Chapitre 3
Autour de la loi logistique

1 Du cas réel à l'équation différentielle :

Exercice 1 L'observation d'un grand nombre de populations[1] montre que, lorsque la quantité de ressources disponible reste constante, la population, après avoir connu une phase de croissance assez proche de celle décrite par le modèle de Malthus, voit son taux de croissance $\dfrac{y'(t)}{y(t)}$ fléchir, puis tendre vers zéro, en même temps que la population tend vers une valeur-limite (ou seuil de saturation), notée ici L.

1. Si on suppose que l'équation différentielle suivie par une telle population est, pour tout t, de la forme
$$\frac{y'(t)}{y(t)} = f(y(t)) \quad ,$$
quelle doit être la valeur de la fonction $y \mapsto f(y)$ lorsque y est égal à L ?

2. Donnez un exemple (le plus simple possible) de fonction $y \mapsto f(y)$ qui vérifie cette condition.

3. Le modèle logistique a été introduit en 1837 par le mathématicien-biologiste néerlandais Verhulst pour modéliser l'évolution de populations qui ne sont pas trop raréfiées (sinon la population concernée suivrait le modèle 1.2.b du chapitre 1) et qui se reproduisent de manière sexuée : ce modèle suppose que, pour chacune des populations concernées, il existe une bonne approximation dérivable $y(t)$ du nombre $N(t)$ d'individus à l'instant t, qui obéit à une équation différentielle du type
$$y' = a\,y - b\,y^2 \tag{1}$$
où a et b sont des constantes réelles positives qui dépendent de la population choisie et (pour b) de son environnement. En vous servant des résultats du chapitre 2 (section 1.3), observez-vous, dans le modèle logistique les phénomènes annoncés en début d'exercice, plus précisément :

[1] L'observation est plus facile et surtout plus rapide avec une culture bactérienne (par exemple) qu'avec une population humaine.

- Une population qui suit le modèle logistique (en partant d'une valeur $y(t_0)$ suffisamment basse) connait-elle une première phase de croissance assez proche de celle décrite par le modèle de Malthus ?
- Une population qui suit le modèle logistique (en partant d'une valeur $y(t_0)$ suffisamment basse) voit-elle son taux de croissance $\dfrac{y'(t)}{y(t)}$ fléchir, pour tendre vers zéro quand t tend vers $+\infty$?
- Une population qui suit le modèle logistique (en partant d'une valeur $y(t_0)$ suffisamment basse) tend-elle vers une valeur-limite (ou seuil de saturation) quand t tend vers $+\infty$? Si oui, quelle est celle valeur-limite ? Est-elle indépendante de la population initiale ?

Dans le modèle logistique (1), le terme $a\,y(t)$ présent dans le membre de droite de l'équation différentielle représente la croissance naturelle de la population, lorsque celle-ci n'est limitée que par sa génétique, sa biologie et sa structure socio-culturelle, en l'absence de limitation dans les ressources, le terme $-b\,y(t)^2$ représente les effets de la surpopulation qui entraînent soit une mortalité supplémentaire, soit une baisse de la natalité.

Exercice 2 Etude du terme $a\,y(t)$:

1) Que devient l'équation (1) lorsque les ressources d'une population qui suit le modèle logistique sont illimitées?

2) Dans le membre de droite de l'équation différentielle (1), le terme $a\,y(t)$ est supposé représenter la croissance naturelle de la population ? Sur quelles hypothèses a priori repose la validité de cette supposition ?

3) En fonction des informations dont vous disposez ou de votre expérience, discutez la validité de ce terme $a\,y(t)$ pour représenter la croissance naturelle de la population. Comparez avec la discussion du terme analogue dans l'équation différentielle provenant du modèle de Malthus (cf. le modèle 1.2.a du chapitre 1). Quelles sont les critiques qui n'ont plus lieu d'être ici ?

