Thèse de Doctorat de Mathématiques de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Quelques applications des méthodes effectives en géométrie analytique

Dan Popovici

soutenue à Grenoble le vendredi 24 octobre 2003 devant le jury :

Laurent Bonavero (Université de Grenoble 1)
Jean-Pierre Demailly (Université de Grenoble 1) (directeur)
Christiaan Peters (Université de Grenoble 1)
Nessim Sibony (Université de Paris Sud)
Henri Skoda (Université de Paris 6) (Président)

au vu des rapports de :

Bo Berndtsson (Université de Göteborg)
Nessim Sibony (Université de Paris Sud)

Quelques applications des méthodes effectives en géométrie analytique

Dan POPOVICI

Résumé. On généralise d'abord le théorème de prolongement L^2 d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel au cas des jets de sections holomorphes d'un fibré en droites hermitien au-dessus d'une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe. On donne ensuite une démonstration simple, en étudiant un courant de type (1,1), d'un résultat d'Uhlenbeck et Yau qui avait permis d'établir la correspondance de Kobayashi-Hitchin sur les variétés kählériennes compactes. Dans la troisième partie on étudie une conjecture sur l'existence de régularisations des courants quasi-positifs fermés, avec contrôle des masses de Monge-Ampère, qui permettrait d'obtenir une nouvelle caractérisation des variétés de Moishezon généralisant celles de Siu et de Demailly qui répondaient à la conjecture de Grauert-Riemenschneider. On donne une estimation uniforme de la perte de positivité dans le théorème de régularisation des courants de Demailly et on obtient une version effective de la génération globale des faisceaux d'idéaux multiplicateurs sur un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$.

Mots-clés : Courant quasi-positif fermé, ensemble analytique, faisceau d'idéaux multiplicateurs, faisceau de jets, fibré holomorphe hermitien, fonction plurisousharmonique, masses de Monge-Ampère, nombre de Lelong, sous-fibré faiblement holomorphe, variété kählérienne faiblement pseudoconvexe

Abstract. We generalize first the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 extension theorem to the case of jets of sections of Hermitian holomorphic line bundles on weakly pseudoconvex Kähler manifolds. Then we give a new simple proof of a theorem of Uhlenbeck and Yau that was the main technical difficulty in their proof of the Kobayashi-Hitchin correspondence on compact Kähler manifolds. This is done via a (1,1)-current interpreted a posteriori as the curvature current of some quotient bundle. Thirdly, we investigate a conjecture on the existence of regularizations of closed almost positive currents whose Monge-Ampère masses are under control on a compact not necessarily Kähler manifold. This would yield a new characterization of Moishezon manifolds generalizing those of Siu and Demailly given in response to the Grauert-Riemenschneider conjecture. We give a uniform estimate of the loss of positivity in Demailly's regularization-of-currents theorem and an effective version of the global generation property of multiplier ideal sheaves on pseudoconvex open sets of $\mathbb{C}^n$.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

32J25, 32U05, 32U40, 32J27, 14C30, 53C05

Je dois à mon directeur de thèse Jean-Pierre Demailly toute ma formation mathématique de recherche. Les mots ne pourraient assez exprimer ma reconnaissance.

Je remercie également les rapporteurs et les membres du jury qui m'honorent par leur participation.

Je pense aussi à ma famille et à mes amis dont j'ai toujours apprécié les encouragements.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'établir des résultats effectifs en géométrie analytique complexe en vue d'applications à l'étude des variétés compactes, non nécessairement kählériennes, par exemple en termes d'existence de courants positifs fermés. La motivation première était de poursuivre l'étude de certaines questions soulevées par la solution donnée par Y. T. Siu ([Siu84, 85]) à la conjecture de Grauert-Riemenschneider ([GR70]) et par la généralisation, via des inégalités de Morse holomorphes, due à J.- P. Demailly ([Dem85]). Malgré des avancées importantes dans cette direction, comme celles de L. Bonavero ([Bon93]), de S. Ji et B. Shiffman ([JS93]), ou celle plus récente et spectaculaire de J.- P. Demailly et M. Paun ([DP01]), beaucoup reste à faire et un certain nombre de conjectures semblent encore hors de portée.

Deux types de méthodes effectives sont au coeur de cette thèse. D'une part, il est fait un ample usage d'estimations L^2, notamment le théorème de prolongement d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel ([OT87], [Man93]), le théorème de division de Skoda ([Sko72b], [Sko78]), et les estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur de Cauchy-Riemann ([Hör65]). D'autre part, la théorie des courants (quasi)-positifs fermés, initiée par P. Lelong ([Lel57]), est au centre des préoccupations de la dernière partie. Le théorème de régularisation des courants de J.- P. Demailly ([Dem92]) constitue à la fois l'instrument et le point de départ des investigations dans cette partie.

Voici une description des problèmes abordés dans la thèse.

Première partie : une généralisation du théorème d'Ohsawa-Takegoshi

Soit X une variété complexe faiblement pseudoconvexe de dimension n, munie d'une métrique kählérienne ω, et $Y \subset X$ une sous-variété lisse fermée de codimension r définie comme le lieu des zéros d'une section holomorphe $s \in H^0(X, E)$ d'un fibré holomorphe hermitien $E \to X$ de rang r. T. Ohsawa et K. Takegoshi ([OT87]) ont résolu le problème du prolongement des fonctions holomorphes, avec estimations de la croissance L^2, de la sous-variété Y à la variété ambiante X. Ultérieurement, L. Manivel ([Man93]) a généralisé ce résultat dans le cadre plus géométrique des sections holomorphes d'un fibré hermitien satisfaisant certaines conditions de positivité.

Le premier objectif de cette thèse a été celui de généraliser le théorème de prolongement

L^2 d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel au cas des jets de sections d'un fibré hermitien. Soit L un fibré en droites hermitien satisfaisant certaines conditions de positivité, et $k \geq 0$ un entier. Alors, tout "k-jet transverse à Y," à savoir toute section du faisceau de jets $L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}$, qui satisfait une certaine condition de croissance L^2, peut être prolongée en une section holomorphe globale de L sur X, avec contrôle de la norme L^2 sur un compact arbitraire de X.

Pour un k-jet $f \in H^0(X, \Lambda^n T^\star X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$ et une fonction $\rho > 0$, nous définissons en tout point $y \in Y$ la norme ponctuelle pondérée par ρ et associée à la section s, comme

$$|f|^2_{s,\rho,(k)}(y) := |\tilde{f}|^2(y) + \frac{|\nabla^1 \tilde{f}|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{1}{r}}\,\rho^{2(r+1)}}(y) + \cdots + \frac{|\nabla^k \tilde{f}|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{k}{r}}\,\rho^{2(r+k)}}(y),$$

où $\tilde{f} \in H^0(U, \Lambda^n T_X^\star \otimes L)$ est un prolongement local de f à un petit voisinage $U \subset X$ de y, et $\nabla^j \tilde{f} \in C^\infty(U, \Lambda^n T_X^\star \otimes L \otimes S^j N^\star_{Y/X})$ est construit à l'aide de la connexion de Chern du fibré vectoriel holomorphe $\Lambda^n T^\star X \otimes L$, canoniquement muni de la métrique induite par la métrique de L et par ω. Nous définissons ensuite la norme $L^2_{(k)}$ pondérée de f par :

$$||f||^2_{s,\,\rho,\,(k)} = \int_Y |f|^2_{s,\,\rho,\,(k)}\, |\Lambda^r(ds)|^{-2}\, dV_{Y,\,\omega}.$$

Pour tout entier $k \geq 0$, on note également

$$J^k : H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L) \to H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$$

le morphisme de groupes de cohomologie induit par la projection naturelle $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}$.

