Exercice 1. Pour chaque espace vectoriel V, dire si oui ou non la famille F d'éléments de V est une base de V. Lorsque F est bien une base, donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (pour (1),(2) et (3)) ou du polynôme $a + bX + cX^2$ (pour (4) et (5)) par rapport à F.

$$(1) V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2) V = \mathbb{R}^3, F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$(3) V \subset \mathbb{C}^3, V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}, \quad F = \{ \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

$$(4) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{X^2 - 3X + 1, X^2 + 3X - 4, 2X^2 - 3\}.$$

$$(5) V = \mathbb{R}_2[X], \quad F = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}.$$

Exercice 2. Pour chaque espace vectoriel V, dire si oui ou non la partie $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel. Lorsque W est bien un sous-espace vectoriel, donner une base de W et calculer les coordonnées d'un élément arbitraire de W dans cette base.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}$.
2. $V = \mathbb{C}^3$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x + y - iz = 2 + 3i \right\}$.
3. $V = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, $W = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}) \mid f'' + f' = 0\}$.
4. $V = \mathbb{R}_3[X]$, $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (P(3))^2 = P(2)\}$.

Exercice 3. Pour quelles valeurs de k le système linéaire d'inconnues x, y

$$\begin{cases} kx + (1+i)y = 1 \\ (1+i)x + ky = 1 \end{cases}$$

admet-il a) aucune solution ?
b) une solution unique ?
c) une infinité de solutions ?

Exercice 4. Calculer le noyau et l'image de chaque matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Démontrer que les équations de la chaleur et des ondes sont bien des équations linéaires.

Exercice 7. Soit $f : V \to V'$ une application linéaire entre deux espaces vectoriel. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de V et V', respectivement.

Exercice 8. . Pour chaque application, indiquer si oui ou non elle est linéaire. Si oui, en donner le noyau et l'image.

1. L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \\ z+1 \end{pmatrix}$.
2. L'application de $\mathbb{C}^3$ dans $\mathbb{C}^3$ donnée par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ix-iy \\ -iy-z \\ ix+z \end{pmatrix}$.
3. La fonction ϕ qui envoie $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$ sur lui-même donnée par
$$\phi(f) = f'.$$
Nous rappelons que $C^\infty([0,1],\mathbb{C})$ est l'espace de fonctions sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont dérivables à tous ordres.
4. La fonction $\phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ donnée par $\phi(P) = P' - XP$.
5. La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par projection sur l'axe des x.
6. La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ donnée par rotation d'un angle θ autour de l'origine.

Exercice 9. Montrer que les trois fonctions suivantes forment une famille liée dans l'espace $C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$:

$$x \mapsto e^{ix} \quad , \quad x \mapsto \sin(x) \quad , \quad x \mapsto e^{-ix}.$$

Donner la dimension de $\mathrm{Vect}(e^{ix}, \sin(x), e^{-ix})$.

Exercice 10. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer que la famille de fonctions $(e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x})$ est libre dans l'espace vectoriel $C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_0, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que pour chaque i, le degré de P_i soit i. Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 12. On se place dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_3[X]$ des fonctions polynômes de degré au plus 3.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_3[X]$. Prouver que ce dernier est de dimension 3 et en préciser une base.
2. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$? Qu'en est-il de l'ensemble des polynômes de degré égal à 2 ?

Exercice 13.

1. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, de fonction inconnue y. Montrer que l'ensemble des fonctions du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ solutions de cette équation forme un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.

2. On considère maintenant l'équation différentielle $y'' + \omega^2 \sin y = 0$. L'ensemble des fonctions du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ qui sont solution de cette équation forme-t-il un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$?

Exercice 14.

Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? En préciser une base.

Exercice 15.

On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à 2. Un polynôme P de $\mathcal{P}$ sera noté $P(X) = a + bX + cX^2$. Nous admettrons que $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{P}$? En donner une base.
2. On considère les sous-ensembles de $\mathcal{P}$ suivants :
   (a) $W_0 = \{P \in \mathcal{P} \mid P(0) = 3\}$,
   (b) $W_1 = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{ P n'a pas de racine réelle}\}$ et
   (c) $W_2 = \{P \in \mathcal{P} \mid a = 0\}$.

   Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{P}$? Pour ceux qui sont des sous-espaces vectoriels, en donner une base et donner le vecteur des coordonnées d'un polynôme P arbitraire dans cette base.
3. De même, on considère les applications de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :
   (a) $f_0(P) = P(3)$,
   (b) $f_1(P) = d$ $(d \in \mathbb{R})$,
   (c) $f_2(P) = P'(1)$,
   (d) Si $P(X) = a_P + b_P X + c_P X^2$, on pose $f_3(P) = a_P \cdot a + b_P \cdot b + c_P \cdot c$ $((a,b,c) \in \mathbb{R}^3)$,
   (e) $f_5(P) = (a_P + b_P + c_P)^2$.

   Lesquelles sont des applications linéaires ?

Exercice 1. Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont elles symétriques ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_2 + x_2y_2.$
2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = 2P'(1)P(0) + Q'(1)Q(0).$
3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = 2P'(1)Q(0) + Q'(1)P(0).$
4. $\phi : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad \phi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx.$

Exercice 2. Pour chacune des formes bilinéaires suivantes, calculer sa matrice M_1 dans la base $\mathcal{B}_1$ et sa matrice M_2 dans la base $\mathcal{B}_2$. Calculer P, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$, et vérifier que $M_2 = {}^tPM_1P$. La forme bilinéaire ϕ est elle symétrique ?

1. $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 + 3y_1x_2 \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$
2. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$
$$\phi(P,Q) = P(1)Q(-1) \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), (X^2-3X+2)\}.$$
3. $\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$
$$\phi(P,Q) = \int_0^1 P(x)Q(1-x)dx \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \{1, X, X^2\}, \mathcal{B}_2 = \{1, (X-1), X^2 - X\}.$$

Exercice 3.

1. Soit Ψ une forme bilinéaire définie sur $V \times V$ où V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit A une matrice représentant Ψ dans une base $\mathcal{B}$ fixée. Montrer que l'application
$$\Phi : E \times E \to \mathbb{R}$$
définie par $\Phi(u,v) = \Psi(v,u)$ est une forme bilinéaire et préciser, en fonction de A, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que Ψ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si A l'est.
2. Démontrer que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et de la matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Démontrer que c'est l'unique façon d'écrire M comme une somme d'une matrice symétrique et une matrice anti-symétrique.
3. Montrer que toute forme bilinéaire $\Delta : E \times E \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme de deux formes bilinéaires, l'une symétrique, l'autre antisymétrique, que l'on précisera.

Exercice* 4. Pour chaque forme bilinéaire ϕ, sur l'espace vectoriel V donner son rang (sauf pour le 4) et calculer son noyau. Trouver l'orthogonal pour ϕ du sous-espace W (sauf pour le 4)).

1. $V = \mathbb{R}^3, \ \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$
2. $V = \mathbb{R}^3, \ \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_2y_2, \quad W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$

3. $V=\mathbb{R}^3$, $\phi\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$, $\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\\z\end{pmatrix} \mid x,z\in\mathbb{R}\right\}$
4. $V=C^0([0,1],\mathbb{R})$, $\phi(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

Exercice 5. Soient A et B des matrices $n\times n$. Montrer l'implication suivante :

$$\forall X,Y\in\mathbb{R}^n,\ {}^tXAY={}^tXBY \quad\Rightarrow\ A=B.$$

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel, et ϕ une forme bilinéaire symétrique définie sur V.