Exercice 3 Etude du terme $-b\,y(t)^2$:

Dans une société où règne ce qu'il est convenu d'appeler "la loi de la jungle", la compétition entre deux individus pour les mêmes ressources se termine dans un certain pourcentage des cas par la mort d'un des deux individus, que cette mort soit le résultat d'un combat entre les deux individus, ou du fait que l'individu, qui se trouve privé des ressources captées par ses adversaires, finisse par mourir de faim ou subisse une sorte de "mort sociale", c'est à dire qu'il soit écarté de la communauté au point de ne plus pouvoir se reproduire que difficilement. Montrer que

1) le nombre de rencontres potentielles entre deux individus est proportionnel à $y(t)^2$,

2) le rapport $\left(\dfrac{\text{Nombre de confrontations effectives entre deux individus par UT}}{\text{Nombre de rencontres possibles}}\right)$ représente une probabilité pour qu'un évènement ait lieu, lequel ? Nous considèrerons cette probabilité comme constante,

3) le rapport $\left(\dfrac{\text{Nombre de morts par competition pour les ressources par UT}}{\text{Nombre de confrontations effectives par UT}}\right)$ représente une probabilité pour qu'un évènement ait lieu, lequel ? Nous considèrerons cette probabilité comme constante,

4) Montrer que, si on admet les suppositions faites dans les questions 2) et 3), le nombre de morts dues à la compétition pour les ressources (par Unité de Temps) est de la forme $b\,y(t)^2$, où b est une constante positive.

5) En admettant ce modèle comme valide pour la population concernée, quand les ressources disponibles pour cette population augmentent, celà se traduit-il par une augmentation ou une diminution de la constante b ? Même question quand les ressources diminuent.

6) Nous allons tenter de lister un certain nombre d'objections à la validité de ce modèle; à chacune de ces objections, vous pourrez apporter plusieurs types de réponses : soit trouver des arguments pour rejeter l'objection, soit admettre que l'objection invalide le modèle dans les cas concernés et alors proposer une modification du modèle de manière à prendre l'objection en compte :

   - Objection 1 : Il existe des sociétés plus policées, où la loi de la jungle ne s'applique pas. Comment justifier alors la validité du terme $-b\,y(t)^2$ pour expliquer le fléchissement de la croissance ?

   - Objection 2 : Le modèle logistique prévoit que le taux de croissance de la population concernée est :

   $$\frac{y'(t)}{y(t)} = a - b\,y \quad ,$$

   donc que le taux de croissance est d'autant plus faible que les ressources disponibles sont faibles. Comment expliquer alors que la croissance démographique soit actuellement plus forte dans les pays dits "en voie de développement" que dans les pays dits "développés" (généralement plus "riches") ?

   - Objection 3 : Il peut y avoir des variations dans la quantité de ressources disponibles :

   – une série de sécheresses peut "désertifier" un pays,

   – l'Espagne après la découverte des Amériques, la Belgique, en colonisant le Congo, ont pu accéder à l'époque à une quantité de ressources bien supérieures à celles dont elles disposaient auparavant.

   – les révolutions industrielles, commerciales, financières, ou une avance technologique ont permis et permettent à certains pays d'avoir à leur disposition de nouvelles sources de ressources. Par exemple, dans une économie essentiellement rurale, les ressources disponibles pour une population sont celles de son propre sol; une révolution industrielle permet de créer de nouvelles ressources, une révolution commerciale et financière permet de prélever une part sur des ressources qui viennent de l'extérieur. Comment intégrer ces variations de la quantité de ressources disponibles dans le modèle ?

- Objection 4 : Il est faux de dire que toutes les rencontres sont équiprobables : on a beaucoup plus de probabilité de rentrer en confrontation avec un individu voisin qu'avec un individu situé à 2000 kms. De plus, sur toute l'étendue d'un pays comme les USA, la densité de la population et la quantité de ressources disponibles changent selon l'endroit. Comment tenir compte de ces facteurs ?

- Objection 5 : Dans des pays comme les USA ou le Canada, les apports de population dûs à l'immigration ont été et sont encore importants. Comment en tenir compte[2]?

- Quelles autres objections avez-vous à proposer ?

2 Quelques conséquences de la loi logistique :

Rappelons (cf. la section 1.3 du chapitre 2) que la solution de l'équation différentielle de Verhulst (1) de donnée initiale $y(t_0) = y_0$ est la fonction

$$y(t) = \frac{\frac{a}{b}\, y_0}{y_0 \,+\, \left(\frac{a}{b} \,-\, y_0\right)\, e^{-a\,(t-t_0)}} \quad , \tag{2}$$

qui est définie[3]
– sur $]-\infty\,, +\infty\,[$ lorsque $0 \leq y_0 \leq \dfrac{a}{b}$,
– sur $]\, t_0 \;-\; \dfrac{1}{a}\, \ln\left(\dfrac{y_0}{y_0 - \frac{a}{b}}\right)\,, +\infty\,[$ lorsque $y_0 \geq \dfrac{a}{b}$.