Avec ces notations, notre premier résultat s'énonce de manière précise sous la forme suivante.

Théorème 0.0.0.1 *Soit X une variété complexe faiblement pseudoconvexe de dimension n, munie d'une métrique kählérienne ω, L un fibré en droites holomorphe hermitien, E un fibré holomorphe hermitien de rang r sur X, et $s \in H^0(X,E)$ une section génériquement transverse à la section nulle. On définit :*

$$Y := \{x \in X \,;\, s(x) = 0, \Lambda^r(ds)(x) \neq 0\},$$

une sous-variété de X de codimension r. Supposons aussi que, pour un entier $k \geq 0$, la (1,1)-forme $i\Theta(L) + (r+k)\, id'd'' \log |s|^2$ est semipositive et qu'il existe une fonction continue $\alpha \geq 1$ sur X telle que les deux inégalités suivantes soient satisfaites sur X :

(a) $i\Theta(L) + (r+k)\, id'd'' \log |s|^2 \geq \alpha^{-1} \dfrac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2}$,

(b) $|s| \leq e^{-\alpha}$.

Si $\Omega \subset X$ est un ouvert relativement compact, on définit une fonction poids $\rho = \rho_\Omega > 0$ par $\rho(y) = \dfrac{1}{||Ds_y^{-1}|| \sup\limits_{\xi \in \Omega}(||D^2 s_\xi|| + ||Ds_\xi||)}$, *où D désigne la connexion de Chern de E.*

Alors, pour tout ouvert $\Omega \subset X$ *relativement compact et pour tout* k*-jet* $f \in H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$ *tel que*

$$\int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)} \, |\Lambda^r(ds)|^{-2} dV_{Y,\omega} < +\infty,$$

il existe $F_k \in H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L)$ *tel que* $J^k F_k = f$ *et*

$$\int_\Omega \frac{|F_k|^2}{|s|^{2r}\,(-\log|s|)^2} dV_\omega \leq C_r^{(k)} \int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)} \, |\Lambda^r(ds)|^{-2} dV_{Y,\omega},$$

où $C_r^{(k)} > 0$ *est une constante ne dépendant que de* r*, de* k*, de* E*, du diamètre de* Ω*, et de* $\sup_\Omega ||i\Theta(L)||$.

La principale difficulté dans la démonstration de ce résultat consiste à obtenir l'uniformité de la constante dans l'estimation finale. Comme pour le théorème d'Ohsawa-Takegoshi, l'intérêt réside dans la partie quantitative du résultat. La dépendance par rapport à s des estimations finales est complètement explicitée dans le choix de la fonction poids ρ. La constante $C_r^{(k)}$ est indépendante de s. Nous appliquons essentiellement les inégalités de Cauchy dans des cartes. Pour éviter l'apparition dans les estimations de croissance du rayon (incontrôlable) des cartes de coordonnées holomorphes locales de X, nous utilisons l'application exponentielle et un théorème de comparaison de type Rauch pour des variétés riemanniennes complètes.

Deuxième partie : une preuve simple d'un résultat d'Uhlenbeck et Yau

Soit (E, h) un fibré vectoriel holomorphe de rang r muni d'une métrique hermitienne C^∞ au-dessus d'une variété kählérienne compacte X. Un sous-faisceau analytique cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(E)$ du faisceau localement libre $\mathcal{O}(E)$ associé à E peut être vu comme un fibré avec singularités. En fait, $\mathcal{F}$ est localement libre dans le complémentaire d'un ensemble analytique $S \subset X$ de codimension ≥ 2. Il correspond ainsi à un fibré vectoriel holomorphe F sur $X \setminus S$. Le sous- fibré $F \hookrightarrow E_{|X\setminus S}$ peut être muni de la métrique déduite de h, et la projection orthogonale $\pi : E_{|X\setminus S} \longrightarrow F$ définit une section C^∞ sur $X \setminus S$ du fibré vectoriel holomorphe $\mathrm{End}\,E$, satisfaisant les relations :

$$(\star) \qquad \pi = \pi^\star = \pi^2, \qquad (\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0$$

sur $X \setminus S$, où D'' est la partie de type $(0,1)$ de la connexion de Chern sur $\mathrm{End}\,E$ associée à la métrique induite par h. La deuxième relation exprime le fait que la structure holomorphe de F est la restriction de la structure holomorphe de $E_{|X\setminus S}$. Un argument standard de théorie des courants implique que les 1-formes C^∞ sur $X \setminus S$, $D'\pi$ et $D''\pi$, définissent des 1-formes L^2 sur X après prolongement par 0 sur S.

Par conséquent, tout sous-faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}(E)$ définit une section $\pi \in L_1^2(X, \mathrm{End}\,E)$ de l'espace de Sobolev des sections L^2 dont les dérivées premières sont encore L^2, qui est C^∞ dans le complémentaire d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2 et qui vérifie les relations $(\star)$.

Le deuxième objectif de la thèse a été celui de redémontrer l'affirmation réciproque de façon relativement élémentaire. Cette réciproque avait été énoncée et démontrée par K. Uhlenbeck et S. T. Yau ([UY86, 89]) comme une étape essentielle dans leur démonstration de l'existence d'une unique métrique d'Hermite-Einstein dans tout fibré holomorphe stable au-dessus d'une variété kählérienne compacte. K. Uhlenbeck et S. T. Yau prouvaient ainsi la correspondance de Kobayashi-Hitchin entre les fibrés holomorphes d'Hermite-Einstein et les fibrés holomorphes semi-stables sur une variété kählérienne compacte.

Il était déjà connu, grâce à des résultats de S. Kobayashi et M. Lübke, que tout fibré d'Hermite-Einstein est semi-stable et se scinde en une somme directe de fibrés stables. Le résultat important de K. Uhlenbeck et S. T. Yau affirme la réciproque, beaucoup plus délicate, à savoir que tout fibré holomorphe stable E sur une variété kählérienne compacte admet une unique métrique d'Hermite-Einstein. La subtilité technique dans leur démonstration consiste à produire un sous-faisceau destabilisant de E, si une certaine suite de métriques construites sur E ne converge pas pour définir à la limite une métrique d'Hermite-Einstein. Ce problème était résolu par le théorème suivant dont nous donnons une nouvelle démonstration.

Théorème 0.0.0.2 *Soit (E, h) un fibré holomorphe de rang r muni d'une métrique hermitienne C^∞ au-dessus d'une variété complexe kählérienne compacte X et $\pi \in L^2_1(X, End\, E)$ tel que $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(Id_E - \pi) \circ D''_{\mathrm{End}E}\pi = 0$ presque partout.*

Alors il existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(E)$ sous-faisceau analytique cohérent de $\mathcal{O}(E)$ et $S \subset X$ sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 tels que:

1) $\pi_{|X \setminus S} \in C^\infty(X \setminus S, End\, E)$

2) $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(Id_E - \pi) \circ D''_{\mathrm{End}\,E}\pi = 0$, sur $X \setminus S$

3) $\mathcal{F}_{|X \setminus S} = \pi_{|X \setminus S}(E_{|X \setminus S}) \hookrightarrow E_{|X \setminus S}$ est un sous-fibré holomorphe de $E_{|X \setminus S}$.

La démonstration donnée par K. Uhlenbeck et S. T. Yau à ce théorème est extrêmement technique et n'est pas très instructive. Notre approche est assez élémentaire et étudie un $(1, 1)$-courant qui correspond a posteriori au courant de courbure d'un fibré quotient de E.

Troisième partie : vers une régularisation des courants avec contrôle des masses de Monge-Ampère

Les efforts de recherche dans cette direction trouvent leur origine dans la conjecture de Grauert-Riemenschneider ([GR70]) et dans ses solutions et généralisations. Le but est celui de comprendre la géométrie des variétés complexes compactes en termes de l'existence de fibrés holomorphes (ou, plus généralement, de classes de cohomologie de type $(1, 1)$ non nécessairement entières) satisfaisant des conditions de positivité.