1. Vérifier que si q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme ϕ alors on a la relation

$$\phi(x,y)=\frac{1}{4}(q_\phi(x+y)-q_\phi(x-y)).$$

2. En déduire que si $q_\phi(u)=q_\phi(v)$, alors $(u+v)$ et $(u-v)$ sont orthogonaux pour la forme bilinéaire ϕ.
3. Interpréter ce résultat quand $V=\mathbb{R}^3$ et ϕ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Vérifier que si V est un espace vectoriel et q_ϕ est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique ϕ sur $V\times V$ alors on a les relations

$$\phi(x,y)=\frac{1}{2}(q_\phi(x+y)-q_\phi(x)-q_\phi(y)).$$

et

$$q_\phi(x)+q_\phi(y)=\frac{1}{2}(q_\phi(x+y)+q_\phi(x-y)).$$

Exercice 8. Pour chaque forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$, donner la forme polaire ϕ associée et la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $q\,(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$
2. $q\,(x,y,z)=2xy+4xz+6yz$
3. $q\,(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+xy+yz$
4. $q\,(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+2xy+4yz$

Exercice* 9. (version simplifiée de la forme de Minkowski)
Sur $\mathbb{R}^2$, on considère la forme bilinéaire

$$M:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ M\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)\mapsto x_1x_2-y_1y_2.$$

1. Donner la matrice N de M dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $P=\begin{pmatrix}a&b\\d&e\end{pmatrix}$ une matrice telle que $M(P\underline{V},P\underline{W})=M(\underline{V},\underline{W})$ pour tous $\underline{V},\underline{W}$ dans $\mathbb{R}^2$.
   On suppose pour simplifier que $a,e>0$.
   Montrer que $M(P\underline{V},P\underline{W})=M(\underline{V},\underline{W})$ pour tout $\underline{V},\underline{W}$ si et seulement si

$$a^2-d^2=1,\ b^2-e^2=-1 \text{ et } ab=de.$$

3. En déduire que $a = e$.
4. Montrer que si $\beta = \sqrt{a^2 - 1}$ alors $b = d = \pm\beta$.
5. Ecrire P en fonction de b. Que constate-t-on ? (On pourra faire une substitution $b = \sinh(\alpha)$.)

Exercice 10. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ${}^tXMX > 0$.
(ii) $a > 0$ et $ad - b^2 > 0$.

Exercice 11. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ qui est orthogonale pour la forme bilinéaire donnée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire une base orthonormée pour cette même forme.
3. Quel est le rang de A ?

Exercice* 12. Soit V l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2.

1. Soit ϕ la forme bilinéaire définie, pour tout $(A, B) \in V \times V$, par
$$\phi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tA\, B).$$
   (a) Déterminer sa matrice par rapport à la base canonique de V.
   (b) Démontrer qu'elle est symétrique et donner son rang.
   (c) Trouver une base ϕ-orthonormale pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Soit D la forme quadratique définie, pour tout $A \in V$, par $D(A) = \det(A)$.
   (a) Calculer la forme bilinéaire symétrique associée à D.
   (b) Donner son rang et sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice* 13. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on considère la forme $\tau(A, B) = \mathrm{Tr}(AB)$ où Tr est la trace d'une matrice.

1. Montrer que τ est une forme bilinéaire symétrique.
2. Montrer que pour toute matrice carrée $A \neq 0$ il existe B telle que $\tau(A, B) \neq 0$. (On pourra calculer $\tau({}^tA\, A)$).

Exercice 14. Pour chaque forme quadratique q

(i) Appliquer la réduction de Gauss à q pour l'écrire comme combinaison linéaires de carrés de formes linéaires indépendantes.
(ii) Déduire la signature et le rang de q.
(iii) Donner une base q-orthogonale pour $\mathbb{R}^n$.
(iv) Si possible, donner une base q-orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
(v) La forme bilinéaire associée à q est elle un produit scalaire ?

1. $q(x, y) = x^2 + xy + 3y^2$,
2. $q(x, y) = x^2 - 5xy - y^2$,
3. $q(x, y) = xy$,

4. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xz + yz$,
5. $q(x, y, z) = xy - yz$,
6. $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$.