Exercice 4 Le nombre $p(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée est supposé suivre le modèle de Verhulst, (ou loi logistique) donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$.
On suppose que la population-limite est de 5.10^8 individus.
On observe que, quand la population est très faible (i. e. de l'ordre du millier d'individus), alors elle double toutes les 40 minutes.

1) Lorsque l'unité de temps est la minute

   a) calculer les constantes a et b lorsque la population est mesurée en nombre d'individus,

[2]Voir les exercices ??? et ??? pour une étude quantitative de la validité de la loi logistique appliquée à l'évolution des populations des USA et du Canada.

[3]Comme nous nous intéressons ici à l'évolution des populations, le cas $y_0 \leq 0$ ne se rencontre jamais.

b) calculer les constantes a et b lorsque l'unité de mesure de la population est le Million d'individus.

2) Lorsque l'unité de temps est l'heure

a) calculer les constantes a et b lorsque la population est mesurée en nombre d'individus,

b) calculer les constantes a et b lorsque l'unité de mesure de la population est le Million d'individus.

3) Quelle sera la population au bout de 2 heures...

a) si la population initiale est de 10^8 individus ?

b) si la population initiale est de 10^9 individus ?

Exercice 5 Le nombre $p(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée est supposé suivre le modèle de Verhulst, donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$.
Si p_0 est la population à l'instant initial t_0 , montrer que, si $p_0 \neq \frac{a}{b}$ et si $p_0 > 0$, alors $\frac{a - b\,p(t)}{a - b\,p_0}$ est positif pour toute valeur de t.

Exercice 6 Le nombre $p(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée est supposé suivre la loi logistique, donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$.

a) Quelle est la population-limite quand t tend vers $+\infty$?

b) Cette population est supposée avoir atteint 10 pour cent de sa valeur-limite à un instant t_0 . Calculer la valeur prédite de $p(t)$ pour tout instant $t \geq t_0$ (le calcul se fera en fonction des données a , b , t_0 et de t).

c) Montrer que, si $0 < p(t_0) < \dfrac{a}{b}$, le graphe de la fonction théorique $p(t)$ donnée par ce modèle admet un et un seul point d'inflexion (i. e. une valeur de t telle que $p''(t) = 0$), et que ce point d'inflexion se situe à l'instant où la population atteint la moitié de sa valeur-limite.

Exercice 7 Le nombre $p(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée est supposé suivre le modèle de Verhulst, donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$.

a) Quelle est la population-limite quand t tend vers $+\infty$?

b) Cette population est supposée avoir atteint 90 pour cent de sa valeur-limite à un instant t_1 . Elle subit alors une sécheresse importante[4] qui réduit considérablement et définitivement ses ressources disponibles. Pour prévoir l'évolution de cette population après cette sécheresse, faut-il corriger le modèle en augmentant ou en diminuant la constante b ?

[4]On suppose que c'est ce qui est arrivé aux Mayas.

c) On suppose qu'après cette sécheresse, la constante b est multipliée par 4 (l'unité de temps étant la même que précédemment). Calculer la valeur prédite de $p(t)$ pour tout instant $t \geq t_1$ (le calcul se fera en fonction des données a, b, t_1 et de t). Quelle est la nouvelle évaluation de la population-limite ?

Exercice 8 Le nombre $p(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée est supposé suivre une loi logistique, donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$.
On suppose que la population-limite est de $100\,000$ individus.
Une population, initialement chiffrée à $50\,000$ individus, atteint les $60\,000$ individus au bout de 5 ans. L'unité de temps étant l'année, calculer le coefficient a. Calculer le coefficient b si l'unité de mesure de cette population est le millier d'individus.

Exercice 9 Le nombre $p(t)$ d'individus à l'instant t dans une population donnée est supposé suivre le modèle de Verhulst, donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$. Soient t_0, t_1 et t_2 trois instants tels que $t_1 - t_0 = t_2 - t_1$, montrer que, si on connaît t_0, t_1, t_2 et $p(t_0)$, $p(t_1)$, $p(t_2)$, et si on suppose que la population suit exactement le modèle de Verhulst, alors on peut calculer a et b.
Application numérique : L'unité de temps étant l'année, faites le calcul des constantes a et b pour la population des USA[5], pour laquelle les recensements donnent :
pour l'année 1850 : 23,192 Millions d'individus,
pour l'année 1890 : 62,948 Millions d'individus,
pour l'année 1930 : 122,775 Millions d'individus.
Se servir de ces constantes (et du modèle de Verhulst) pour prédir la population des USA en l'an 1950, en l'an 2000.

