MAT 127 (Université Joseph Fourier)
Feuille de TD 2 : Autour du modèle de Malthus

Solutions explicites d'équations différentielles

La fonction inconuue est notée y, elle dépend de la variable t.

Exercice 1.1 (Equations linéaires du premier ordre)

1) $y' + 3y = 1$, $y' + 4y = 2t$, $y' - y = 2t + 1$, $2y' - y = 3e^t$, $y' + y = -\cos(2t)$, $y' - y = e^t$.
2) Dans les exemples précédents, rechercher les solutions qui vérifient $y(0) = 1$.
3) Soit l'équation $y' + 18y = t^{56} - 45 \sin t$. Trouver les solutions de cette équation qui satisfont $y(0) = 0$.
4) $y' = 2ty$, $y' = \cos(t)y$.

Exercice 1.2 (Equations linéaires du second ordre)

$y'' - 4y = 0$, $y'' + 9y = 0$, $y'' - 2y' + y = 0$, $y'' + y = t$, $y'' - 2y' + y = e^t$, $y'' - y = \cos t$.

Exercice 1.3 (Equations à variables séparables, équations autonomes)

$y' = y^2 - 3y$, $y' = y - y^2$ (Equation logistique), $y' = -ty$, $(1 + x)tx' + (1 - t)x = 0$, $(1 + x) - (1 - t)x' = 0$.

Exercice 1.4 (Et si plus compliqué ?)

Soit l'équation $y' = 1/2 \sin(y^2) - 1$.
1) Pouvez-vous résoudre cette équation ? Si non, existe-t-il une solution ? Est-elle unique ?
2) Que pouvez-vous dire de l'allure d'une solution éventuelle de l'équation ? Par exemple, que peut-on dire de la monotonie d'une telle solution ? Est-elle bornée ?

Applications du modèle de Malthus

Exercice 2.1 (Partiel 2011)

Aprés avoit fait une injection intraveineuse de glucose à un individu (au temps $t = 0$), la glycémie (c'est à dire le taux de glucose sanguin) décroit selon la loi

$$g' + Kg = 0 \qquad (1)$$

où g désigne la fonction glycémique dépendant du temps $t \geq 0$ et K est une constante appelée coefficient d'assimilation glucidique qui dépend de l'individu. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la glycémie aprés injection vérifie $g(0) = 2$.

1) Quel est le signe de K (A justifier avec soin) ?
2) Déterminer l'expression de $g(t)$ puis donner l'allure de la courbe représentative de g.
3) On considère un invividu pour lequel $K = 1,5.10^{-2}$. Au bout de combien de

temps, la glycémie de cet individu aura-t-elle diminué d'un pour cent.
4) Déterminer la formule donnant le coefficient K en fonction de $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie à l'instant $t_1 > 0$ donné.
5) La valeur moyenne de K chez un individu normal est compris entre $1,06.10^{-2}$ et $2,42.10^{-2}$. Préciser si les résultats du sujet X qui a un taux de glycémie $g_1 = 1,20$ au temps $t_1 = 30$ sont normaux.

Exercice 2.2

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que

$$y'(t) = ky(t)$$

où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.
1) Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a qradruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.
2) Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures.

Exercice 2.3

Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $\Theta(t)$ de la citerne vérifie l'équation différentielle (1) $\Theta' = a - b\Theta$ avec $a = 2,088.10^{-2}$ et $b = 2,32.10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et $\Theta(t)$ en degré Celsius. On suppose que la température initiale de la citerne est de 20 degrés Celsius. Au bout de combien de temps la température atteint-elle 80 degrés ?

Exercice 2.4 (Partiel 2010)

L'uranium et ses isotopes sont des éléments radioactifs trés lourds qui sont créés lors de l'explosion des étoiles (super nova). Le but de cet exercice est de déterminer l'époque à laquelle l'uranium sur Terre a été créé.

On note $N_{238}(t)$ et $N_{235}(t)$ le nombre d'atomes des éléments radio-actifs U^{238} et U^{235} dans un échantillon d'uranium. La demi-vie de l'uranium 238 est de $4,51.10^9$ années et celle de l'uranium est de $0,707.10^9$ années. On suppose que l'uranium a été créé au temps $t = 0$.
1) Calculer $N_{238}(t)$ et $N_{235}(t)$ en fonction de $N_{238}(0)$ et $N_{235}(0)$.
2) En 1946, le ratio U^{238}/U^{235} était de 137,8 dans n'importe quel échantillon d'uranium. En supposant que ce ratio valait 1 au moment de la création de l'uranium, montrer que l'age de l'uranium est d'environ $5,96.10^9$ années environ.
3) Sachant que l'uranium est présent de l'écorce jusqu'au noyau même de notre

planête (il participe à maintenir la chaleur du coeur métallique), en déduire une borne supérieure de l'age de la terre.

Exercice 2.5

On suppose qu'une population suit une loi de Malthus, donc qu'elle obéit à une équation différentielle du type $y'(t) = a\ y(t)$, où $y(t)$ est le nombre d'individus à l'instant t et où a est une constante réelle positive.
On constate que cette population a augmenté de 50% entre le 1er Janvier 1900 et le 1er Janvier 1925.

a) Calculer la constante a correspondant à cette population (l'unité de temps étant l'année).

b) Notons p_0 le nombre d'individus dans cette population le 1er Janvier 1900. Calculer (en fonction de p_0) le nombre d'individus
- au 1er Janvier 1925,
- au 1er Janvier 1950,
- au 1er Janvier 2000.

c) Combien de temps faut-il à cette population pour doubler ?
Est-ce que ce temps de doublement dépend de la population initiale ? de l'instant inital ?