Exercice 15. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, on considère sur $\mathbb{R}_2[X]$ la forme quadratique qui à un polynôme associe son discriminant :

$$\begin{gathered}\Delta \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ P = aX^2 + bX + c \mapsto \Delta(P) = b^2 - 4ac\end{gathered}$$

1. Donner la forme bilinéaire symétrique φ associée à Δ.
2. Donner la matrice de la forme polaire φ dans la base $\mathcal{F}_0 = \{1, X, X^2\}$.
3. Montrer que pour tout polynôme $P(X) = aX^2 + bX + c$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire :
$$\Delta(P) = b^2 + (a - c)^2 - (a + c)^2.$$
4. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1 = (\frac{1}{2}(X^2 - 1), X, \frac{1}{2}(X^2 + 1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
5. Donner la matrice de passage de la base $\mathcal{F}_0$ à la base $\mathcal{F}_1$.
6. Donner la matrice de la forme φ dans la base $\mathcal{F}_1$.
7. Exprimer $\Delta(P)$ en fonction des coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}_1$.
8. Donner le rang et la signature de φ.

Exercice 1. Pour chaque matrice A, donner la forme bilinéaire symétrique ϕ dont A est la matrice dans la base canonique. Trouver une base orthogonale pour ϕ. Existe-t-il une base ϕ-orthonormée ? La forme ϕ est-il un produit scalaire ?

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Les formes suivantes sont-elles des produits scalaires ?

1. Sur $\mathbb{R}[x]$, $(P, Q) \mapsto \int_0^1 e^x P(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$.
2. Sur $\mathbb{R}^3$, la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.
3. Sur $\mathbb{R}^3$, la forme polaire de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$.
4.* Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$.
5.* Sur $M_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 3. Démontrer les relations suivantes dans un espace vectoriel euclidien :

1. $||x + y||^2 - ||x - y||^2 = 4x \cdot y$.
2. $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Exercice 4. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt pour orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ avec son produit scalaire usuel la base (e_1, e_2, e_3), où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Pour chaque espace euclidien E ci-dessous muni du produit scalaire ϕ, appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille $\mathcal{F}$ afin de produire une base orthonomée pour $\langle \mathcal{F} \rangle$. Calculer la projection orthogonale de $v \in E$ sur $\langle \mathcal{F} \rangle$. Donner des équations définissant $\langle \mathcal{F} \rangle$.

1. $E = \mathbb{R}^3$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $E = \mathbb{R}^4$, ϕ le produit scalaire canonique, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P, Q) = \int_{-1}^1 P(X)\, Q(X) dX$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
4. $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\phi(P, Q) = \int_0^1 P(X)\, Q(X) dX$, $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$, $v = X^3$.
5.* $E = \mathbb{R}^3$, $\phi(x, y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Considérons dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x, y) = 4x^2 + xy + y^2$.

1. Démontrer que q définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

2. Donner une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$ pour ce produit scalaire. On pourra utiliser deux méthodes pour y parvenir : soit appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, soit utiliser la réduction de Gauss de q.

Exercice 7. Considérons sur $\mathbb{R}^3$, la forme quadratique q, définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 2yz + 4z^2.$$

1. Démontrer que la forme bilinéaire associée à q est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Orthonormaliser, par le procédé de Gram-Schmidt, la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$ q-orthonormale.

Exercice 8. Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

1. Montrer que si m et n sont des entiers distincts alors les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$, $x \mapsto \cos(mx)$, $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \sin(mx)$ sont deux à deux orthogonales pour ce produit scalaire.
2. Calculer $\|x \mapsto \cos(nx)\|$ et $\|x \mapsto \sin(nx)\|$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer la projection orthogonale de la fonction $x \mapsto x$ sur le sous-espace de $\mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $1, \cos, \sin, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \sin(2x)$.

Exercice 9. Nous considérons l'espace $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles. Nous munissons cet espace du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

1. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt afin de produire une base orthonormée pour le sous-espace $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$.
2. Calculer la meilleure approximation polynomiale (au sens de la distance associée au produit scalaire $\langle\cdot, \cdot\rangle$) de degré inférieur ou égal à 2 des fonctions suivantes : exp, cos et $x \mapsto \sqrt{x + 1}$.