Exercice 10 Si on néglige les effets de l'immigration, de l'émigration et des homicides, la population $p(t)$ à l'instant t de New York City est supposée suivre une loi logistique, donc obéir à une équation différentielle du type $y' = a.y - b.y^2$. On suppose que les constantes ont été calculées et sont $a = \frac{1}{50}$ et $b = \frac{1}{25}10^{-6}$ lorsque l'unité de temps est l'année et lorsque la population est mesurée en nombre d'individus.

1) A un instant t donné, notons $T_{im}(t)$ le taux d'immigration, c'est à dire le rapport $\left(\dfrac{\text{Nombre d'arrivees d'immigrants par UT}}{\text{Nombre d'habitants}}\right)$ à cet instant[6]. Ce taux est supposé constant et, lorsque l'Unité de Temps est l'année, ce taux est évalué à 2%. Comment modifier l'équation différentielle initiale pour tenir compte de ce phénomène.

[5] En supposant que la population des USA suit un modèle de Verhulst.

[6] Attention au fait que, même lorsque l'Unité de Temps est l'année, il s'agit d'un taux instantané et non d'un taux moyen sur l'année; en d'autres termes l'augmentation de la population due à l'immigration sur une année entière est légèrement différente des 2% de la population présente en début d'année. Voir l'exercice 2 de la section 2.1 du chapitre 1 où on a déjà pris en compte cette difficulté.

2) Comment modifier cette dernière équation différentielle pour tenir compte, en plus de l'immigration, d'un certain nombre de départs par émigration vers le reste des USA (dont le nombre est évalué à 9000 par an) et des homicides (dont le nombre est évalué à 1000 par an)

3) Supposons que la population est de 10 Millions d'habitants à l'instant t_0. Donner la valeur de p(t) pour tout $t > t_0$.
Si le modèle est supposé juste pour les grandes valeurs de t, qu'arrive-t-il quand t tend vers $+\infty$?

Exercice 11 L'évolution d'une population dont on note $N(t)$ le nombre d'individus au temps t suit une loi logistique. On suppose que $N(t_1) = n_1$, $N(t_1+r) = n_2$, $N(t_1+2r) = n_3$ (n_1, n_2, n_3, $r > 0$). Démontrer qu'alors la capacité d'accueil est

$$K = \frac{1/n_1 + 1/n_3 - 2/n_2}{1/(n_1 n_3) - 1/n_2^2}.$$

Exercice 12 On peut modifier la loi logistique en considérant le modèle d'évolution de population suivant :

$$N' = rN(N/U - 1)(1 - N/K)$$

où $N(t)$ est le nombre d'individus au temps t, et r, K, U sont des paramètres positifs (avec $U < K$). Tracer l'allure des solutions de l'équation différentielle précédente. Comment évolue la population quand $t \to +\infty$? Comparer avec la loi logistique.

Exercice 13 (Partiel 2011) **Mutations dans une population à l'équilibre**

On considère une population $y(t)$ d'oiseaux se nourrissant de graines dont les qualités nutritives varient. Les oiseaux dits **normaux** se nourissent **principalement** des graines **les plus nutritives**.

Question de Cours, population normale: *Aucune justification n'est demandée dans cette section.*

La population normale évolue selon la **loi logistique**, qui modélise un effet de compétition pour les ressources:

$$y' = ay - by^2;\ a, b > 0. \tag{3}$$

Que modélisent les différents termes du membre de droite de (3) ? Dessiner le portait de phase de (3). Vers quelle valeur tend une population initialement positive (dans le futur)? On appelle **équilibre** cette valeur que l'on note $\overline{N}$.

Mutation: A $t = t_0$, certains oiseaux (**les mutants**) changent de comportement et consomment alors plutôt un autre type de graines **moins nutritives**. Leur croissance naturelle en sera affectée, par contre la compétition avec les individus normaux sera moins rude. On note $x(t)$ la population de mutants aux temps ultérieurs à t_0.