Le critère de projectivité de Kodaira, caractérisant la projectivité des variétés compactes en fonction de l'existence de fibrés en droites amples, est peut-être le premier résultat fondamental dans cette direction, datant des années 1950. La notion d'amplitude elle-même illustre les liens profonds entre les aspects algébrique et analytique de la géométrie des fibrés vectoriels. En fait, d'un point de vue algébrique, un fibré en droites L sur une variété compacte X est dit ample si l'espace des sections globales de $L^{\otimes k}$ définit un plongement de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$, pour $k >> 1$. L'amplitude est ainsi définie par l'abondance des sections globales. Du point de vue de la géométrie différentielle, le fibré en droites L est dit ample s'il possède une métrique hermitienne C^∞ dont la forme de courbure est définie positive. Ces deux définitions sont en fait équivalentes, et l'existence d'un fibré en droites ample sur une variété compacte X est une condition nécessaire et suffisante pour que X soit projective.

La notion de projectivité peut être affaiblie en une version biméromorphe donnant lieu à la notion de variété de Moishezon. Une variété compacte X est dite de Moishezon si sa dimension algébrique (i. e. le degré de transcendance du corps $K(X)$ des fonctions méromorphes sur X) est maximale, égale à $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. De même, la notion d'amplitude d'un fibré en droites a un correspondant biméromorphe plus faible, la notion de fibré gros. Algébriquement, le fibré en droites L sur la variété compacte X, $\dim X = n$, est dit *gros* si la dimension $h^0(X, m\,L)$ des espaces de sections globales de ses puissances tensorielles $L^{\otimes m}$ est de l'ordre de croissance maximal, à savoir m^n, pour $m >> 1$. Ainsi, l'espace $H^0(X, L^{\otimes m})$ des sections globales de $L^{\otimes m}$ définit un plongement biméromorphe de X dans un espace projectif, pour $m >> 1$. Là aussi, des équivalents analytiques existent.

Le plus remarquable est celui donné par Y. T. Siu ([Siu85]) en démontrant une version généralisée de la conjecture de Grauert-Riemenschneider. Elle affirme qu'un fibré en droites L sur une variété compacte X est gros dès que L possède une métrique hermitienne C^∞ dont la forme de courbure est semi-positive partout et définie positive en un point. Un résultat complémentaire de S. Ji et B. Shiffman ([JS93]) affirme que l'existence d'une métrique hermitienne, éventuellement singulière, dont le courant de courbure est strictement positif (courant kählérien dans leur terminologie), est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fibré en droites $L \to X$ sur une variété compacte soit gros. Cette deuxième caractérisation ne demande plus la régularité de la métrique hermitienne, mais demande en contrepartie une condition plus forte de positivité.

Un progrès substantiel dans cette direction a été fait en 1985 par J.- P. Demailly ([Dem85]) peu après le résultat de Y. T. Siu ([Siu85]). Ses inégalités de Morse holomorphes ont permis de généraliser encore davantage le théorème de Siu, en affaiblissant l'hypothèse de positivité sur la courbure du fibré L. Un autre progrès important, le théorème de régularisation des courants, dû également à J.- P. Demailly ([Dem92]), a permis à S. Ji et B. Shiffman d'obtenir le résultat mentionné ci-dessus, simultanément avec un travail de L. Bonavero ([Bon93]) qui obtenait indépendamment un résultat équivalent.

Notre travail dans la dernière partie de la thèse s'est concentré sur une généralisation du théorème de régularisation des courants de J.- P. Demailly, qui n'existe encore que conjecturalement, et qui permettrait de faire un autre progrès substantiel dans la continuation de ceux décrits ci-dessus. Elle permettrait, entre autres, d'obtenir une version singulière des inégalités de Morse holomorphes de J.- P. Demailly (une telle version, due à L. Bonavero ([Bon93]), existe déjà dans le cas particulier d'une métrique ayant un type spécial de singularités, appelées analytiques). Elle permettrait aussi d'obtenir le résultat suivant qui englobe les résultats de Siu et de Ji-Shiffman mentionnés plus haut.

Conjecture 0.0.0.3 *Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte de dimension n. Alors L est gros si (et seulement si) il existe une métrique hermitienne h, éventuellement singulière, sur L, telle que*

$$i\Theta_h(L) \geq 0 \text{ sur } X \qquad \text{et} \qquad \int_X (i\Theta_h(L)_{ac})^n > 0,$$

où $\Theta_h(L)_{ac}$ désigne la partie absolument continue du courant de courbure.

Voici le cadre de ces questions. Soit $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$ un courant quasi-positif, d-fermé, de bidegré $(1,1)$ sur une variété complexe compacte X, où α est une $(1,1)$-forme réelle C^∞ et φ est une fonction quasi-psh. Soit γ une $(1,1)$-forme réelle continue telle que $T \geq \gamma$. Le théorème de régularisation de J.- P. Demailly ([Dem92]) affirme, entre autres, que T est la limite faible d'une suite (T_m) de courants fermés réels lisses de bidegré $(1,1)$, dans la même classe de cohomologie que T, éventuellement avec une partie négative. La partie négative peut être bornée en fonction des nombres de Lelong de T et de la géométrie de la variété ambiante X.

Une autre version de ce théorème concerne la régularisation par des courants à singularités analytiques. Le courant quasi-positif $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est dit à singularités analytiques si son potentiel quasi-psh φ est à singularités analytiques. Ceci signifie qu'il s'écrit localement sous la forme :

$$\varphi = \tfrac{c}{2}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2) + v,$$

où $f_1, \ldots, f_N$ sont des fonctions holomorphes, v est une fonction localement bornée et c un réel positif. Il est possible d'approcher T par des courants $T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_m$ à singularités analytiques sans modifier de manière significative les nombres de Lelong. L'avantage par rapport à la version précédente est que la perte de positivité est maintenant négligeable.

Théorème 0.0.0.4 (Demailly, 1992.) *Soit $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$ un courant quasi-positif, d-fermé, de bidegré (1,1) sur la variété complexe compacte X, où α est une (1,1)-forme réelle C^∞ et φ est une fonction quasi-psh. Soit γ une (1,1)-forme réelle continue telle que $T \geq \gamma$ et ω une métrique hermitienne C^∞ sur X.*

Alors, il existe une suite de fonctions quasi-psh φ_m telle que chaque φ_m est à singularités analytiques et :

(i) $\varphi(x) < \varphi_m(x) < \sup_{|\zeta - x| < r} \varphi(\zeta) + C\left(\frac{|\log r|}{m} + r + \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$,

par rapport à des ouverts de coordonnées qui recouvrent X, pour tout $r > 0$ tel que la boule $B(x,r)$ est incluse dans un tel domaine de carte. En particulier, (φ_m) converge ponctuellement et en norme $L^1(X)$ vers φ (et donc les courants $T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_m$ convergent faiblement vers T lorsque m tend vers $+\infty$), et :

(ii) $\nu(\varphi, x) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, x) \leq \nu(\varphi, x)$, *pour tout $x \in X$;*

(iii) $T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_m \geq \gamma - \varepsilon_m \omega$, *avec $\varepsilon_m > 0$ qui décroît vers 0.*

Néanmoins, ce théorème ne donne pas de contrôle des masses de Monge-Ampère des courants $T_m + \varepsilon_m \omega$ lorsque $m \to +\infty$, à savoir un contrôle asymptotique des expressions

$$\int_X (T_m + \varepsilon_m \omega)^k \wedge \omega^{n-k}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

les intégrales étant calculées sur les ensembles des points lisses des courants. Le résultat envisagé est le suivant.