Exercice* 10. Soit P une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que la matrice ${}^tPP$ est symétrique.
2. Préciser, dans la base canonique $(e_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice de la forme quadratique associée au produit scalaire usuel (canonique). Que peut-on dire de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ pour cette forme quadratique ?
3. Soit q la forme quadratique définie, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, par la matrice ${}^tPP$.
   (a) Pour tout vecteur colonne X, dont les coordonnées sont exprimées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, exprimer matriciellement la valeur $q(X)$.
   (b) Démontrer que q est une forme quadratique définie positive.
   (c) En déduire, en fonction de P et des vecteurs $e_1, \ldots, e_n$, une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice* 11. Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et soit $W \subset V$ un sous-espace de dimension finie. Soit p_W la projection orthogonale sur W. Montrer que

1. $p_W(v) = v$ si et seulement si $v \in W$

2. $p_W \circ p_W = p_W$
3. $p_W(v) = 0$ si et seulement si $v \in W^\perp$.

Exercice 12. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver les nombres a et b tels que $y = ax + b$ soit la meilleure droite d'approximation des points :

1. $(x = 1, y = 1), (x = 2, y = 3), (x = 3, y = 2)$.
2. $(x = 1, y = 0), (x = 2, y = 5), (x = 3, y = 7)$.

Exercice 13. Utiliser la méthode de la projection orthogonale pour trouver la fonction $x \mapsto g(x) = a + b\cos(x) + c\cos(2x)$ qui minimise la distance $d(g, x \mapsto x^2)$ dans l'espace $C^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f_1, f_2\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)f_2(t)dt$.

Exercice* 14.

1. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ un famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $P = (v_1|v_2|\ldots|v_n)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les v_i. Montrer que $({}^tPP)_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$, où $\langle -, -\rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit E un espace euclidien et soit B_1 une base orthonormée pour E. Soit B_2 une autre base pour E. Montrer que B_2 est orthonormée si et seulement si la matrice P de changement de la base B_1 à B_2 est une matrice orthogonale.

Exercice* 15. Soit f une endomorphisme d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle -, -\rangle$.

1. Montrer que l'application $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par $\phi(v, w) = \langle v, f(w)\rangle$ est bilinéaire.
2. Soit B une base de E. Soit M la matrice de l'application linéaire f dans la base B. Soit N la matrice de l'application bilinéaire ϕ dans la base B. Montrer que si B est une base orthonormée alors $M = N$.
3. Montrer que réciproquement si B n'est pas orthonormée alors $M \neq N$.

Exercice 16. Montrer que le produit de deux réflexions dans $\mathbb{R}^2$ est une rotation dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17. Pour chaque matrice symétrique 3×3, trouver une base B_1 de $\mathbb{R}^3$, composée de vecteurs propres de A_i, qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Pour chaque forme quadratique q, trouver une base de $\mathbb{R}^3$ qui est q-orthogonale et orthonormée pour les produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

1. $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.
2. $q(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2\sqrt{2}xz + 4\sqrt{2}yz$.

Exercice 1.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 1$, et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence sur k la formule $1+\lambda+\ldots+\lambda^k = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$.

Exercice 2. Déterminer si les séries suivantes convergent ou non (utiliser une comparaison ou le critère de d'Alembert dans certains cas).

1. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}\right)$
2. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{n^{-1/2}}{2^n}\right)$
3. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}\right)$
4. $(\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!})$

Exercice 3. Pour chaque série ci-dessous, déterminer si elle converge.

1. $\left(\sum_{n\geq 1} e^{\frac{1}{n^2}} - \cos(\frac{1}{n})\right)$
2. $\left(\sum_{n\geq 1} n^{\frac{3}{2}}(e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} - 1)\right)$
3. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1-\cos(\frac{1}{n})}{\sin(\frac{1}{n})}\right)$
4. $\left(\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n^\alpha} - \sqrt{(n-1)^\alpha})\right)$ (discuter selon les valeurs de α).
5. $(\sum_{n\geq 1} \sin(\frac{1}{n} - \sin(\frac{1}{n}))$
6. $(\sum_{n\geq 1} \log(1+\frac{1}{n}) - \log(1-\frac{1}{n}))$
7. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}\right)$
8. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n+1}}\right)$
9. $\left(\sum_{n\geq 1} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$
10. $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1-n\ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n+1}}\right)$

Exercice 4.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $(\sum_{n\geq 1} n^\alpha \lambda^n)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| < 1$.