1. Si l'on négligeait les interactions avec les individus normaux, la population de mutants $x(t)$ évolurait de la même façon que $y(t)$ à une petite différence près, laquelle (Justifiez, sans calculs, votre choix) ?

   a) $x' = \alpha ax - bx^2;\ 0 \leq \alpha < 1$ b) $x' = \alpha ax - bx^2;\ \alpha > 1$
   c) $x' = ax - bx^2$ d) $x' = ax - \alpha bx^2;\ 0 \leq \alpha < 1$

2. Néanmoins, en plus des interactions entre mutants il subsiste une compétition entre normaux et mutants. Quel est le nombre de morts de la population mutante par unité de temps dus à cette compétition (Justifiez, sans calculs, votre choix) ?

   a) $\beta bx^2;\ \beta < 1$ b) $\beta bxy;\ \beta > 1$
   c) $\beta by;\ \beta > 1$ d) $\beta bxy;\ \beta < 1$

3. En déduire l'equation différentielle satisfaite par x en présence des individus normaux (Préciser les valeurs admissibles de β et α):

   a) $x' = \alpha ax - bx^2 - \beta bxy$ b) $x' = \alpha ax - bx^2$
   c) $x' = \alpha ax - \beta bx^2 - by^2$ d) $x' = ax - \alpha bx^2 - \beta bxy;$

4. On suppose qu'à $t = t_0$, la population normale était à l'équilibre. Peu de temps après $y(t)$ reste très proche de $\overline{N}$ et $x(t)$ est très faible ($x \ll \overline{N}$). En utilisant les résultats de la question précédente, donner la loi d'évolution des mutants dans le cadre de cette approximation (Justifiez votre choix, un calcul est nécessaire)).

   a) $x' = \alpha ax$ b) $x' = \alpha ax - bx^2 - \beta bxy$
   c) $x' = a(\alpha - \beta)x$ d) $x' = \alpha ax - \beta bx^2$

5. Sous quelle(s) condition(s) la population mutante peut-elle subsister? Dans ce cas, que pensez-vous qu'il adviendra pour les temps longs?

2.1 Méthodes numériques pour la simulation et validité du modèle logistique

Exercice 14 Les estimations et statistiques concernant la population des USA de 1790 à 1950 donnent les chiffres suivants (exprimés en millions d'individus) :

dates t_i	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860
population y_i	3,929	5,308	7,240	9,638	12,866	17,069	23,192	31,443

1870	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950
38,558	50,156	62,948	75,995	91,972	105,711	122,775	131,669	150,697

Si on suppose que cette population a suivi la loi logistique pendant tout cet intervalle de temps, la valeur théorique $y_{\text{theo}}(t)$ (exprimée en millions d'individus) du nombre d'habitants des USA à l'instant t est donnée par une équation de la forme:

$$y_{\text{theo}}(t) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + C\,e^{-a\,t}} \quad , \quad \text{soit} \quad -a\,t + \beta = ln\left(\frac{\frac{a}{b} - y_{\text{theo}}(t)}{y_{\text{theo}}(t)}\right) \tag{4}$$

où a, b et β sont des constantes à déterminer et où $C = e^{\beta}$.

1) Si on connaît la population-limite $l = \dfrac{a}{b}$: Il nous suffit alors d'appliquer la méthode des moindres carrés à l'équation (4), c'est à dire de calculer les valeurs de a et β telles que les écarts entre les valeurs mesurées $z_i = \ln\left(\dfrac{l - y_i}{y_i}\right)$ à l'instant t_i et les valeurs théoriques $\ln\left(\dfrac{\frac{a}{b} - y_{\text{theo}}(t_i)}{y_{\text{theo}}(t_i)}\right)$ au même instant soient les plus petits possibles. Le critère retenu est donc de choisir les valeurs de a et β qui rendent la fonction

$$E_l(a, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (-a\, t_i + \beta - z_i)^2 \tag{5}$$

la plus petite possible (ici, on a $n = 17$).

a) Lorsque la population-limite l est connue, quelle est la formule de calcul pour les valeurs a^* et β^* de a et de β qui minimisent la fonction $E_l(a, \beta)$? Posons

$$\text{Err}(l) = E_l(a^*, \beta^*) = \min_{a,\beta} E_l(a, \beta) \quad ,$$

c'est une évaluation de l'erreur globale faite quand on choisit la valeur l comme valeur de la population-limite.

b) Si on suppose que $l = 195$, calculer les valeurs de a et b telles les écarts entre les valeurs mesurées $z_i = \ln\left(\dfrac{l - y_i}{y_i}\right)$ aux instants t_i et les valeurs théoriques $\ln\left(\dfrac{\frac{a}{b} - y_{\text{theo}}(t_i)}{y_{\text{theo}}(t_i)}\right)$ (aux mêmes instants) soient les plus petits possibles, au sens du critère des moindres carrés.

