan-Leray spectral sequence for Galois coverings of categories*. Aparecerá en J. of Alg. http://arxiv.org/abs/math.RA/0305218.

[C-S] Cibils, C.; Soltar, A. *Galois coverings, Morita equivalence and smash extensions of categories over a field*.

[Fre] Freyd, P. *Abelian categories*. Harper and Row, New York, 1964.

[Gro] Grothendieck, A. *Sur quelques points d'algèbre homologique*. Tohoku Math. J. **9**, (1957), pp. 119-221.

[Gui] Guichardet, A. *Suites espectrales à la Hochschild-Serre pour les produits croisés d'algèbres et de groupes*. J. of Alg. **235**, (2001), pp. 744-765.

[Lor] Lorenz, M. *On the homology of graded algebras*. Comm. in Alg. **20(2)**, (1992), pp. 489-507.

[Mit1] Mitchell, B. *Theory of categories*. Academic Press Inc., 1965.

[Mit2] Mitchell, B. *Rings with several objects*. Adv. in Math. **8**, (1972), pp. 1-161.

[Nis] Nistor, V. *Group cohomology and the cyclic cohomology of crossed products*. Inventiones mathematicae **99**, (1990), pp. 411-424.

[Red] Redondo, M.J. *Hochshcild cohomology: some methods for computations*. Rasenhas IME-UMP **5(2)**, (2001), pp. 113-137.

[Ste] Stefan, D. *Hochschild cohomology on Hopf Galois extensions*. J. of Pure and App. Alg. **103**, (1995), pp. 221-233.

[Tak] Takeuchi, M. *Morita theorems for categories of comodules*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24**, (1977), pp. 1483-1528.

[Til] Tillmann, U. *S-structures for k-linear and the definition of a modular functor*. http://www.arxiv.org/PS-cache/math/pdf/9802/9802089.

[Wei] Weibel, C. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.