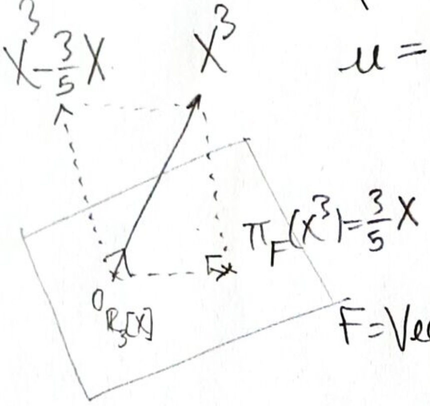
Equations définissant F ?

on cherche un vecteur non nul orthogonal à F, on peut prendre



$u = v - \pi_F(v) = X^3 - \frac{3}{5}X.$

$F = \text{Vect}\{1, X, X^2\}$

Alors par le même raisonnement que dans les deux exos précédents, on a $F = (\text{Vect}\{u\})^{\perp}$ càd.

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \phi\left(P, X^3 - \frac{3}{5}X\right) = 0 \right\}$$

↳ ceci est une équation pour F.

4) $v_1 = 1$ $\qquad \rightarrow v_1, v_2, v_3$ est ϕ-orthonormée

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(X - \frac{1}{2}\right)$

$v_3 = \frac{1}{\sqrt{180}}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$

$\pi_F(v) = \frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$

$$F = \left(\text{Vect}\{v - \pi_F(v)\}\right)^{\perp}$$

$$= \text{Vect}\left\{\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}\right)\right\}^{\perp}$$

5) $\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1) = 3$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\phi(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) = \frac{8}{3}$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\phi(v, \tilde{v}_1) = \phi(v, \tilde{v}_2) = 0$

donc $\pi_F(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $F = (\text{Vect}\{v\})^{\perp}$

5) Pour les calculs, il peut être pratique d'utiliser la matrice de ϕ dans la base canonique.

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Pour faire Gram-Schmidt, on pose

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1) = 3$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}{\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2) &= \frac{1}{9}\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{9}(1 \ 3 \ 0)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}(0 \ 8 \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Pour obtenir une base ϕ-orthonormée, on normalise (en utilisant la forme quadratique q_ϕ), càd.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{\phi(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)}}\tilde{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\phi(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)}}\tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vue la forme de la matrice de ϕ dans la base canonique et le fait que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, on a $\phi(v, \tilde{v}_1) = \phi(v, \tilde{v}_2)$

càd. v est ϕ-orthogonal à F.

Donc $\pi_F(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $F = \{\mathrm{Vect}(v)\}^{\perp_\phi}$

càd $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0 \right\}.$