2) Malheureusement, on ne connaît pas la population-limite l, la seule chose qu'on sache, c'est qu'elle est supérieure à 150 (en Millions d'individus).

a) En partant de l'estimation par défaut $l_0 = 150$, en donnant successivement à k les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., etc., on calcule à chaque fois la valeur $l_k = 150 + \frac{k}{10}$ et on applique la méthode des moindres carrés en prenant (provisoirement) cette valeur l_k comme valeur de la population limite, ce qui nous donne des estimations (probablement mauvaises au début) a_k et β_k des paramètres a et β. On calcule alors l'estimation $\text{Err}(l_k) = E_{l_k}(a_k\, , \beta_k) = \sum_{i=1}^{n} (-a_k\, t_i + \beta_k - z_i)^2$ de l'erreur faite en remplaçant la valeur-vraie l (inconnue) par son estimation (provisoire) l_k. On s'arrête sur la valeur de k où $\text{Err}(l_k)$ atteint son minimum, et on retient la valeur l_k correspondante comme "meilleure estimation" de la population-limite et les valeurs a_k et β_k comme "meilleures estimations" des paramètres a et β.

Programmer un procédé automatique pour rechercher la valeur de l_k qui rend $\text{Err}(l_k)$ minimale, programmer le calcul des meilleures approximations de a et β au sens des moindres carrés.

A titre indicatif, voici la partie nouvelle de ce programme en version Quick Basic :

Commentaire : On initialise e1 *à une valeur très grande pour éviter de sortir immédiatement par le test* "IF" *de la ligne* 1060*. Ensuite, pour chaque valeur de* k *, on calcule* $z_i = \ln\left(\frac{l_k - y_i}{y_i}\right)$ *et les valeurs moyennes des* t_i *et des* z_i *:*

```
70 e1 = 100000
100 mt = 0: mz = 0: l = 150
110 FOR i = 1 TO n
120 z(i) = LOG((l / y(i)) - 1): mt = mt + t(i): mz = mz + z(i)
150 NEXT i
```

Commentaire : pour chaque valeur de k *, on calcule* l_k *,* $-a_k$ *,* β_k *et* $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ *, ici notés* $l\,,a\,,\ b$ *et* e *:*

```
310 mt = mt / n: mz = mz / n: c = 0: d = 0: a = 0: b = 0
500 FOR i = 1 TO n
510 c = c + (t(i) - mt) * (t(i) - mt): d = d + (t(i) - mt) * z(i)
580 NEXT i
590 a = d / c: b = mz: e = 0
1000 FOR i = 1 TO n
1010 x(i) = a * (t(i) - mt) + b: r(i) = z(i) - x(i)
1040 e = e + r(i) * r(i)
1050 NEXT i
```

Commentaire : pour chaque valeur de k *, on fait apparaître à l'écran*[7] *les valeurs de* l_k *,* $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ *,* $-a_k$ *,* β_k *:*

```
1055 PRINT l; e; a; b
```

Commentaire : si $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k) \le E_{l_{k-1}}(a_{k-1}\,,\,\beta_{k-1})$ *(on a en effet gardé mémoire de* $E_{l_{k-1}}(a_{k-1}\,,\,\beta_{k-1})$ *depuis l'étape précédente), on passe de la valeur* k *à la valeur* $k+1$ *en ajoutant* $0,1$ *à* l_k *(i. e. on calcule* l_{k+1} *en posant* $l_{k+1} = l_k + 0,1$ *, ligne 1065); mais, auparavant, on garde mémoire des valeurs* l_k *,* $-a_k$ *,* β_k *et* $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ *, que l'on place dans les mémoires* $L1$ *,* $a1$ *,* $b1$ *et* e1 *(ligne 1065), après quoi on recommence le calcul pour la nouvelle valeur* l_{k+1} *de la population-limite estimée (ligne 1070).*
Si au contraire $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k) > E_{l_{k-1}}(a_{k-1}\,,\,\beta_{k-1})$ *, c'est qu'on vient de dépasser la valeur de* k *pour laquelle* $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ *atteint sa valeur minimale : en effet on a alors* $E_{l_{k-1}}(a_{k-1}\,,\,\beta_{k-1}) \le E_{l_{k-2}}(a_{k-2}\,,\,\beta_{k-2})$ *(puisqu'on est passé de* l_{k-2} *à* l_{k-1} *au tour précédent sans sortir de l'itération) et on vient de voir que* $E_{l_{k-1}}(a_{k-1}\,,\,\beta_{k-1}) < E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ *donc la valeur de* l_k *pour laquelle* $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ *atteint sa valeur minimale est celle de l'étape précédente, à savoir* l_{k-1} *. On sort alors de l'itération*[8] *et, à la ligne 1075, on récupère les valeurs* l_{k-1} *,*

