TD 3

[1]

Exercice 1 :

a) donner la forme ϕ associée à A.

b) donner une base ϕ-orthogonale, ϕ-orthonormée

c) ϕ est-elle un p.s.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, soient $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$ et $y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^2$

a) $\phi(x, y) = {}^t x A y = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Il s'agit du p.s usuel sur $\mathbb{R}^2$.

b) La base canonique $\left\{ \overset{e_1}{\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}} ; \overset{e_2}{\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}} \right\}$ est ϕ-orthonormée puisque :

$(0\ 1) \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow e_1 \perp e_2$

et $\phi(e_1 ; e_1) = 1 = \phi(e_2, e_2)$

c) ϕ est bilinéaire, symétrique, définie et positive car :

$(\mapsto \geq 0)$

$\phi(x, x) = 0 \iff x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_1 = 0$ et $x_2 = 0$

$\phi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 \geqslant 0$

De manière générale on met A sous forme diagonale et on regarde :

$\longrightarrow$ pas de terme nul (définie)

$\longrightarrow$ pas de terme négatif (positive)

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $\phi(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$

b) $\phi(e_1 ; e_2) = 0 = \phi(e_2 ; e_1)$ donc la base canonique est ϕ-orthogonale

$\phi(e_1 ; e_1) = 1$ et $\phi(e_2 ; e_2) = -1 = i^2$ il faudrait aller dans $\mathbb{C}$

pour la ϕ-orthonormaliser.

c) La forme n'est pas positive donc ce n'est pas un p.s.

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\phi(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$

b) L'algorithme de réduction de Gauss nous fournit une base ϕ-orthogonale :

$q_\phi(x) = (x_1^2 + x_2^2 + \cancel{2 x_1 x_2})$

$= (x_1 + x_2)^2$

$\left[4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2 \right.$
(n'oubliez pas au cas où)$\left.\right]$

Nous cherchons donc la base B' dans laquelle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ devient $\begin{pmatrix} (x_1 + x_2) \\ a \end{pmatrix}$

ce que l'on veut.

Donc $P_{B'}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

si $a = x_2$ (transformation la plus simple)

On l'inverse : $P_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; on vérifie $P_B(B') P_B(B')^{-1} = Id$.

$B' = \left\{ e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et on a bien $\phi(e_1', e_2') = -1 + 0 + 1 + 0 = 0$

B' est ϕ-orthogonale.

TD 3 [2]

Exercice 1

3) b) Ainsi A dans B devient $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans B',

On se demande si il pourrait exister une base $B_u = \{u_1 ; u_2\}$

ϕ-orthonormée, c-a-d :

$q_\phi(u_1) = 1$, $q_\phi(u_2) = 1$ et $\varphi(u_1, u_2) = 0$ $(*)$

Montrons que ce n'est pas possible :

On exprime u_1 et u_2 dans la base B' : $u_1 = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$; $u_2 = \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$

$(*) \iff a^2 = 1$; $c^2 = 1$ et $ac = 0 = \varphi(u_1 ; u_2)$

Si B_u est φ-orthogonale alors soit $a = 0$, soit $c = 0$ ce qui

rend soit $c^2 = 1$, soit $a^2 = 1$ impossible.

Il n'existe donc pas de base ϕ-orthonormée.

d) A' contient un 0 sur la diagonale, la forme ϕ n'est

donc pas définie, ce n'est pas un p.s.

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) $\phi(x, y) = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2) \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$

$= x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$

b)

$$q_\phi(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2$$

$$= (x_1+x_2)^2 - 2x_2^2$$

La matrice de passage est $\underset{B'}{P(B)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ comme au "3)".

$$\underset{B}{P(B')} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

B' est φ-orthogonale (puisque A' n'a pas de termes hors diagonaux).

et $q_\phi\left(e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ ok

$q_\phi\left(e_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -2$ pas ok

Il n'existe pas de base ϕ-orthonormée car si tel était le cas il

existerait $a, b, c, d \in \mathbb{R}^4$ tq : $u_1 = \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$ et $u_2 = \begin{vmatrix} c \\ d \end{vmatrix}$

$$\begin{cases} q(u_1) = 1 = a^2 - 2b^2 \\ q(u_2) = 1 = c^2 - 2d^2 \end{cases} \quad \text{et } q(u_1 ; u_2) = 0 = ac - 2bd$$

$$\iff a = \frac{2bd}{c} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \overset{(1)}{1 = 4\frac{b^2d^2}{c^2} - 2b^2} \overset{(2)}{\iff} 1 = \frac{\cancel{4b^2d^2} - 2b^2 - \cancel{4b^2d^2}}{1+2d^2} \iff \underset{>0}{1+2d^2} = \underset{\leq 0}{-2b^2} \\ 1 = c^2 - 2d^2 \iff c^2 = 1 + 2d^2 \quad (2) \end{cases}$$

$\boxed{\text{impossible}}$

c) La forme n'est pas un p.s puisqu'elle n'est pas positive $(\varphi(e_2' ; e_2') = -2)$

TD 3

Exercice 2 :

Il y a quatre tests à effectuer :

a) bilinéaire

b) symétrique

c) définie

d) positive.