Conjecture 0.0.0.5 *Sous les hypothèses du théorème 0.0.0.4, on peut choisir la suite $(T_m)_m$ de sorte que :*

$$\lim_{m\to+\infty} \varepsilon_m \int_X (T_m + \varepsilon_m \omega)^k \wedge \omega^{n-k} = 0,$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Nous esquissons maintenant les idées envisagées pour résoudre ce problème et les quelques résultats préliminaires obtenus.

La première étape consiste à trouver une estimation des réels ε_m qui mesurent la perte de positivité de T_m par rapport à T. Nous obtenons cette estimation en rendant effectifs une partie des arguments de l'article initial de J.-P. Demailly [Dem92]. Les estimations L^2 de Hörmander jouent un rôle essentiel.

Proposition 0.0.0.6 *Sous les hypothèses du théorème 0.0.0.4, si le courant quasi-positif fermé $T = \alpha + i\partial\bar\partial\varphi$ de bidegré $(1,1)$ vérifie $T \geq \gamma$ sur une variété hermitienne compacte (X, ω), pour une $(1,1)$-forme réelle γ de classe C^1, alors les courants régularisants $T_m \to T$ peuvent être choisis tels que*

$$T_m = \alpha + i\partial\bar\partial\psi_m \geq \gamma - \frac{C}{\sqrt[4]{m}}\,\omega, \text{ pour une constante } C > 0 \text{ indépendante de } m.$$

Une variante de ce résultat donne une meilleure estimation pour la perte de positivité des courants régularisants T_m si la forme γ est supposée de plus fermée et de classe C^∞.

Proposition 0.0.0.7 *Soit (X,ω) une variété hermitienne compacte et $T = \alpha + i\partial\bar\partial\varphi$ un courant quasi-positif fermé de bidegré $(1,1)$ qui vérifie $T \geq \gamma$ pour une $(1,1)$-forme réelle γ supposée fermée et de classe C^∞. Alors les courants régularisants $T_m \to T$ donnés par le théorème 0.0.0.4 peuvent être choisis en sorte que*

$$T_m = \alpha + i\partial\bar\partial\psi_m \geq \gamma - \frac{C}{m}\omega,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de m.

Dans la procédure locale d'approximation d'une fonction psh par des fonctions psh à singularités analytiques, J.-P. Demailly utilisait de manière essentielle le théorème d'Ohsawa-Takegoshi en un point. Dans ce nouveau contexte, nous avons besoin de savoir estimer une des dérivées partielles de la fonction construite par extension. Le théorème d'Ohsawa-Takegoshi sera appliqué maintenant sur une droite pour construire une fonction holomorphe de n variables, avec estimations L^2, à partir d'une fonction holomorphe définie sur une droite complexe. Cette fonction d'une variable complexe, qui sera prolongée, est construite en résolvant un problème de théorie du potentiel en une variable.

Ce résultat, combiné avec le théorème d'Ohsawa-Takegoshi appliqué sur une droite, nous permet de contrôler la croissance des potentiels locaux des courants T_m qui approchent le courant initial T. Pour obtenir le résultat global envisagé, on peut éclater le faisceau d'idéaux globalement défini $\mathcal{I}(mT)$ dans la variété X. Il est essentiel d'arriver à contrôler le nombre de cartes dans la variété éclatée. Pour cela, une version effective, avec estimations, du théorème de Nadel ([Nad89]) affirmant la cohérence des faisceaux d'idéaux multiplicateurs, semble nécessaire. Le résultat suivant répond partiellement à ce problème.

Théorème 0.0.0.8 *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ de diamètre d, m un entier positif, et $(\sigma_{m,j})_{j\geq 0}$ une base orthonormée quelconque de l'espace de Hilbert*

$$\mathcal{H}_\Omega(m\varphi) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega); \textstyle\int_\Omega |f|^2 e^{-2m\varphi}\, d\lambda < +\infty\}.$$

Alors, pour tout point $x \in \Omega$ et tout $0 < r < 1$ tel que $B(x,r) \subset\subset \Omega$, il existe une constante $C(n) > 0$ ne dépendant que de n, telle que pour $r' = \frac{r}{\sqrt{n\,C(n)}}(\frac{r}{d})^{n+2}$ on a la propriété suivante : pour toute section $f \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{I}(m\varphi))$ avec

$$\int_{B(x,r)} |f|^2 e^{-2m\varphi}\, d\lambda = C_f < +\infty,$$

il existe des fonctions holomorphes $b_{m,j} \in \mathcal{O}(B(x,r'))$, $j \geq 0$, telles que

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} b_{m,j}\, \sigma_{m,j} \qquad \textit{sur } B(x,r'),$$

et

$$\sup_{B(x,r')} \sum_{j=0}^{+\infty} |b_{m,j}|^2 \leq \frac{1}{(1-r/d)^2}\, \frac{C(n),(r/d)^{2(n+2)}}{} C_f.$$

Ceci donne une version effective de la génération du faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathcal{I}(m\varphi)$ par ses sections globales. Il serait souhaitable d'obtenir la génération de ce faisceau, avec estimations, par un nombre fini, contrôlable, de sections globales $\sigma_{m,j}$ sur tout ouvert relativement compact $\Omega' \subset\subset \Omega$. Ceci pourrait être vu comme une version effective de la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents $\mathcal{I}(m\varphi)$.

Chapitre 1

Un théorème de prolongement L^2 de jets de sections holomorphes d'un fibré en droites hermitien

Soit (X,ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, $Y \subset X$ une sous-variété lisse fermée définie par une section holomorphe d'un fibré vectoriel sur X, et L un fibré en droites hermitien possédant certaines propriétés de positivité. Nous démontrons que pour tout entier $k \geq 0$, toute section du faisceau de jets $L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}$, satisfaisant une certaine condition L^2, peut être prolongée en une section holomorphe globale de L sur X avec contrôle de la croissance L^2 sur un compact arbitraire de X. En particulier, si Y est un point, ceci donne l'existence d'une fonction holomorphe globale, avec contrôle de la norme L^2, pour laquelle on a prescrit les valeurs de toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k en un point. Ce résultat généralise les théorèmes de prolongement L^2 de Ohsawa-Takegoshi et de Manivel au cas des jets de sections d'un fibré en droites. Une difficulté technique est d'assurer l'uniformité de la constante intervenant dans l'estimation finale. Nous utilisons pour cela l'application exponentielle et un théorème de comparaison de type Rauch pour des variétés riemanniennes complètes.

1.0.1 Introduction

Le théorème de prolongement de fonctions holomorphes, avec contrôle de la croissance L^2, d'une sous-variété d'une variété complexe à cette variété tout entière, dû à T. Ohsawa et K. Takegoshi ([OT87]), a été généralisé par L. Manivel ([Man93]) dans le cadre plus géométrique des sections holomorphes d'un fibré hermitien. L'objectif de ce travail est de généraliser le théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi-Manivel au cas des jets de sections d'un fibré en droites hermitien au-dessus d'une variété complexe kählérienne faiblement pseudoconvexe. Nous nous proposons ainsi de résoudre le problème plus général suivant:

Problème. *Étant donné une variété analytique complexe X, une sous-variété lisse Y, un fibré en droites hermitien L sur X et une section holomorphe f de L sur Y satisfaisant* *de bonnes propriétés L^2, trouver une extension holomorphe de f à X, ainsi qu'une estimation L^2 de celle-ci, ayant en plus, localement sur Y, des dérivées partielles prescrites jusqu'à un certain ordre donné d'avance.*

