

# Introduction à l'optique diffractive non linéaire à phases courbes

La description précise d'une onde (sonore, lumineuse, . . . ) n'est pas aisée, en particulier parce qu'elle fait intervenir des échelles (de temps, d'espace) très différentes. Ainsi, pour analyser un faisceau laser à l'échelle des variations du signal lumineux (la longueur d'onde, de l'ordre de  $10^{-7}m$ ), si on «découpe» un volume de  $1m^3$  en cubes de côté  $10^{-7}m$ , il faut  $10^{15}$  cubes (cette technique brutale dépasse largement n'importe quel ordinateur) !

Cependant, cette différence d'échelles présente aussi un avantage : elle nous permet justement d'avoir une vision «macroscopique», et de penser à l'onde comme à une particule se déplaçant le long d'une trajectoire. C'est l'approximation de l'optique géométrique, dans laquelle les «trajectoires» sont les rayons.

Dans un certain nombre de cas, cette approximation n'est pas valable, et doit être corrigée par la prise en compte de la diffraction, c'est à dire des comportements dans les directions transverses aux rayons.

On s'intéresse ici à ces phénomènes dans le cadre de la propagation d'ondes dans un milieu non homogène (donc pour des équations à coefficients variables), en prenant en compte les interactions résonantes (décrites par le caractère non linéaire des équations).

Le but est de donner des approximations de solutions de systèmes différentiels (hyperboliques), ainsi que de montrer la stabilité de ces approximations vis-à-vis de la perturbation des données.

Dans cette introduction, on va essayer de rappeler le contexte général, les résultats concernant l'optique géométrique (à deux échelles, non diffractive) et l'optique diffractive à phases planes (équations à coefficients constants), puis de motiver le passage aux phases courbes.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Quelques équations modèles</b>	<b>2</b>
1.1	Équations de Maxwell . . . . .	2
1.2	Équation des ondes . . . . .	3
1.3	Équations d'Euler . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Formalisme de l'optique géométrique</b>	<b>3</b>
2.1	Un exemple . . . . .	3
2.2	Cas des systèmes hyperboliques . . . . .	5
2.3	Non-linéarités, amplitude et harmoniques . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Optique à trois échelles</b>	<b>8</b>
3.1	Optique en temps long . . . . .	9
3.1.1	Suite de l'exemple du paragraphe 2.1 . . . . .	9
3.1.2	Analyse pour un système hyperbolique à coefficients constants . . . . .	10

3.2	Cas des phases courbes . . . . .	12
3.2.1	Généralisation au cas non homogène . . . . .	12
3.2.2	Perturbation de phases . . . . .	13
3.2.3	Frontières ombre/lumière . . . . .	13
3.2.4	Développements multiphasés . . . . .	14

# 1 Quelques équations modèles

## 1.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivent la propagation d'une onde électromagnétique sous la forme de deux champs, le champ électrique  $E$  et le champ magnétique  $B$  (qui sont donc des fonctions du temps  $t \in \mathbb{R}$  et de la variable d'espace  $y \in \mathbb{R}^3$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ ). Elles s'écrivent, dans un milieu sans charge ni courant électriques :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \partial_t B + \text{rot} E = 0 \\ c^{-2} \partial_t E - \text{rot} B = -\partial_t P, \end{cases}$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière, et le champ  $P$  est la polarisation de la matière avec laquelle l'onde interagit.

Il faut ajouter à (1.1) deux équations de conservation,

$$(1.2) \quad \begin{cases} \text{div}(E + P) = 0, \\ \text{div} B = 0. \end{cases}$$

On peut oublier ces équations, car si elles sont satisfaites à un instant, (1.1) implique qu'elles le sont pour tout temps.

Par contre, pour obtenir un système déterminant  $E$  et  $B$ , on a besoin de donner une équation reliant  $P$  à  $E$ . C'est l'équation constitutive du milieu, qui indique la réaction de la matière traversée par l'onde électromagnétique. Dans le cas de la propagation dans le vide (sans matière!),  $P = 0$ . C'est à travers cette loi constitutive que l'on peut introduire des modèles non linéaires (lorsque  $P$  dépend de façon non linéaire de  $E$ ).

Ainsi, on peut décomposer  $P$  en ses parties linéaire ( $P_L$ ) et non linéaire ( $P_{NL}$ ). La réponse non linéaire la plus simple, instantanée, est  $P_{NL} = \chi |E|^2 E$ . Quant à la partie linéaire  $P_L$  de  $P$ , elle est souvent considérée comme régie par une équation de type «oscillateur» ,

$$(1.3) \quad \varepsilon^2 \partial_t^2 P_L + \eta^2 P_L = \gamma E,$$

avec  $\varepsilon$  un paramètre de l'ordre de la longueur d'onde de l'onde. La longueur d'onde associée à la lumière visible est de l'ordre de quelques dizaines de microns, une échelle beaucoup plus petite que celle à laquelle on observe la propagation de l'onde.