1. En utilisant le critère de d'Alembert, montrer que cette série converge.
2. En déduire que pour tout polynôme P et tout λ tel que $|\lambda| < 1$ la série $(\sum_{n\geq 1} P(n)\lambda^n)$ converge.

Exercice 5.
On considère dans cet exercice des séries de la forme $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ avec α, β des nombre réels strictement positifs.

1. Par comparaison avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, montrer que cette série converge lorsque $\alpha > 1$.
2. On suppose maintenant $\alpha < 1$. Quelle est la limite quand $n \to \infty$ de $n^{\alpha-1}\log(n)^\beta$?
3. En supposant toujours que $\alpha < 1$, démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout n $\frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta} \geq \frac{C}{n}$. En déduire que dans ce cas la série $(\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta})$ diverge quel que soit β.

Exercice 1. Donner les coefficients de Fourier trigonométriques des fonctions suivantes, définies sur $[-\pi, \pi]$:
1. $f(x) = \cos(2x)$,
2. $f(x) = 3 + 2\cos(3x) + 4\sin(5x)$,
3. $f(x) = \cos^2(x)$.

Exercice 2. Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.
1. Montrer que si f est paire alors sa série de Fourier est une série de cosinus.
2. Montrer que si f est impaire alors sa série de Fourier est une série de sinus.

Exercice 3.

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de f, c_k. Vérifier qu'on a bien $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$.
3. En déduire, en utilisant le théorème de Parseval, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 4.

1. Trouver les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$.
2. En déduire les coefficients de Fourier exponentiels de f, c_k. Vérifier qu'on a bien $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}$.
3. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 5. Soit de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |\sin(x)|$. Calculer le développement en série de Fourier de f.

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et de la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \cos(ax)$. Calculer le développement en série de Fourier de f et montrer que

$$\frac{\pi}{\tan(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2}.$$

Exercice 7. Déterminer le développement en série de sinus de la fonction

$$f :]0, \pi[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

Exercice 8. Déterminer le développement en série de cosinus de la fonction

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } x \geq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Exercice 9. On considère la fonction 2π-périodique définie sur par $f(x) = x$ pour $x = [-\pi, \pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de f, et étudier la convergence de la série de Fourier $S(f)(x)$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ en utilisant le théorème de Dirichlet (on pourra traiter séparément les cas $x = \pm\pi$).

Exercice 10. On considère la fonction 1-périodique définie sur par $f(x) = x$ pour $x = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Calculer la série de Fourier $S(f)(x)$ et étudier sa convergence (on pourra soit calculer les coefficients de Fourier directement en utilisant les formules du cours pour les fonctions 1-periodiques, soit faire un changement de variables dans la série de Fourier de l'exercice précédent).

Exercice 11. (Juin 2019) Dans cet exercice, on admettra que pour n entier non nul, on a :

$$\int_0^\pi x^3 \sin(nx)\, dx = -\pi(n^2\pi^2 - 6)\frac{(-1)^n}{n^3}$$

Soit $S(f)$ la série de Fourier de la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(t) = t^3$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f
2. Montrer que $S(f)(t) = f(t)$ pour $t \in]-\pi, \pi[$ en appliquant le théorème de Dirichlet (on justifiera que les hypothèses sont vérifiées).
3. La formule pour $S(f)(t)$ de la question précédente est-elle valable pour $t = \pi$? Sinon, que vaut $S(f)(\pi)$?
4. Déterminer la valeur de la série de Fourier au point $t = \pi/2$. En déduire une série convergente dont la somme vaut $\pi^3/8$.
5. Montrer que l'identité de Parseval s'applique. En déduire une formule pour :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2\pi^2 - 6)^2}{n^6}$$
6. Les séries suivantes sont-elles convergentes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$?
7. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$, sachant que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$