(1) 1. Une FBS $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si la forme quadratique $q_\phi : V \to \mathbb{R}$ (définie par $q_\varphi(v) = \varphi(v,v)$) satisfait $q_\varphi(v) \geq 0$ pour tout $v \in V$, et $q_\varphi(v) = 0$ implique $v = 0$.
2. La FBS

$$\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 + x_2y_2$$

est un produit scalaire (c'est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$), mais

$$\psi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 - x_2y_2$$

ne l'est pas, car $q_\psi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = -1 < 0$.

(2) 1.

$$\begin{aligned}
&q_\Phi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\
&= 2\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 2\left((x_1 + \tfrac{1}{2}x_2)^2 + \tfrac{3}{4}x_2^2\right) + 2x_2x_3 + 2x_3^2 \\
&= 2\left(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{3}{2}\left(x_2^2 + \tfrac{4}{3}x_2x_3 + \tfrac{4}{3}x_3^2\right) = 2\left(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{3}{2}\left(\left(x_2 + \tfrac{2}{3}x_3\right)^2 + \tfrac{8}{9}x_3^2\right) \\
&= 2\left(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{3}{2}\left(x_2 + \tfrac{2}{3}x_3\right)^2 + \tfrac{4}{3}x_3^2.
\end{aligned}$$

Comme $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3} > 0$, la forme est de signature $(3,0)$ sur $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc c'est un produit scalaire.

2. On prend

$$\begin{array}{ll}
\tilde{v}_1 = e_1; & \Phi(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1) = 2, \Phi(e_2,\tilde{v}_1) = 1 \\
\tilde{v}_2 = e_2 - \dfrac{\Phi(e_2,\tilde{v}_1)}{\Phi(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1)}\tilde{v}_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; & \Phi(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2) = \tfrac{3}{2}, \Phi(e_3,\tilde{v}_1) = 0, \Phi(e_3,\tilde{v}_2) = 1, \\
\tilde{v}_3 = e_3 - \dfrac{\Phi(e_3,\tilde{v}_2)}{\Phi(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)}\tilde{v}_2 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; & \Phi(\tilde{v}_3,\tilde{v}_3) = \tfrac{4}{3}
\end{array},$$

et on normalise

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\tilde{v}_1}{\sqrt{\Phi(\tilde{v}_1,\tilde{v}_1)}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_2 &= \frac{\tilde{v}_2}{\sqrt{\Phi(\tilde{v}_2,\tilde{v}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_1 &= \frac{\tilde{v}_3}{\sqrt{\Phi(\tilde{v}_3,\tilde{v}_3)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) 1. $M = \begin{pmatrix} 5 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. $\det(M - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda - 32 = (\lambda - 8)(\lambda + 4)$, donc les valeurs propres de M sont -4 et 8.

2. $M - (-4)I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$, qui a pour noyau $Vect\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right\}$.
$M - 8I_2 = \begin{pmatrix} -3 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -9 \end{pmatrix}$, qui a pour noyau $Vect\left\{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$.
On peut prendre $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. Si φ désigne la forme polaire de q, on a $\varphi(e_1, e_2) = {}^t e_1(Me_2) = {}^t e_1(8e_2) = 8\langle e_1, e_2\rangle$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$. On a aussi $\varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_2, e_1) = {}^t e_2(Me_1) = {}^t e_1(-4e_2) = -4\langle e_1, e_2\rangle$. Comme $-4 \neq 8$, ces deux égalités impliquent $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, donc $\varphi(e_1, e_2) = 0$.

4. On forme la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base e_1, e_2. Par la question (3), c'est une matrice orthogonale, c'est-à-dire $P^{-1} = {}^tP$. On a alors $P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, ce qui est la matrice de q dans la base e_1, e_2. La signature est $(1, 1)$, puisque $-4 < 0$ et $8 > 0$.