## 1.2 Équation des ondes

On peut éliminer le champ magnétique du système (1.1); le champ électrique  $E$  satisfait alors l'équation des ondes

$$(1.4) \quad \Delta E - c^{-2} \partial_t^2 E = c^{-2} \partial_t^2 P,$$

ou

$$(1.5) \quad \Delta E - \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 E = 0,$$

et  $n$  est l'indice de réfraction du milieu. Il peut dépendre de  $E$  (il dépend de l'amplitude  $|E|$  dans le cas quasi-linéaire, et de la fréquence d'oscillation dans le cas dispersif).

## 1.3 Équations d'Euler

Considérons un fluide compressible, non visqueux. S'il est isentropique, sa pression  $p$  est une fonction donnée (par l'équation d'état du fluide) de la masse volumique. Le fluide est alors décrit par sa vitesse  $v$  et sa masse volumique  $\rho$ , qui vérifient

$$(1.6) \quad \begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_y(\rho v) = 0 \\ \partial_t v + (v \cdot \nabla_y) v + \frac{\nabla_y p}{\rho} = 0. \end{cases}$$

La vitesse du son dans le fluide est alors  $c = \sqrt{p'(\rho)}$ . Les ondes acoustiques, qui se propagent dans le fluide à la vitesse  $c$ , sont de faible amplitude, et introduisent des variations (de la vitesse et de la densité) sur des distances beaucoup plus courtes que les dimensions caractéristiques associées au fluide «au repos».

## 2 Formalisme de l'optique géométrique

De bonnes références introductives sont [NM92] et [Rau95].

### 2.1 Un exemple

Comme on vient de le voir, un certain nombre de modèles physiques font intervenir des échelles très différentes, ou, de façon équivalente, de très petits (ou très grands) paramètres. Il est donc séduisant de faire tendre ce petit paramètre vers zéro afin de comparer le comportement des solutions avec celui de la solution «homogénéisée» (*i.e.* correspondant à la limite où le paramètre est égal à zéro). Il est alors indispensable d'évaluer la qualité de l'approximation, ou l'erreur commise.

Voyons sur un exemple explicite (tiré de [DJMR96]) comment les deux échelles interviennent, et le type d'approximation que l'on peut obtenir. On considère l'équation des ondes linéaire

$$(2.1) \quad \square u^\varepsilon = (\partial_t^2 - \Delta)u^\varepsilon = 0,$$

avec les données initiales

$$(2.2) \quad u^\varepsilon|_{t=0} = f(y)e^{iy_1/\varepsilon} \text{ et } \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} = 0,$$

pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

La solution est globale, et s'écrit grâce à la transformation de Fourier comme la somme des deux termes

$$(2.3) \quad u_\pm^\varepsilon = \frac{1}{2(2\pi)^{d/2}} \int \hat{f}(\eta - e_1/\varepsilon) e^{i(y \cdot \eta \mp t|\eta|)} d\eta.$$

Intéressons-nous à  $u_+^\varepsilon$  (le cas de  $u_-^\varepsilon$  étant analogue), qu'on réécrit, avec  $\zeta = \eta - e_1/\varepsilon$  :

$$(2.4) \quad u_+^\varepsilon = \frac{1}{2(2\pi)^{d/2}} \int \hat{f}(\zeta) e^{iy \cdot (e_1 + \varepsilon\zeta)/\varepsilon} e^{-it|e_1 + \varepsilon\zeta|} d\zeta.$$

En développant

$$(2.5) \quad |e_1 + \varepsilon\zeta| = 1 + \varepsilon\zeta_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\zeta|^2),$$

on a

$$(2.6) \quad \|u^\varepsilon - e^{i(y_1-t)/\varepsilon} B\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon t \|f\|_{H^{s+2}(\mathbb{R}^d)},$$

où

$$(2.7) \quad B(t, y) = \frac{1}{2(2\pi)^{d/2}} \int \hat{f}(\zeta) e^{i(y \cdot \zeta - t\zeta_1)} d\zeta.$$

Ainsi,  $e^{i(y_1-t)/\varepsilon} B(t, y)$  est une bonne approximation de  $u_+^\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon t \ll 1$ . De plus,  $B$  satisfait l'équation de transport

$$(2.8) \quad \partial_t B + \partial_{y_1} B = 0.$$

C'est l'approximation de l'optique géométrique, constituée de l'amplitude  $B$  transportée le long des rayons et de la phase  $\phi = y_1 - t$ . Ici, la phase est **plane** (c'est une fonction linéaire), et les rayons sont les droites parallèles  $y_1 - t = c^{te}$ . La phase  $\phi$  est caractéristique pour le d'Alembertien  $\square$  (i.e.  $(\partial_t \phi)^2 = |\partial_y \phi|^2$ , qui implique que le terme en  $1/\varepsilon^2$  de  $\square(\exp(i\phi/\varepsilon))$  est nul).

**Remarque:** Des exemples de phases non planes, caractéristiques pour le d'Alembertien :  $\phi(t, y) := \psi(|y| \pm t)$ , pour toute fonction  $\psi$ .

## 2.2 Cas des systèmes hyperboliques

Une classe importante de systèmes différentiels est celle des systèmes hyperboliques symétriques :

**Définition 2.1.** *L'opérateur  $L(\partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j(x, u) \partial_{y_j}$  est hyperbolique symétrique lorsque les matrices  $A_j$  sont symétriques (hermitiennes).*

On s'intéresse donc aux systèmes de la forme

$$(2.9) \quad L(u, \partial)u = F(x, u),$$

où  $F$  est une fonction donnée.