Précisons d'abord le cadre. Soit X une variété analytique complexe de dimension n et $Y \subset X$ une sous-variété lisse fermée. Pour tout entier $k \geq 0$ considérons les faisceaux de jets suivants: le faisceau des k-jets "totaux", défini comme étant le faisceau associé au fibré dont les fibres sont $(J^k \mathcal{O}_X)_x = \mathcal{O}_{X,x}/(m_{X,x}^{k+1}\,\mathcal{O}_{X,x})$, pour tout $x \in X$, où $m_{X,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, ainsi que le faisceau des k-jets "transverses à Y," défini comme étant le quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1}$. Si $x \in Y$, il existe des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ sur un voisinage U de x, centrées en x, telles que $Y \cap U = \{z_1 = \cdots = z_r = 0\}$, où r est la codimension de Y dans X. On note $z = (z_1, \ldots, z_r)$ et $z' = (z_{r+1}, \cdots, z_n)$ si bien que z' est la coordonnée sur Y. Par rapport à ces coordonnées, les fibres en x des deux faisceaux de jets s'écrivent: $(J^k\mathcal{O}_X)_x = \{\sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} a_{\alpha\beta} z^\alpha z'^\beta\}, (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})_x = \{\sum_{|\alpha|\leq k,\beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha z'^\beta\}$. Ceci montre que le faisceau $J^k\mathcal{O}_X$ est localement libre, tandis que $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1}$ ne l'est pas.

Considérons également le schéma non-réduit $Y^{(k+1)}$ défini par le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_Y^{k+1}$, ce qui signifie que $Y^{(k+1)} = Y$, en tant qu'espaces topologiques, et que son faisceau structural est donné par $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1}$. Nous allons prolonger des $(n,0)$-formes holomorphes définies sur $Y^{(k+1)}$ à valeurs dans un fibré en droites $L \to X$, c'est-à-dire des sections $f \in H^0(X, \Lambda^n T^\star X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$.

Supposons dorénavant que la sous-variété $Y \subset X$ est définie comme

$$Y = \{x \in X\,;\, s(x) = 0, \Lambda^r(ds)(x) \neq 0\},$$

pour une section $s \in H^0(X,E)$, génériquement transverse à la section nulle, d'un fibré vectoriel holomorphe hermitien E de rang r. Supposons aussi X munie d'une métrique kählérienne ω.

Nous allons définir maintenant, pour tout k, *la norme $L^2_{(k)}$ d'un k-jet*. Soit donc $f \in H^0(X, \Lambda^n T^\star X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$. Le fibré vectoriel holomorphe $L' := \Lambda^n T_X^\star \otimes L$ est canoniquement muni d'une métrique induite par la métrique initiale de L et par la métrique de référence ω de X. Soit ∇ la connexion de Chern associée à cette métrique de L' et $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$ sa décomposition en sa partie (1,0) et sa partie (0,1). Fixons un point quelconque $y \in Y$ et soit U un voisinage de Stein dans X. Le morphisme $H^0(U,L') \to H^0(U, L' \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$, induit au niveau des espaces de sections locales par le morphisme surjectif de faisceaux $L' \to L' \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1}$, est alors surjectif. Soit $\tilde{f} \in H^0(U,L')$ un relèvement local de f.
Considérons maintenant le morphisme C^∞ de fibrés $T^\star X_{|Y} \to N^\star_{Y/X}$ qui représente le scindage C^∞, orthogonal pour ω, de la suite exacte:

$$0 \to N^\star_{Y/X} \to T^\star X_{|Y} \to T^\star Y \to 0.$$

Soit $\nabla\tilde{f} = \nabla^{1,0}\tilde{f} \in H^0(U, L' \otimes T^\star X)$. On pose $\nabla^1\tilde{f} \in C^\infty(U, L' \otimes N^\star_{Y/X})$, obtenu par la projection naturelle de $\nabla^{1,0}\tilde{f}$ via le morphisme surjectif de fibrés $T^\star X_{|Y} \to N^\star_{Y/X}$. Alors

$\nabla^{1,0}(\nabla^1 \tilde{f}) \in C^\infty(U,L' \otimes N^\star_{Y/X} \otimes T^\star X)$. On a noté ici par le même symbole ∇ la connexion de Chern associée à la métrique induite canoniquement sur $L' \otimes N^\star_{Y/X}$ par ω et par la métrique de L', et $\nabla^{1,0}$ sa composante de type $(1,0)$. Posons $\nabla^2 \tilde{f} \in C^\infty(U,L' \otimes S^2 N^\star_{Y/X})$, la projection de $\nabla^{1,0}(\nabla^1 \tilde{f})$ via les morphismes surjectifs de fibrés :

$$N^\star_{Y/X} \otimes T^\star X_{|Y} \to N^\star_{Y/X} \otimes N^\star_{Y/X} \to S^2 N^\star_{Y/X}.$$

Supposons que l'on ait déjà construit $\nabla^{j-1}\tilde{f} \in C^\infty(U,L' \otimes S^{j-1} N^\star_{Y/X})$. Alors $\nabla^{1,0}(\nabla^{j-1}\tilde{f}) \in C^\infty(U,L' \otimes S^{j-1} N^\star_{Y/X} \otimes T^\star X)$. Comme précédemment, ∇ désigne ici une nouvelle connexion sur un nouveau fibré, à savoir la connexion de Chern du fibré $L' \otimes S^{j-1} N^\star_{Y/X}$ muni de la métrique induite canoniquement par ω et par la métrique de L', et $\nabla^{1,0}$ sa composante de type $(1,0)$. Posons $\nabla^j \tilde{f} \in C^\infty(U,L' \otimes S^j N^\star_{Y/X})$, la projection de $\nabla^{1,0}(\nabla^{j-1}\tilde{f})$ via les morphismes surjectifs de fibrés :

$$S^{j-1} N^\star_{Y/X} \otimes T^\star X \to S^{j-1} N^\star_{Y/X} \otimes N^\star_{Y/X} \to S^j N^\star_{Y/X}.$$

On a ainsi construit par récurrence $\nabla^j \tilde{f} \in C^\infty(U,L' \otimes S^j N^\star_{Y/X})$ pour tout entier positif j. Les normes ponctuelles $|\tilde{f}|^2(y), \ldots, |\nabla^k \tilde{f}|^2(y)$ sont ainsi bien définies en tout point $y \in Y$ par rapport aux métriques induites canoniquement sur les fibrés respectifs par la métrique de L' et la métrique de référence ω sur X.

Définition 1.0.1.1 *Pour un k-jet transverse $f \in H^0(U, \Lambda^n T^\star X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$ et une fonction $\rho > 0$ sur U on définit, en tout point $y \in Y \cap U$, la norme ponctuelle pondérée par ρ et associée à la section s, comme :*

$$|f|^2_{s,\rho,(k)}(y) := |\tilde{f}|^2(y) + \frac{|\nabla^1 \tilde{f}|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{1}{r}} \rho^{2(r+1)}}(y) + \cdots + \frac{|\nabla^k \tilde{f}|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{k}{r}} \rho^{2(r+k)}}(y),$$

et la norme $L^2_{(k)}$ pondérée, comme :

$$||f||^2_{s,\rho,(k)} = \int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)} \, |\Lambda^r(ds)|^{-2} \, dV_{Y,\omega}.$$