[7] Cette impression n'est que temporaire, et devra être supprimée dans la version finale du programme, elle est là uniquement pour que vous puissiez vérifier que la valeur de k que vous avez retenue est bien celle pour laquelle $k \mapsto E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k)$ atteint son minimum.

[8] C'est le sens de l'ordre GOTO 1075, appliqué seulement lorsque $E_{l_k}(a_k\,,\,\beta_k) > E_{l_{k-1}}(a_{k-1}\,,\,\beta_{k-1})$.

$-a_{k-1}$ et β_{k-1}, qui, à l'étape précédente avaient été placées dans les mémoires L1, a1, b1 : les valeurs l_{k-1}, $-a_{k-1}$ et β_{k-1} sont alors les meilleures estimations (au sens des moindres carrés) des valeurs des paramètres l, $-a$ et β.

```
1060 IF e > e1 GOTO 1075
1065 L1 = l: a1 = a: b1 = b: e1 = e: l = l + .1
1070 GOTO 100
1075 l = L1: a = a1: e = 0: b = - a / l
```

Commentaire : On recalcule les valeurs de $z_i = \ln\left(\dfrac{l_{k-1} - y_i}{y_i}\right)$ et de $y_{\text{theo}}(t_i) = \dfrac{l_{k-1}}{1 + e^{-a_{k-1}t_i+\beta_{k-1}}}$ (justifier cette dernière égalité), puis les résidus $r_i = z_i - (-a_k t_i + \beta_k)$:

```
1078 FOR i = 1 TO n
1080 z(i) = LOG((l / y(i)) - 1): x(i) = a * (t(i) - mt) + b1
1081 r(i) = z(i) - x(i) : e = e + r(i) * r(i): y1(i) = l / (1 + EXP(x(i)))
1085 NEXT i
```

Commentaire : On affiche les estimations des paramètres a et b de l'équation différentielle (1) *correspondant à la population des USA de 1790 à 1850 :*

```
1088 PRINT : PRINT : PRINT "pop. limite :"; l; "a ="; a; "b ="; b
```

b) Afficher les résidus dans le cas où on cherche à simuler la population des USA par le modèle logistique (en optimisant le choix des paramètres a et β). Au regard des critères habituels concernant les résidus (cf. le deuxième problème de la section 2.2 du chapitre 1), le modèle logistique est-il bien adapté pour interpréter l'évolution de la population des USA de 1790 à 1950 inclus ?

c) Pour chaque valeur de t_i, afficher sur une même ligne la valeur y_i de la population mesurée, la valeur $y_{\text{theo}}(t_i)$ de la population simulée, et l'erreur relative faite en remplaçant y_i par $y_{\text{theo}}(t_i)$.

d) Comparer ces résultats avec ceux donnés par le modèle de Malthus pour la même population et sur le même intervalle de temps de 1790 à 1950

e) Quelle population prévoyait ce modèle pour les USA en l'an 2000 ? En vous référant à la section 1, comment expliquez-vous que ce chiffre soit une sous-estimation de la population réelle en l'an 2000 ?

Exercice 15 .– Mêmes questions pour la population du Canada, dont les statistiques, de 1851 à 2006, donnent les chiffres suivants (exprimés en millions d'individus) :

dates t_i	1851	1861	1871	1881	1891	1901
population y_i	2,436297	3,229633	3,737257	4,381256	4,932206	5,418663

1911	1921	1931	1941	1951	1956	1961
7,221662	8,800429	10,376379	11,506655	14,009429	16,080791	18,238247

1966	1971	1976	1981	1986	1991	1996
$20,014880$	$21,568305$	$22,992595$	$24,343177$	$25,309330$	$27,296856$	$28,846758$

2001	2006
$30,007094$	$31,612897$