On va expliquer comment les notions de rayons, vitesse de groupe, ... apparaissent pour ces systèmes. On considèrera, pour simplifier l'écriture, le cas linéaire ( $A_j$  indépendante de  $u$ , et  $F$  linéaire en  $u$ ). La première formulation rigoureuse concernant l'étude du problème à données initiales rapidement oscillantes est due à P. Lax (cf. [Lax57]), qui a utilisé la méthode formelle de Brillouin, Kramers et Wentzel : on cherche une solution approchée de

$$(2.10) \quad \begin{aligned} L(x, \partial)u^\varepsilon &= B(x)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= g(y)e^{i\phi_0(y)/\varepsilon} \end{aligned}$$

sous la forme d'une onde monochromatique constituée d'un terme principal et d'un correcteur :

$$(2.11) \quad u_{app}^\varepsilon(x) = (u_0(x) + \varepsilon u_1(x)) e^{i\phi(x)/\varepsilon},$$

où la phase  $\phi$  n'est pas constante (en fait, on exigera que son gradient  $\nabla_x \phi$  ne s'annule pas). Elle n'est plus nécessairement plane, l'opérateur  $L$  étant à coefficients variables.

Dans ce cas, afin de rendre  $L(\partial)u_{app}^\varepsilon$  le plus proche de zéro possible, on essaie d'annuler les coefficients des premières puissances de  $\varepsilon$ , soit

$$(2.12a) \quad L(d\phi)u_0 = 0,$$

$$(2.12b) \quad iL(d\phi)u_1 + L(\partial)u_0 = B(x)u_0,$$

en notant  $L(d\phi) = \partial_t \phi(x) + \sum_{j=1}^d \partial_{y_j} \phi(x) A_j(x)$ .

Ainsi, on doit tout d'abord imposer que la matrice  $L(d\phi)$  soit non inversible, ce qui se traduit par la **relation de dispersion**

$$(2.13) \quad \det L(d\phi) = 0.$$

Cela revient à dire que la phase  $\phi$  est caractéristique pour l'opérateur  $L$ , ou que le graphe de son gradient appartient à la **variété caractéristique** de  $L$ ,

$$(2.14) \quad \mathcal{C}_L := \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^{1+d} \setminus \{0\}) \mid \det(x, \xi) = 0\}.$$

Les éléments géométriques de la matrice (hermitienne)  $L(x, (0, \eta))$  vont donc déterminer la géométrie de la propagation de la solution approchée. En particulier, la relation de dispersion (2.13) équivaut, sous réserve de la régularité de  $\mathcal{C}_L$ , à :

Il existe une valeur propre  $\lambda(x, \eta)$  de  $L(0, \eta)$  telle que

$$(2.15) \quad \partial_t \phi + \lambda(\partial_y \phi) = 0,$$

équation dite **eikonale**.

La phase est alors construite par la méthode de Hamilton-Jacobi, en intégrant dans l'espace des phases  $(\mathbb{R}_{t,y}^{1+d} \times \mathbb{R}_{\tau,\eta}^{1+d})$  le champ de vecteurs associé au hamiltonien  $H(x, \xi) = \tau + \lambda(x, \eta)$  (où  $\xi = (\tau, \eta)$ ). Ce champ est  $X = \partial_t + \partial_\eta \lambda \cdot \partial_y - \partial_x \lambda \cdot \partial_\xi$ , et les projections sur l'espace des configurations  $\mathbb{R}_x^{1+d}$  des courbes intégrales de  $X$  sont les **rayons** de l'optique géométrique.

L'analyse de P. Lax montre que l'amplitude  $u_0$  du terme principal de l'onde évolue le long des rayons, selon une équation différentielle. Pour cela, on commence par projeter les équations (2.12a) et (2.12b) :

**Lemme.** *La matrice symétrique  $L(\tau(\eta), \eta)$  admet un projecteur spectral  $\pi(\eta)$  et un inverse partiel  $Q(\eta)$ , matrices symétriques définies par*

$$(2.16) \quad \pi(\eta)L(\xi) = 0, \quad Q(\eta)L(\xi) = 1 - \pi(\eta).$$

*L'équation  $L(\xi)a = b$  équivaut alors à  $\pi b = 0$  et  $(1 - \pi)a = Qb$ .*

Lorsque la variété caractéristique  $\mathcal{C}_L$  est régulière,  $\pi$  et  $Q$  le sont. On note  $\pi(x) := \pi(x, \partial_y \phi(x))$ ,  $Q(x) = Q(x, \partial_y \phi(x))$ . Ainsi, les équations (2.12a) et (2.12b) se réécrivent, respectivement :

$$(2.17) \quad \pi(x)u_0 = 0,$$

$$(2.18a) \quad \pi L(\partial)\pi u_0 = \pi B(x)u_0,$$

$$(2.18b) \quad (1 - \pi)u_1 = iQ(L(\partial)u_0 - B(x)u_0).$$

L'équation (2.17) traduit la **polarisation** de  $u_0$  (qui implique en particulier qu'initialement,  $u_0$  doit appartenir au noyau de  $L(d\phi)$ ). Quant à (2.18a), elle représente le **transport** de  $u_0$  le long des rayons, car la partie principale  $\pi L(\partial)\pi$  est exactement la projection du champ  $X$  précédent :