Exercice 2.6

On a implanté 435 individus d'une espèce de poisson dans la baie de San Francisco le 1er Janvier 1879. On laisse ensuite cette population de poissons évoluer sans la pêcher pendant 20 ans. La pêche est ensuite autorisée à partir du 1er Janvier 1899 et on suppose que, chaque année, la pêche prélève 10% de la population présente au 1er Janvier de la même année. On sait que, la première année de pêche (soit pendant l'année 1899), on a pêché $411\,300$ individus de cette population.
On suppose que, en l'absence de pêche, cette population suivrait une loi de Malthus, ce qui signifie que, si $y(t)$ est le nombre d'individus de cette population présents à l'instant t, alors son évolution dans le temps obéit à l'équation différentielle $y'(t) = a\ y(t)$.

a) Calculer la constante a correspondant à cette population (en l'absence de pêche, l'unité de temps étant l'année).

b) Ecrire l'équation différentielle suivie par cette population entre le 1er Janvier 1879 et le 1er Janvier 1899.

Considérons l'évolution de cette population au cours d'une année n ($n \geq 1899$). Notons t_0 l'instant correspondant au 1er Janvier de l'année n à 0 heure (l'instant (t_0+1) correspond alors au 1er Janvier de l'année $(n+1)$ à 0 heure). On supposera dorénavant que le prélèvement par la pêche est réparti uniformément sur l'année (i.

e. la quantité de poisson pêchée est la même chaque jour de l'année n).

c) Connaissant $y(t_0)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par $y(t)$ pour tout $t \in [\, t_0 \,,\, t_0 + 1\, [$.

d) Pour tout $t \in [\, t_0 \,,\, t_0 + 1\, [$, calculer $y(t)$ en fonction de $y(t_0)$. Calculer le rapport $\frac{y(t_0+1)}{y(t_0)}$; dépend-t-il de l'année n considérée ?

e) Calculer la population de ces poissons que prévoit le modèle au 1^{er} Janvier de l'année 1909.

Exercice 2.7

On suppose qu'une population double de taille en 100 ans et triple en 200 ans. Peut-on modéliser l'évolution de cette population à l'aide de l'équation de Malthus ?

Exercice 2.8

En admettant que la population mondiale suive une loi de Malthus, (donc obéisse à une équation différentielle du type $y'(t) = a.y(t)$), et en observant que cette population a doublé entre 1928 et 1970

a) calculer la constante a (l'unité de temps étant l'année).

b) imaginez-vous dans la situation d'un expert qui vivait en 1971 et désirait prévoir l'évolution de la population mondiale dans les années suivantes en partant de la donnée de la population mondiale en 1970, évaluée à 3,696 Milliards d'individus. Cet expert ne connaît que le modèle de Malthus et adopte la valeur de la constante a calculée à la question précédente.
Quelle population prévoyait-il alors pour la fin de l'année 1980 ? pour la fin de l'année 1990 ? pour la fin de l'année 2000 ? pour la fin de l'année 2005 ? Comparer avec les statistiques a posteriori qui donnent :
pour l'année 1980 : 4,442 Milliards d'individus,
pour l'année 1990 : 5,279 Milliards d'individus,
pour l'année 2000 : 6,085 Milliards d'individus,
pour l'année 2005 : 6,500 Milliards d'individus.

Est-ce satisfaisant ? Observez-vous une déviation systématique ?

c) Quelle population prévoit ce modèle pour 2650 ?
Sachant que la superficie des terres émergées est d'environ $1,494.10^{14}$ m^2, de combien de m^2 disposerait dans ce cas chaque individu en 2650 ?
Qu'en déduire :
- Qu'il est mathématiquement prouvé que cette catastrophe arrivera et que les humains finiront entassés les uns sur les autres ?
- Que le modèle n'est pas valable pour des prévisions à long terme ?

Exercice 2.9 (Partiel 2012)

On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvellé. On désigne par $N(t)$ le nombre de bactéries par millilitre à l'instant t (t est exprimé en heures). On sait que $N(0) = 10^4$. Des mesures indiquent que le nombre de bactéries semble augmenter de 10 pour cent par heure. Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

Partie A (modèle discret) :

Dans cette partie, on note $u_n = N(n)$, c'est à dire u_n est le nombre de bactéries au bout de n heures (n est ici un entier naturel).
1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire u_n en fonction de n.
2) Au bout de combien de temps, la population aura-t-elle été multipliée par 10 ?
3a) Donner une valeur approchée du nombre de bactéries par millilitre au bout d'une heure, de deux heures, de trois heures.
3b) Les résultats expérimentaux sont les suivants :

Heure	1	2	3	4	5
Nombre d'individus	10980	11950	13050	14150	15010

Le modèle précédent vous semble-t–il satisfaisant ?

Partie B (modèle continu) :

1) Justifier (comme dans le cours) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $N(t)$ doit suivre la loi de Malthus

$$N'(t) = 0,1.N(t).$$

2) Déterminer la solution $f(t)$ de l'équation différentielle précédente qui vérifie $f(0) = 10^4$.
3) Estimer les quotients $f(1)/u_1$, $f(2)/u_2$, $f(3)/u_3$. Quelle est l'erreur commise quand on approxime $f(n)$ par u_n (pour n petit) ?
4) On constate que la population de bactéries a en fait doublé en 10 heures. Le modéle précédent vous semble-t-il donc pertinent ?