Exemple 1.0.1.2 Considérons le cas où $X = \Omega$ est un ouvert pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$ qui contient 0, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ est la coordonnée sur $\mathbb{C}^n$ et $Y = \{z_1 = \cdots = z_r = 0\} \cap \Omega$. Prenons $E = \Omega \times \mathbb{C}^r$ muni de la métrique triviale plate, $L = \Omega \times \mathbb{C}$ et $s = \left(\frac{z_1}{e \operatorname{diam} \Omega}, \ldots, \frac{z_r}{e \operatorname{diam} \Omega}\right)$. Pour tout $z \in \Omega, |s(z)|^2 = \frac{1}{e^2} \frac{|z_1|^2 + \cdots + |z_r|^2}{(\operatorname{diam} \Omega)^2} \leq \frac{1}{e^2}$. La donnée du jet f est alors la donnée de fonctions holomorphes a_α, $|\alpha| \leq k$, sur Y. Sa norme L^2 est donnée par :

$$\int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)} \, |\Lambda^r(ds)|^{-2} \, dV_{Y,\omega} = \int_Y \frac{|a_0|^2}{|\Lambda^r(ds)|^2} \, dV_{Y,\omega} + \sum_{|\alpha|=1} \int_Y \frac{|a_\alpha|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+1}{r}} \rho^{2(r+1)}} \, dV_{Y,\omega} + \cdots +$$

$$+\sum_{|\alpha|=k}\int_Y \frac{1}{(\alpha!)^2}\,\frac{|a_\alpha|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}\rho^{2(r+k)}}\,dV_{Y,\omega}.$$

Il est bon de remarquer que la norme $|f|^2_{s,\rho,(k)}(y)$ du k-jet f au point $y\in Y$ ne dépend pas du choix du relèvement local $\tilde f$. En fait, si $\hat f\in H^0(U,L')$ est un autre relèvement de $f_{|U}\in H^0(U,L'\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$, alors $\tilde f$ et $\hat f$ ont le même jet transverse d'ordre k sur $U\cap Y$ (égal à $f_{|U}$). Ceci entraîne que $\nabla^j\tilde f=\nabla^j\hat f$ en tout point de $U\cap Y$, pour tout entier $j=0,\ldots,k$.

Notation 1.0.1.3 *(a) Pour un k-jet transverse $f\in H^0(U,\Lambda^nT^\star_X\otimes L\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$, notons $\nabla^jf\doteqdot(\nabla^j\tilde f)_{|U\cap Y}$, pour tout $j=0,\ldots,k$ et un relèvement quelconque $\tilde f\in H^0(U,\Lambda^nT^\star_X\otimes L)$ de f.*

(b) Pour tout entier $k\geq 0$, notons

$$J^k: H^0(X,\Lambda^nT^\star_X\otimes L)\to H^0(X,\Lambda^nT^\star_X\otimes L\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$$

le morphisme de groupes de cohomologie induit par la projection naturelle $\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1}$.

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème d'extension de jets.

Théorème 1.0.1.4 (Théorème principal) *Soit X une variété complexe faiblement pseudoconvexe de dimension n, munie d'une métrique kählérienne ω, L un fibré en droites holomorphe hermitien, E un fibré holomorphe hermitien de rang r sur X, et $s\in H^0(X,E)$ une section génériquement transverse à la section nulle. On définit :*

$$Y := \{x\in X\,;\, s(x)=0, \Lambda^r(ds)(x)\neq 0\},$$

une sous-variété de X de codimension r. Supposons aussi que, pour un entier $k\geq 0$, la $(1,1)$-forme $i\Theta(L)+(r+k)\,id'd''\log|s|^2$ est semipositive et qu'il existe une fonction continue $\alpha\geq 1$ sur X telle que les deux inégalités suivantes soient satisfaites sur X :

(a) $i\Theta(L)+(r+k)\,id'd''\log|s|^2\geq\alpha^{-1}\dfrac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2}$,

(b) $|s|\leq e^{-\alpha}$.

Si $\Omega\subset X$ est un ouvert relativement compact, on définit une fonction poids $\rho=\rho_\Omega>0$ par $\rho(y)=\dfrac{1}{||Ds_y^{-1}||\,\sup_{\xi\in\Omega}(||D^2s_\xi||+||Ds_\xi||)}$, où D désigne la connexion de Chern de E.

Alors, pour tout ouvert $\Omega\subset X$ relativement compact et pour tout k-jet $f\in H^0(X,\Lambda^nT^\star_X\otimes L\otimes\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_Y^{k+1})$ tel que

$$\int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)}\,|\Lambda^r(ds)|^{-2}\,dV_{Y,\omega}<+\infty,$$

il existe $F_k \in H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L)$ tel que $J^k F_k = f$ et

$$\int_\Omega \frac{|F_k|^2}{|s|^{2r}\,(-\log|s|)^2}\,dV_{X,\omega} \le C_r^{(k)} \int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)}\,|\Lambda^r(ds)|^{-2}\,dV_{Y,\omega},$$

où $C_r^{(k)} > 0$ est une constante ne dépendant que de r, de k, de E et de $\sup_\Omega ||i\Theta(L)||$.

Explications. (a) La section $s \in H^0(X,E)$ induit un morphisme de fibrés vectoriels $ds : T_X \to E$ dont le noyau est T_Y. Ainsi ds induit un isomorphisme de fibrés vectoriels $ds : T_X/T_Y \to E$ et donc une section $\Lambda^r(ds)$ partout non-nulle du fibré $\Lambda^r(T_X/T_Y)^\star \otimes \mathrm{dét}E$. La norme $|\Lambda^r(ds)|$ est calculée par rapport à la norme induite par ω sur $\Lambda^r(T_X/T_Y)^\star$ et celle induite par la métrique de E sur détE. La notation $||i\Theta(L)||$ désigne la norme du tenseur de courbure de L vu comme $(1,1)$-forme sur X. Remarquons aussi que seule l'hypothèse (a) est essentielle : si (a) est satisfaite pour un choix de la fonction $\alpha \ge 1$, on peut toujours réaliser (b) en multipliant la métrique de E par un poids suffisamment petit $e^{-\chi\circ\psi}$, où ψ est une exhaustion psh de X et χ une fonction réelle convexe croissante. La propriété (a) est maintenue après multiplication de la métrique de L par le poids $e^{-(r+k+\alpha_0^{-1})\chi\circ\psi}$, avec $\alpha_0 = \inf_{x\in X} \alpha(x)$.

(b) Il serait souhaitable d'étendre ce résultat au cas des formes différentielles D''-fermées de bidegré $(0,q)$. La difficulté provient du fait que l'opérateur $\bar\partial$ n'est pas hypoelliptique en bidegré $(0,q)$, $q \ge 1$. C'est pourquoi la régularité de la solution n'est pas garantie. Cette difficulté, déjà présente dans le travail de L. Manivel ([Man93]), n'a pas encore été surmontée. Nous renvoyons pour des détails à ([Dem99], §5).

(c) Le résultat précédent s'étend directement au cas où le fibré en droites L est muni d'une métrique hermitienne singulière. En fait, un poids local φ pour la métrique de L s'écrit comme la limite décroissante d'une famille de fonctions $\varphi_\varepsilon = \varphi \star \rho_\varepsilon \in C^\infty$ obtenues par convolution avec des noyaux régularisants. Comme la constante $C_r^{(k)}$ ne dépend que de la croissance de la forme de courbure $i\partial\bar\partial\varphi$, une même constante existe pour tous les φ_ε. L'estimation pour φ, avec cette même constante, est alors obtenue par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème principal pour un ouvert pseudoconvexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Théorème 1.0.1.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert pseudoconvexe borné et $Y \subset \Omega$ une sous-variété lisse fermée définie par une section $s \in H^0(X,E)$ d'un fibré holomorphe hermitien E de rang r dont la forme de courbure est bornée. Supposons que $|s| \le e^{-1}$ sur Ω. Soit $\rho > 0$ la fonction poids définie par :*

$$\rho(y) = \frac{1}{||Ds_y^{-1}||\,\sup_{\xi\in\Omega}(||D^2 s_\xi|| + ||Ds_\xi||)},$$

où D est la connexion de Chern de E.