**Lemme.** *Lorsque la variété caractéristique  $\mathcal{C}_L$  est régulière,*

$$(2.19) \quad \pi L(\partial)\pi = \pi(V(\partial) + C),$$

*où  $C$  est une matrice, et  $V(\partial) = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_y$  est le transport à la vitesse de groupe  $\mathbf{v}(x) := \partial_\eta \tau(x, \partial_y \phi)$ .*

La propriété de stabilité autour de la solution approchée consiste à valider l'optique géométrique lorsque les données (données initiales, second membre) sont perturbées. Ici, l'optique est valide, au sens suivant :

**Théorème.** *On se donne une solution  $\phi$  de (2.15) sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^{1+d}$  stable par le flot caractéristique rétrograde associé. On note  $\omega_t := \{y \in \mathbb{R}^d / (t, y) \in \Omega\}$ .*

*Soit  $g \in \cap_s H^s(\bar{\Omega})$  tel que  $\pi(0, y)g(y) = g(y)$ . On note*

$$u_{app}^\varepsilon(x) := (u_0(x) + \varepsilon u_1) e^{i\phi(x)/\varepsilon}$$

*la solution approchée donnée par (2.18a), (2.18b) et  $u_0|_{t=0} = g$ .*

*Alors, si  $\mathcal{E}^\varepsilon \in \cap_s H^s(\bar{\Omega} \times \mathbb{T})$  vérifie*

$$\|\mathcal{E}^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow 0),$$

*la solution exacte  $u^\varepsilon$  de*

$$(2.20) \quad \begin{aligned} L(x, \partial)u^\varepsilon &= B(x)u^\varepsilon \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= g(y)e^{i\phi(0,y)/\varepsilon} + \mathcal{E}_{|t=0}^\varepsilon(y, \phi(0, y)/\varepsilon) \end{aligned}$$

*existe sur  $\Omega$  et vérifie, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^{1+d}$  :*

$$\sup_{[0, T]} \|(\varepsilon \partial)^\alpha (u^\varepsilon - u_{app}^\varepsilon)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

## 2.3 Non-linéarités, amplitude et harmoniques

### Choix de l'amplitude

Pour de faibles amplitudes, les termes non linéaires sont négligeables, au premier ordre. Lorsque la taille des solutions augmente, on ne peut plus se contenter de linéariser les équations, et les échelles doivent être ajustées pour correspondre aux comportements non linéaires des solutions.

De plus, les effets non linéaires se cumulent au cours de la propagation. Ainsi, pour une équation différentielle

$$(2.21) \quad \frac{du}{dt} + F(u) = 0,$$

on a

$$(2.22) \quad u(t) = u(0) + \int_0^t F(u(s)) ds.$$

Si  $u$  a une amplitude  $\varepsilon^m$ , avec  $|F(u)| \sim |u|^J$ , le terme non linéaire peut être estimé par  $t\varepsilon^{mJ}$ , et n'aura un rôle au premier ordre que s'il est comparable à  $u$ , d'où le lien entre amplitude et temps de propagation :

$$(2.23) \quad \frac{1}{t_{propag}} \sim \varepsilon^{m(J-1)}.$$

Dès lors, pour une optique géométrique en temps  $\mathcal{O}(1)$ , l'amplitude pour une non-linéarité semi-linéaire est 1 ( $m = 0$ ). Par la suite, la propagation en temps  $1/\varepsilon$ , pour le même type de non-linéarité, correspondra à une amplitude  $\varepsilon^{1/(J-1)}$ .

### Harmoniques

De plus, pour un modèle non linéaire, on ne peut plus chercher de solutions approchées sous la forme d'ondes monochromatiques

$$(2.24) \quad a(x)e^{i\phi(x)/\varepsilon},$$

car les non-linéarités font apparaître les phases multiples (entiers) de  $\phi$ , qui sont caractéristiques. Aussi, les solutions approchées seront de la forme  $\varepsilon^m a(x, \phi/\varepsilon)$ , basées sur des fonctions (profils, ou enveloppes)  $a(x, \theta)$  **périodiques** en  $\theta$ , au développement de Fourier

$$(2.25) \quad a(x, \theta) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} a^\alpha(x) e^{i\alpha\theta}.$$

**Notation.** *On séparera moyenne et oscillations :*

$$\begin{aligned} a(x, \theta) &= \underline{a}(x) + a^*(x, \theta) \\ &= \langle a \rangle(x) + a^*(x, \theta) \\ &:= a^0(x) + \sum_{\alpha \neq 0} a^\alpha(x) e^{i\alpha\theta}. \end{aligned}$$

### Développements multiphasés

Enfin, les descriptions précédentes, à une seule phase, ne tiennent compte que des auto-interactions d'une onde avec elle-même :  $\phi$  et  $\alpha\phi$  correspondent au même mode  $\lambda$ , dans (2.15), et donne lieu à une même propagation (les vitesses de groupe sont identiques).