1) $(P, Q) \longmapsto \int_0^1 e^x P(x) Q(x)\, dx$

a) $\phi(P+R, Q) = \int_0^1 e^x (P(x) + R(x)) Q(x)\, dx$ (par linéarité de $\int$.)

$= \int_0^1 e^x P(x) Q(x) + \int_0^1 e^x R(x) Q(x)\, dx$

$= \phi(P, Q) + \phi(R, Q)$

on a donc la linéarité à gauche.

b) On $\int_0^1 e^x P(x) Q(x)\, dx = \int_0^1 e^x Q(x) P(x)\, dx$

Donc ϕ est symétrique $\Rightarrow$ linéaire à droite $\Rightarrow$ bilinéaire.

c) $\phi(P, P) = \int_0^1 e^x P^2(x)\, dx$ mais $e^x > 0$ sur $[0 ; 1]$

tout comme $P^2(x)$ (≥ 0) donc il s'agit d'une somme de termes

positifs $\Rightarrow \phi(P, P) \geq 0 .\ \forall P \in \mathbb{R}[x]$

d) $\phi(P,P) = 0 \iff \int_0^1 e^x P^2(x)\, dx = 0$

$\iff P^2(x) = 0 \quad \forall x \in [0;1]$

$\implies P$ a une infinité de zéros, il s'agit du polynôme

nul : $P = 0$

2) $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ sur $\mathbb{R}^3$: $x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$

La forme polaire et la forme bilinéaire associée ont même matrice :

$$A_q = A_\varphi = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & 1 & 2 & -2 \\ x_3 & 0 & -2 & 5 \end{array} \qquad \left(/!\backslash \quad 2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1 \right)$$

Dans B = base canonique

Il faudrait donc une base dans laquelle A_q serait diagonale

car celle-ci contient toute l'information sous forme "décodée".

On utilise donc la réduction de Gauss :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$$

Dans B' (qu'il n'est pas nécessaire de déterminer) on a :

$$A_q' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$ ses valeurs diagonales sont > 0

φ est donc bien bilinéaire (matrice) ; symétrique (matrice symétrique)

définie (pas de 0) et positive.

$\boxed{\text{TD 3}_{[4]}}$

Exercice 2 :

3.) $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

Comme en 2) on applique la réduction de Gauss :

$$q(x) = x_1^2 + x_1(2x_2 - 4x_3) + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 10x_2x_3$$

$$= 1 \times l_1 + 2\left(x_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 - \frac{25}{2}x_3^2 + x_3^2$$

mais $\left(1 - \frac{25}{2}\right)x_3^2$ donne une valeur négative dans la diagonale

φ n'est donc pas positive et n'est par conséquent pas un p.s.

4) $\phi : A, B \longmapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ $\qquad$ $\underline{\mathrm{Tr} \text{ est linéaire}}$

$\phi(A+B, C) = \mathrm{Tr}({}^t(A+B)C) = \mathrm{Tr}[{}^tAC + {}^tBC] = \mathrm{Tr}[{}^tAC] + \mathrm{Tr}[{}^tBC]$

Donc ϕ est linéaire à gauche.

$\phi(B, A) = \mathrm{Tr}[{}^tBA]$ mais ${}^tA$ et A ont la même diagonale

$\Rightarrow \mathrm{Tr}\,{}^tA = \mathrm{Tr}\,A$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}[{}^tBA] = \mathrm{Tr}[{}^t({}^tBA)] = \mathrm{Tr}[{}^tAB]$ $\quad (!\ {}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA\ !)$

ϕ est donc symétrique $\Rightarrow$ linéaire à droite donc bilinéaire.

c) $Tr[{}^tAA] = 0 \iff \sum_{ik} a_{ik} b_{ki}$ avec ${}^tA = a_{ij}$ et $A = b_{ij}$

d'où cela sort-il ?

si A et B sont carrés de taille n

Si : $A = a_{ij}$ et $B = b_{ij} \Rightarrow AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = C_{ij}$

C_{ij} est une matrice dont je veux sommer les éléments diagonaux C_{ii}

$\Rightarrow Tr\, AB = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$

On reprend $\sum_{ik} a_{ik} b_{ki} = \sum_{ik} a_{ik}^2$ car $b_{ji} = A \Rightarrow b_{ij} = {}^tA = a_{ij}$

on inverse lignes et colonnes

Donc si $\sum_{ik} a_{ik}^2 = 0$ $\quad a_{ik} = 0 \ \forall i$ et k car on somme des nombres positifs.

d) $Tr[{}^tAA] = \sum_{ik} a_{ik}^2$ = somme de nombres positifs donc $\phi(A,A) \geq 0 \ \forall A$.

ϕ est bien un produit scalaire.

5) $\phi : A, B \longmapsto Tr\, AB$ n'est pas un p.s car non positive.

<u>Exemple</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$

et $Tr(A^2) = -2$ n'est pas positif.