(4) 1. On a $\Phi(f, g) = \Phi(g, f)$ puisque $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. On a aussi pour tous $f_1, f_2, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g) = \int_0^1 x(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)g(x)\, dx = \int_0^1 x(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))g(x)\, dx = \int_0^1 (\lambda_1 x f_1(x)g(x) + \lambda_2 f_2(x)g(x))\, dx = \lambda_1 \int_0^1 x f_1(x)g(x)\, dx + \lambda_2 \int_0^1 f_2(x)g(x))\, dx = \lambda_1 \Phi(f_1, g) + \lambda_2 \Phi(f_2, g).$$

Ceci montre que Φ est linéaire par rapport à sa 1ère variable, donc par symétrie aussi par rapport à sa 2è variable, c'est une FBS.

La forme quadratique associée, $q(f) = \int_0^1 x f(x)^2\, dx$ satisfait $q(f) \geq 0$ pour toute f, car $xf(x)^2 \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et l'intégrale d'une fonction positive est positive. De plus, si $q(f) = 0$, comme $\int_0^1 x f(x)^2\, dx = 0$ et que la fonction $x \mapsto xf(x)^2$ est positive et *continue*, on a $xf(x)^2 = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, ce qui donne $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Par continuité, ceci implique $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, donc $f = 0$.

2. Noter que f_1, f_2 défini par $f_1 = 1$, $f_2 = x$ forme une famille libre de $C([0,1],\mathbb{R})$, car f_2 n'est pas constante, donc elle ne peut pas être égale à λf_1, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $V = Vect\{f_1, f_2\}$ est donc de dimension 2. On note e_1, e_2 les fonctions de l'énoncé, qui sont bien dans V, car $e_1 = \sqrt{2} f_1$ et $e_2 = -4f_1 + 6f_2$. On a

$$\Phi(e_1,e_1) = \int_0^1 xe_1(x)^2\ dx = \int_0^1 x \cdot 2\ dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\frac{1}{2} = 1$$

$$\Phi(e_1,e_2) = \int_0^1 xe_1(x)e_2(x)\ dx = \sqrt{2}\int_0^1 x(6x-4)dx = 2\left[2x^3 - 2x^2\right]_0^1 = 0$$

$$\Phi(e_2,e_2) = \int_0^1 xe_2(x)^2\ dx = 4\int_0^1 x(3x-2)^2\ dx = 4\left[\frac{9}{4}x^4 - 4x^3 + 2x^2\right]_0^1 = 4\frac{1}{4} = 1.$$

Comme e_1, e_2 est Φ-orthogonale, c'est une partie libre, c'est une famille à deux éléments dans V qui est de dimension 2, donc c'est une base de V.

3. $\pi_W(f) = \Phi(f,e_1)e_1 + \Phi(f,e_2)e_2$. On calcule

$$\Phi(f,e_1) = \int_0^1 xf(x)e_1(x)\ dx = \sqrt{2}\int_0^1 x^4\ dx = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\Phi(f,e_2) = \int_0^1 xf(x)e_2(x)\ dx = 2\int_0^1 x^4(3x-2)\ dx = 2\left[\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5},$$

donc $\pi_W(f) = (\sqrt{2}e_1 + e_2)/5$, ou encore $\pi_W(f)(x) = \dfrac{6x-2}{5}$.

4. On cherche le minimum de la distance au carré (déduite du produit scalaire Φ) entre f et un élément quelconque de W, ce qui est donné par la distance au carré entre f et $\pi_W(f)$, c'est-à-dire

$$\Phi(f - \pi_W(f), f - \pi_W(f)) = \int_0^1 x\left(f(x) - \pi_W(f)(x)\right)^2\ dx =$$

$$\int_0^1 x\left(x^3 - \frac{6x-2}{5}\right)^2\ dx = \int_0^1 \left(x^7 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{4}{5}x^4 + \frac{36}{25}x^3 - \frac{24}{25}x^2 + \frac{4}{25}x\right)\ dx = \frac{1}{200}.$$