Pour décrire les interactions entre différents types d'ondes, on utilisera des données oscillant selon plusieurs phases, et donc des profils  $a(x, \theta)$  avec  $\theta \in \mathbb{T}^q$ .

## 3 Optique à trois échelles

On explique ici pourquoi, dans certains cas, une troisième échelle doit être introduite pour corriger l'optique géométrique. On commence par rappeler les approximations déjà construites, en temps long et pour des phases planes, par différents auteurs (voir [DJMR96], [JMR98], [Lan98], [Col99]).

Ensuite, on donne différents cadres à coefficients variables où la diffraction joue un rôle : généralisation du cas précédent pour des phases courbes, perturbation de phases oscillantes, frontières ombre/lumière.

On décrit les approximations utilisées, dans des échelles introduites par J.K. Hunter ([Hun88]), puis les méthodes qui permettent de justifier la pertinence de ces approximations et leur stabilité.



## 3.1 Optique en temps long

### 3.1.1 Suite de l'exemple du paragraphe 2.1

Pour illustrer comment l'optique géométrique doit être corrigée lors d'une propagation sur un long intervalle de temps, reprenons l'exemple du paragraphe 2.1 :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \square u^\varepsilon &= 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} &= f(y)e^{iy_1/\varepsilon}, \\ \partial_t u^\varepsilon|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

pour  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

Pour obtenir une approximation de  $u^\varepsilon$  en temps long, lorsque  $t$  est de l'ordre de  $1/\varepsilon$ , on pousse le développement (2.5) :

$$(3.2) \quad |e_1 + \varepsilon\zeta| = 1 + \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2|\zeta_T|^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3|\zeta|^3), \text{ où } \zeta_T := (\zeta_2, \dots, \zeta_d).$$

On a alors

$$(3.3) \quad \|u^\varepsilon - e^{i(y_1-t)/\varepsilon} A(\varepsilon t, t, y)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2 t \|f\|_{H^{s+3}(\mathbb{R}^d)},$$

pour

$$(3.4) \quad A(T, t, y) = \frac{1}{2(2\pi)^{d/2}} \int \hat{f}(\zeta) e^{i(y \cdot \zeta - t\zeta_1 - T|\zeta_T|^2)} d\zeta.$$

On a donc introduit un «temps lent»  $T = \varepsilon t$ , et cette fois, l'amplitude  $A$  vérifie une équation de **Schrödinger** relativement à ce temps lent et à la variable  $y_T$  transverse aux rayons,

$$(3.5) \quad 2i\partial_T A - \Delta_{y_T} A = 0,$$

en plus du transport

$$(3.6) \quad \partial_t A + \partial_{y_1} A = 0.$$

Le comportement de la solution  $u^\varepsilon$  ne suit donc plus les rayons de l'optique géométrique : pour un temps (ou une longueur) de propagation de l'ordre de  $1/\varepsilon$ , une correction doit être apportée dans la direction transverse  $y_T$ .

L'approximation des solutions des équations de Maxwell par celles de l'équation de Schrödinger est en particulier utilisée pour la modélisation des lasers. Un fait étonnant dans cette substitution est que, contrairement aux équations de Maxwell, l'équation de Schrödinger n'a pas de propriété de vitesse de propagation finie, mais a plutôt une vitesse de propagation infinie (une solution localisée en espace à l'instant initial ne l'est plus à aucun temps  $t > 0$ ).

### 3.1.2 Analyse pour un système hyperbolique à coefficients constants

Résumons la démarche adoptée dans [DJMR96], dans le cas d'un système semi-linéaire

$$(3.7) \quad L(\partial)u + F(u) = 0,$$

où  $L(\partial) = \partial_t + \sum_{j=1}^d A_j \partial_j$ , les matrices  $(N \times N)$   $A_j$  étant symétriques, et la fonction  $F$  régulière.

On cherche à donner une approximation, sur un intervalle de temps de l'ordre de  $1/\varepsilon$ , de solutions de (3.7) à données initiales oscillantes (à la fréquence  $1/\varepsilon$ ). Les phases utilisées doivent être définies (et régulières) pour tout temps, et on les supposera donc planes.

Comme on l'a vu au paragraphe 2.3, la taille de la solution joue un rôle important, les non-linéarités cumulées au cours de la propagation devant être du même ordre que  $u$ . Ainsi, pour une échelle de temps de l'ordre de  $1/\varepsilon$ , si le développement de Taylor de  $F$  en 0 est

$$(3.8) \quad F(u) = \Phi(u) + \mathcal{O}(|u|^{J+1}), \text{ avec } \Phi \text{ } J\text{-linéaire,}$$

on cherchera des solutions de taille  $\varepsilon^m$ , avec  $m = \frac{1}{J-1}$ . Cette amplitude est plus faible que celle de l'optique géométrique en temps (plus court)  $\mathcal{O}(1)$ , correspondant à  $m = 0$ .