Alors, pour tout entier positif k et toute fonction psh φ sur Ω, il existe une constante $C_r^{(k)} > 0$ ne dépendant que de E, de Ω et du module de continuité de φ, telle que pour toute section holomorphe f de $\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}_Y^{k+1}$ qui vérifie

$$\int_Y |f|^2_{s,\rho,,(k)} \, |\Lambda^r(ds)|^{-2} \, e^{-\varphi} \, dV_Y < +\infty,$$

il existe une fonction holomorphe F_k sur Ω telle que $J^k F_k = f$ et

$$\int_\Omega \frac{|F_k|^2}{|s|^{2r}(-\log|s|)^2} \, e^{-\varphi} \, dV_{\Omega'} \leq C_r^{(k)} \int_Y |f|^2_{s,\rho,,(k)} \, |\Lambda^r(ds)|^{-2} \, e^{-\varphi} \, dV_Y.$$

Le cas où $Y = \{z_0\}$ est un point est particulièrement intéressant. La donnée du jet f en z_0 est la donnée de nombres complexes $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq k$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. On prend $s = (e \operatorname{diam} \Omega)^{-1} (z - z_0)$ vu comme section du fibré trivial $E = \Omega \times \mathbb{C}^n$. Il est clair que $|s| \leq e^{-1}$ et que :

$$\int_Y |f|^2_{s,\rho,(k)} \, |\Lambda^n(ds)|^{-2} \, e^{-\varphi} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right) e^{-\varphi(z_0)}.$$

Comme $-\log|s| = \frac{1}{\varepsilon} \log|s|^{-\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon}|s|^{-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut remplacer dans le dénominateur $|s|^{2n}(-\log|s|)^2$ par $|s|^{2(n-\varepsilon)}$. Nous obtenons ainsi le

Corollaire 1.0.1.6 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert pseudoconvexe borné et un point $z_0 \in \Omega$. Alors, pour tout entier positif k et toute fonction psh φ sur Ω, il existe une constante $C_n^{(k)} > 0$ ne dépendant que du module de continuité de φ, telle que pour tous scalaires $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq k$, il existe une fonction holomorphe f sur Ω de sorte que $f(z_0) = a_0$, $\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}(z_0) = a_\alpha$, $1 \leq |\alpha| \leq k$ et*

$$\int_\Omega \frac{|f|^2}{|z - z_0|^{2(n-\varepsilon)}} \, e^{-\varphi(z)} \, dV_\Omega(z) \leq \frac{C_n^{(k)}}{\varepsilon^2 \, (\operatorname{diam} \Omega)^{2(n-\varepsilon)}} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right) e^{-\varphi(z_0)}.$$

Dans la première partie de la démonstration du théorème 1.0.1.4, nous reprenons les idées de la démonstration initiale d'Ohsawa et de Takegoshi ([OT87], [Ohs88]) sous la forme plus géométrique adoptée par Manivel ([Man93]) et simplifiée par Demailly ([Dem99]), que nous adaptons à notre situation plus générale. La démonstration repose sur "la technique des bosses" qui consiste à concentrer la courbure du fibré L sur un voisinage de la sous-variété Y. Ceci mène naturellement à définir un nouvel opérateur de courbure et à démontrer un théorème d'estimations L^2 qui est une adaptation de celui de Hörmander à cet opérateur de courbure modifié. L'outil principal est une inégalité de type Bochner-Kodaira-Nakano, due à Ohsawa [Ohs95]. La démonstration se poursuit par la résolution d'une équation de l'opérateur $\overline{\partial}$, avec estimations L^2, à l'aide de ce théorème modifié de Hörmander. Cette partie occupe le paragraphe 1.0.3 et est commune aux démonstrations des théorèmes 1.0.1.4 et 1.0.1.5.

Dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 1.0.1.4, l'objectif principal est d'assurer l'uniformité de la constante qui apparaît dans l'estimation L^2. Nous traitons séparément les théorèmes 1.0.1.4 et 1.0.1.5 pour démontrer la partie quantitative du résultat. Au paragraphe 1.0.4, une application des inégalités de Cauchy nous permettra d'obtenir un contrôle de la croissance du k-jet d'une fonction holomorphe en fonction de la croissance de cette même fonction et d'achever ainsi la démonstration du théorème 1.0.1.5. Pour avoir des estimations L^2 intrinsèques et indépendantes du rayon des cartes de coordonnées holomorphes locales de X dans le théorème 1.0.1.4, nous utiliserons l'application exponentielle pour nous ramener à une étude dans l'espace tangent à X en un point. La technique des champs de Jacobi nous permettra d'établir un résultat de géométrie riemannienne, voisin du théorème de comparaison de Rauch, au paragraphe 1.0.5. Au paragraphe 1.0.6 nous obtenons l'estimation finale dans le théorème principal à l'aide du lemme de Gårding sur les solutions des équations elliptiques. Enfin, au paragraphe 1.0.7, nous nous affranchissons de la restriction faite au cours de la démonstration sur la sous-variété Y d'être lisse et fermée, par un petit argument standard bien connu.

1.0.2 Rappels et préliminaires

Version modifiée de l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano

Soit (X,ω) une variété kählérienne munie d'une métrique kählérienne complète ω, (E,h) un fibré en droites hermitien sur X et D la connexion de Chern associée. On note

$$\Theta(E) = D^2 = D'D'' + D''D' \in C^\infty(X, \Lambda^{1,1}T^\star X \otimes \operatorname{End} E)$$

le tenseur de courbure de E. On considère également l'opérateur $L = \omega \wedge \bullet$. Pour tout bidegré (p,q) on définit l'opérateur hermitien de courbure associé par :

$$A^{p,q}_{D,\omega} := [\Theta(D),\Lambda_\omega] = [i\Theta(E),\Lambda_\omega],$$

agissant sur $C^\infty(\Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$ à valeurs dans $C^\infty(\Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$. Alors, on a la version classique de *l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano* :

$$||D''u||^2 + ||D''^\star u||^2 \geq \langle\!\langle [i\Theta(E),\Lambda_\omega]u,u\rangle\!\rangle,$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(X,\Lambda^{p,q}T^\star_X \otimes E)$.

L'ingrédient essentiel dans la démonstration du théorème de prolongement d'Ohsawa-Takegoshi [OT87, Ohs88] était une version modifiée de cette inégalité. Elle a ensuite été améliorée par Ohsawa [Ohs95] sous la forme suivante :

Proposition 1.0.2.1 (Inégalité fondamentale de courbure.)
Soit (X,ω) une variété kählérienne, la métrique kählérienne ω étant arbitraire (pas forcément complète), (E,h) un fibré hermitien sur X, et η, $\lambda > 0$, des fonctions C^∞ sur X.