Enfin, pour prendre en compte l'évolution à l'échelle  $1/\varepsilon$ , on utilisera la variable lente  $\varepsilon x$ . On considèrera donc un Ansatz de la forme

$$(3.9) \quad u_{app}^\varepsilon(x) = \varepsilon^m \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n a_n \left( \varepsilon x, x, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon} \right),$$

où les termes  $\varepsilon a_1$  et  $\varepsilon^2 a_2$  sont des correcteurs du profil principal  $a_0$  (une façon naturelle de l'exprimer sera d'imposer la **sous-linéarité** de  $a_1$  et  $a_2$  par rapport au temps  $t$ ), et où  $a_n(X, x, \theta)$  est régulier sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{1+d} \times \mathbb{T}$ .

Pour simplifier, on évitera de traiter le cas des termes de moyenne (non oscillants) en  $\theta$ , ce qui amène à supposer que le développement de Taylor de  $F$  ne comporte que des puissances impaires. Les profils  $a_n$  seront alors également à spectre (en  $\theta$ ) impair.

On commence par chercher, au moins formellement, les équations que doivent satisfaire les  $a_n$  pour que (3.9) soit une solution asymptotique de (3.7). On calcule donc

$$(3.10) \quad L(\partial)u_{app}^\varepsilon + F(u_{app}^\varepsilon) = \varepsilon^{m-1} \left( \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n r_n \right) \left( \varepsilon x, x, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{m+2}),$$

et on annule les restes  $r_n$  :

$$(3.11a) \quad r_0 = L(\beta) \partial_\theta a_0 = 0$$

$$(3.11b) \quad r_1 = L(\beta) \partial_\theta a_1 + L(\partial_x) a_0 = 0$$

$$(3.11c) \quad r_2 = L(\beta) \partial_\theta a_2 + L(\partial_x) a_1 + L(\partial_X) a_0 + \Phi(a_0) = 0.$$

L'analyse de l'équation matricielle (2.12a) est identique à celle du paragraphe (2.2) : on introduit  $\pi(\beta)$ , projecteur spectral sur le noyau de  $L(\beta)$ , et  $L(\beta)^{(-1)}$ , inverse partiel (symétrique) de  $L(\beta)$ , en supposant

**Hypothèse.**  $\beta$  est caractéristique pour  $L$  :  $\det L(\beta) = 0$ .

Ainsi,  $\beta = (\tau, \eta)$ , avec  $\tau = \tau(\eta)$  une valeur propre de  $-\sum \eta_j A_j$ .

Dès lors, par projection, le système (3.11) équivaut à

$$(3.12a) \quad \pi(\beta)a_0 = a_0$$

$$(3.12b) \quad (1 - \pi(\beta))a_1 = -L(\beta)^{(-1)}L(\partial_x)\partial_\theta^{-1}a_0$$

$$(3.12c) \quad V(\partial_x)\pi(\beta)a_0 = 0$$

$$(3.12d) \quad (1 - \pi(\beta))a_2 = -L(\beta)^{(-1)}\partial_\theta^{-1}(L(\partial_x)a_1 + L(\partial_X)a_0 + \Phi(a_0))$$

$$(3.12e) \quad V(\partial_x)\pi(\beta)a_1 = -\pi(\beta)L(\partial_x)(1 - \pi(\beta))a_1 - V(\partial_X)a_0 - \pi(\beta)\Phi(a_0)$$

en utilisant à nouveau  $V(\partial_x) = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_y$ , le transport à la vitesse de groupe  $\mathbf{v} = -\partial_\eta \tau(\eta)$ .

On fait ainsi apparaître un nouvel opérateur, d'ordre deux en  $\partial_x$ , car dans (3.12e),

$$(3.13) \quad -\pi(\beta)L(\partial_x)(1 - \pi(\beta))a_1 = \pi(\beta)L(\partial_x)L(\beta)^{(-1)}L(\partial_x)\partial_\theta^{-1}\pi(\beta)a_0$$

(en utilisant (3.12b)). Cet opérateur est scalaire, comme  $\pi L(\partial_x)\pi$ , et se relie à la courbure de la variété caractéristique de  $L$  au point  $\beta$  :

**Lemme.**  $\tau$  étant supposée régulière en  $\eta$ ,

$$\pi(\beta)L(\partial_x)L(\beta)^{(-1)}L(\partial_x)\pi(\beta) = \pi(\beta)D(\partial_y), \text{ avec } D(\partial_y) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \partial_{y_j} \partial_{y_k}.$$

De plus, grâce à l'équation (3.12c) et au fait que les opérateurs  $V(\partial_x)$ ,  $D(\partial_y)$  et  $V(\partial_X)$  **commutent**, on a nécessairement

$$(3.14) \quad V(\partial_x)^2 \pi(\beta)a_1 = 0.$$

Ceci exprime que  $\pi a_1$  a une évolution linéaire le long des rayons. Si l'on veut que le terme  $\varepsilon a_1(\varepsilon x, x, \beta \cdot x / \varepsilon)$  soit bien un correcteur de  $a_0(\varepsilon x, x, \beta \cdot x / \varepsilon)$  pour des temps  $t \sim 1/\varepsilon$ , on doit imposer que la partie linéaire de  $\pi a_1$  soit nulle :

$$(3.15) \quad V(\partial_x)\pi(\beta)a_1 = 0,$$

d'où le système final d'équations déterminant  $a_0$  :

$$(3.16a) \quad \pi(\beta)a_0 = a_0$$

$$(3.16b) \quad V(\partial_x)a_0 = 0$$

$$(3.16c) \quad V(\partial_X)a_0 - D(\partial_y)a_0 + \pi(\beta)\Phi(a_0) = 0.$$

On montre alors l'existence des profils (pour  $T \in ]0, T_*[$ ), et la validité de l'optique diffractive *-i.e.* l'existence et la stabilité de solutions exactes autour de la solution approchée (cf. [DJMR96], [JMR98]) :

**Théorème.** On pose  $u^\varepsilon(x) = \varepsilon^m a^\varepsilon(\varepsilon x, x, \beta \cdot x / \varepsilon)$  avec  $a^\varepsilon = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2$ . Soit  $v^\varepsilon$  la solution du problème de Cauchy

$$L(\partial)v^\varepsilon + F(v^\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} l^\varepsilon \left( x, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon} \right), \quad v^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{t=0} + \varepsilon^m g^\varepsilon \left( y, \frac{\eta \cdot y}{\varepsilon} \right),$$

où  $\|g^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ ,  $\sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} \|(\varepsilon \partial_t)^j l^\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$  pour tous  $s \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Alors, pour tout  $T \in ]0, T_*[$ ,

i) il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, pour  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$ ,  $v^\varepsilon$  existe et est régulière sur  $[0, T/\varepsilon] \times \mathbb{R}^d$ .

ii) il existe  $\mathcal{U}^\varepsilon, \mathcal{V}^\varepsilon \in \cap_s \mathcal{C}^\infty([0, T/\varepsilon], H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}))$  tels que

$$u^\varepsilon = \varepsilon^m \mathcal{U}^\varepsilon \left( t, y, \frac{\eta \cdot y}{\varepsilon} \right), \quad v^\varepsilon = \varepsilon^m \mathcal{V}^\varepsilon \left( t, y, \frac{\eta \cdot y}{\varepsilon} \right)$$

et pour tout  $s$ ,  $\sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} \|\mathcal{U}^\varepsilon(t) - \mathcal{V}^\varepsilon(t)\|_{H^s} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

Ainsi,  $\sup_{0 \leq t \leq T/\varepsilon} \|(\varepsilon \partial_x)^\alpha (u^\varepsilon - v^\varepsilon)(t)\|_{L^2 \cap L^\infty} = o(\varepsilon^m)$ .

## 3.2 Cas des phases courbes

### 3.2.1 Généralisation au cas non homogène

Lorsque le système (3.7) est à **coefficients variables**, ou lorsque la phase initiale n'est pas plane, les rayons ne sont plus des droites parallèles, et les phases engendrées sont courbes. Comme ces dernières ne sont en général régulières que sur un domaine borné, on commence par effectuer un changement d'échelle : si l'on utilise la variable  $\varepsilon x$  ( $= \mathcal{O}(1)$ ) au lieu de  $x$ , la solution approchée (3.9) devient

$$(3.17) \quad \varepsilon^m \sum_n \varepsilon^n a_n \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon^2} \right),$$

et en remplaçant  $\varepsilon$  par  $\sqrt{\varepsilon}$ ,

$$(3.18) \quad \varepsilon^{m/2} \sum_n \varepsilon^{n/2} a_n \left( x, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\beta \cdot x}{\varepsilon} \right).$$

C'est pourquoi, dans le cas de systèmes à coefficients variables, nécessitant l'emploi de phases courbes, pour des échelles de propagation bornées (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), on utilisera un Ansatz du type

$$(3.19) \quad \varepsilon^{m/2} \sum_n \varepsilon^{n/2} a_n \left( x, \frac{\psi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\phi(x)}{\varepsilon} \right),$$

proposé par J.K. Hunter dans [Hun88], et qui s'écrit

$$(3.20) \quad \varepsilon^m \sum_n \varepsilon^n a_n \left( \varepsilon x, \frac{\psi(\varepsilon x)}{\varepsilon}, \frac{\phi(\varepsilon x)}{\varepsilon^2} \right)$$

dans les échelles de (3.9), de l'ordre de  $1/\varepsilon$ : la dépendance des fonctions (phases)  $\phi$  et  $\psi$  en  $x$  est lente, ce qui correspond à une optique **faiblement non plane**.

Au niveau de l'analyse, la stratégie du paragraphe 3.1 doit être modifiée, en particulier pour des raisons de **commutation**: l'argument (3.14) qui mène aux équations de profils n'est plus valable, et de toutes façons, un tel système à coefficients variables serait surdéterminé. En effet, si  $V = \tau + \mathbf{v} \cdot \eta$  dépendait de  $x$ , par exemple, le commutateur  $[V(\partial_x), V(\partial_X)] = (V(\partial_x)\mathbf{v}) \cdot \partial_Y$  serait non nul, et en appliquant  $V(\partial_x)$  à l'équation (3.16c), on obtiendrait

$$(3.21) \quad (V(\partial_x)\mathbf{v}) \cdot \partial_Y a_0 - [V(\partial_x), D(\partial_y)]a_0 + [V(\partial_x), \pi(\beta)\Phi(\cdot)]a_0 = 0,$$

équation non nécessairement vérifiée par les données à  $T = 0$ .

### 3.2.2 Perturbation de phases

On peut également imaginer une description de solutions d'un système hyperbolique (non linéaire, à coefficients variables) pour des données initiales oscillantes, dont la phase serait perturbée, au sens suivant :

$$(3.22) \quad v_{|t=0}^\varepsilon(y) \sim \varepsilon^m \sum_n \varepsilon^{n/2} v_n^0 \left( y, \frac{\phi^0(y) + \sqrt{\varepsilon}\psi^0(y)}{\varepsilon} \right).$$

Posant alors

$$(3.23) \quad u_n^{0,\varepsilon}(y, \omega, \theta) := v_n^{0,\varepsilon}(y, \omega + \theta),$$

on se ramène au problème de la validité d'une approximation par des développements à trois échelles.

La différence qui apparaît avec les cas précédents tient au cadre fonctionnel dans lequel on effectue l'étude: ici, les profils  $u_n$  sont **périodiques**, non seulement par rapport à  $\theta$ , mais aussi par rapport à  $\omega$ .

### 3.2.3 Frontières ombre/lumière

Considérons une onde incidente au voisinage du bord d'un obstacle. «Derrière» l'obstacle, l'espace est séparé en une «zone éclairée» et une «zone d'ombre», la frontière entre les deux étant un «rayon singulier» (hypersurface  $\psi = 0$ ). Pour analyser l'évolution d'une onde dont l'amplitude présente initialement une forte variation au voisinage du rayon singulier (transversalement à celui-ci), on utilise  $\psi$  comme nouvelle variable (voir figure 1), et on observe les variations de l'onde à une échelle très inférieure à celle du domaine considéré.

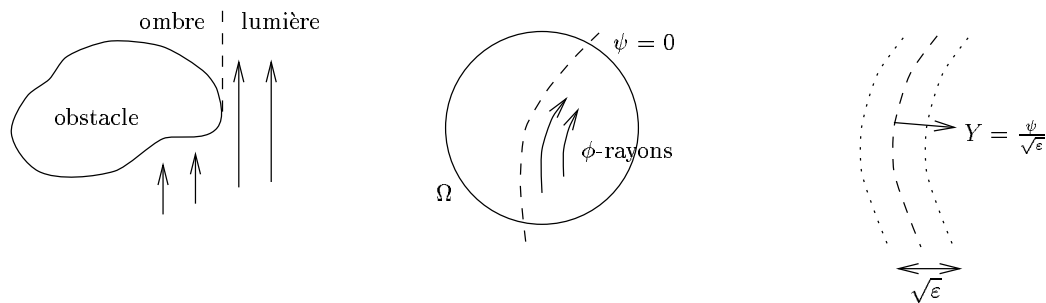


FIG. 1 – *Choix de la variable transverse  $Y$*

L'échelle adaptée pour voir apparaître des phénomènes diffractifs (*i.e.* pour que la nouvelle variable considérée intervienne au premier ordre) est alors  $1/\sqrt{\varepsilon}$ , si l'onde oscille à une fréquence  $1/\varepsilon$ , d'où la représentation de l'onde  $u^\varepsilon$  sous la forme  $u^\varepsilon = \varepsilon^m \mathcal{U}^\varepsilon(x, \psi/\sqrt{\varepsilon}, \phi/\varepsilon)$ .

Cette fois, les profils  $u_n(x, Y, \theta)$  doivent avoir des **limites** en  $+\infty$  et en  $-\infty$  dans la variable  $Y$ .

### 3.2.4 Développements multiphasés

Afin de prendre en compte les interactions entre ondes diffractées, on s'intéresse à des approximations multiphasés, comme cela a été expliqué au paragraphe 2.3:  $\phi$  représente un  $q$ -uplet  $(\phi_1, \dots, \phi_q)$  de phases.

De même, plusieurs directions de diffraction sont possibles, si l'on considère plusieurs phases à l'échelle intermédiaire:  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ .

## Références

- [Col99] T. Colin. *Rigorous derivation of the nonlinear Schrödinger equation and Davey-Stewartson systems from quadratic hyperbolic systems*. Preprint, 1999.
- [DJMR96] P. Donnat, J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Diffractive nonlinear geometric optics I*. Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1995-1996.
- [Hun88] J.K. Hunter. *Transverse diffraction of nonlinear waves and singular rays*. Siam J. Appl. Math., **48**, 1988, pp. 1–37.
- [JMR98] J.L. Joly, G. Métivier et J. Rauch. *Diffractive nonlinear geometric optics with rectification*. Indiana Univ. Math. J., **47**, n° 4, 1998, pp. 1167–1241.
- [Lan98] D. Lannes. *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*. Asymptot. Anal., **18**, n° 1-2, 1998, pp. 111–146.
- [Lax57] P.D. Lax. *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*. Duke Math. J., **24**, 1957, pp. 627–646.

- [NM92] Alan C. Newell et Jerome V. Moloney. *Nonlinear optics*. Redwood City, CA, Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, 1992, xii+436p.
- [Rau95] J. Rauch. *Lectures on geometric optics*. 1995. Disponible à : [www.math.lsa.umich.edu/rauch](http://www.math.lsa.umich.edu/rauch).