Alors, quel que soit $u \in \mathcal{D}(X,\Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E)$*, on a:*

$$||(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})\, D''^\star u||^2 + ||\eta^{\frac{1}{2}}\, D''u||^2 + ||\lambda^{\frac{1}{2}}\, D'u||^2 + 2\, ||\lambda^{-\frac{1}{2}}\, d'\eta \wedge u||^2 \geq$$

$$\geq \langle\!\langle [\eta\, i\Theta(E) - id'd''\eta - i\,\lambda^{-1}\, d'\eta \wedge d''\eta, \Lambda_\omega]u,u\rangle\!\rangle.$$

Pour démontrer cette inégalité, on a besoin de relations de commutation modifiées. C'est l'objet du lemme suivant:

Lemme 1.0.2.2 *Soit* $L := \omega \wedge \bullet\, , \Lambda := L^\star$*, et* $\eta > 0$*, une fonction* C^∞*. Alors:*

(a) $\quad [d'\eta, \Lambda] = i\,(d''\eta)^\star, \qquad [d''\eta, \Lambda] = -i\,(d'\eta)^\star$

$$[L, (d'\eta)^\star] = -i\, d''\eta, \qquad [(d''\eta)^\star, L] = -i\, d'\eta.$$

(b) $[i\, d'\eta \wedge d''\eta, \Lambda] = d'\eta\,(d'\eta)^\star - (d''\eta)^\star\,(d''\eta) = (d''\eta)\,(d''\eta)^\star - (d'\eta)^\star\, d'\eta$*, où* $(d'\eta)$*,*$(d''\eta)$ *désignent les opérateurs* $d'\eta \wedge \bullet$ *, respectivement* $d''\eta \wedge \bullet$ *,* $(d'\eta)^\star$*,* $(d''\eta)^\star$ *désignent leurs adjoints hilbertiens, et* $id'\eta \wedge d''\eta$ *désigne l'opérateur* $id'\eta \wedge d''\eta \wedge \bullet$ *.*

Preuve. (a) Il suffit de démontrer la quatrième relation. Les trois autres seront déduites de celle-ci en prenant le conjugué ou l'adjoint. Il faut donc démontrer que pour toute (p,q)-forme v, on a:

$$[(d''\eta)^\star,L]v = -i\, d'\eta \wedge v \Leftrightarrow (d''\eta)^\star(\omega \wedge v) - \omega \wedge ((d''\eta)^\star\, v) = -i\, d'\eta \wedge v.$$

Soit $x \in X$ un point quelconque et $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées locales centrées en x. Par rapport à ce système de coordonnées, on a :

$$(d''\eta)^\star v = \sum_j \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor v.$$

En fait, $\langle\!\langle u,(d''\eta)^\star v\rangle\!\rangle = \langle\!\langle d''\eta \wedge u,v\rangle\!\rangle = \int \sum_j \langle \tfrac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_j}\, d\bar{z}_j \wedge u,v\rangle\, dV =$

$$= \int \sum_j \langle d\bar{z}_j \wedge u, \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j} v\rangle dV = \int \sum_j \langle u, \tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor (\tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, v)\rangle dV = \langle\!\langle u, \sum_j \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, (\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor v)\rangle\!\rangle,$$

pour tous u,v à support compact.

On obtient alors: $[(d''\eta)^\star,L]v = \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor (\omega \wedge v) - \omega \wedge (\sum_j \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor v) =$

$$= \sum_j \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, (\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor \omega) \wedge v + \sum_j \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, \omega \wedge (\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor v) - \sum_j \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, \omega \wedge (\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor v) =$$

$$= \sum_j \tfrac{\partial \eta}{\partial z_j}\, (\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor \omega) \wedge v.$$

Comme il s'agit d'établir une relation point par point, on peut supposer que $\omega = i\, \sum_k dz_k \wedge d\bar{z}_k$ au point x où l'on se place. On obtient alors :

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor \omega = -i \sum_k dz_k \wedge (\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \rfloor d\bar{z}_k) = -i\, dz_j.$

Ceci montre que $[(d''\eta)^\star, L] v = -i \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\, dz_j \wedge v = -i\, d'\eta \wedge v$, pour tout v.

(b) En fait, $[id'\eta \wedge d''\eta, \Lambda] = id'\eta \wedge d''\eta\, \Lambda - i\Lambda\, d'\eta \wedge d''\eta =$

$$= i\, d'\eta \wedge (d''\eta\, \Lambda - \Lambda\, d''\eta) + i\, d'\eta \wedge \Lambda\, d''\eta - i(\Lambda\, d'\eta - d'\eta \wedge \Lambda)\, d''\eta -$$

$$-i\, d'\eta \wedge \Lambda \wedge d''\eta =$$

$$= i\, d'\eta \wedge [d''\eta, \Lambda] - i\, [\Lambda, d'\eta]\, d''\eta = d'\eta\, (d'\eta)^\star + d''\eta\, (d''\eta)^\star.$$

On a utilisé les relations obtenues au point (a).

La deuxième égalité est équivalente à :

$[(d'\eta, (d'\eta)^\star] = [d''\eta, (d''\eta)^\star]$. En coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$, on a :

$[d\bar{z}_j \wedge \bullet, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \rfloor \bullet] = \delta_{jk}$ et $[d''\eta, (d''\eta)^\star] = \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial z_j} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_j}$. En prenant le conjugué, on obtient la même expression pour $[d'\eta, (d'\eta)^\star]$, d'où l'égalité. □

Preuve de la proposition 1.0.2.1. Considérons les opérateurs de Laplace-Beltrami "perturbés" :

$$\begin{aligned}
D'\eta D'^\star + D'^\star \eta D' &= \eta[D', D'^\star] + [D', \eta] D'^\star + [D'^\star, \eta] D' \\
&= \eta\Delta' + (d'\eta) D'^\star - (d'\eta)^\star D', \\
D''\eta D''^\star + D''^\star \eta D'' &= \eta[D'', D''^\star] + [D'', \eta] D''^\star + [D''^\star, \eta] D'' \\
&= \eta\Delta'' + (d''\eta) D''^\star - (d''\eta)^\star D''.
\end{aligned}$$

En soustrayant la première égalité de la deuxième et en utilisant l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano $\Delta'' - \Delta' = [i\Theta(E), \Lambda]$, on obtient:

$$D''\eta D''^\star + D''^\star \eta D'' - D'\eta D'^\star - D'^\star \eta D' =$$

(1) $$= \eta[i\Theta(E), \Lambda] + (d''\eta) D''^\star - (d''\eta)^\star D'' + (d'\eta)^\star D' - (d'\eta) D'^\star.$$

Par ailleurs, l'identité de Jacobi donne:

$$[D'', [d'\eta, \Lambda]] - [d'\eta, [\Lambda, D'']] + [\Lambda, [D'', d'\eta]] = 0,$$

les relations de commutation fondamentales donnent $[\Lambda, D''] = -iD'^\star$, et les relations de commutation modifiées donnent $[D'', d'\eta] = -(d'd''\eta)$ et $[d'\eta, \Lambda] = i(d''\eta)^\star$. Nous obtenons finalement :

$$i[D'',(d''\eta)^\star] + i[d'\eta,D'^\star] - [\Lambda,(d'd''\eta)] = 0,$$

ce qui montre que :

$$[id'd''\eta,\Lambda] = [D'',(d''\eta)^\star] + [D'^\star,d'\eta] = D''(d''\eta)^\star + (d''\eta)^\star D'' + D'^\star(d'\eta) +$$

$$+ (d'\eta)D'^\star.$$

On rajoute ceci à l'égalité (1) pour obtenir:

$$D''\eta D''^\star + D''^\star\eta D'' - D'\eta D'^\star - D'^\star\eta D' + [id'd''\eta,\Lambda] =$$

$$= \eta[i\Theta(E),\Lambda] + (d''\eta)D''^\star + D''(d''\eta)^\star + (d'\eta)^\star D' + D'^\star(d'\eta).$$

Nous appliquons cette identité à une forme $u \in \mathcal{D}(X,\Lambda^{p,q}T_X^\star \otimes E)$ et nous en prenons le produit scalaire avec u. Nous obtenons alors :

$$\langle\langle (D''\eta D''^\star)u,u\rangle\rangle = \langle\langle \eta D''^\star u,D''^\star u\rangle\rangle = ||\eta^{\frac{1}{2}}D''^\star u||^2,$$

et l'analogue de cette relation pour les autres termes. Ces identités impliquent ainsi :

$$||\eta^{\frac{1}{2}}D''^\star u||^2 + ||\eta^{\frac{1}{2}}D'' u||^2 - ||\eta^{\frac{1}{2}}D' u||^2 - ||\eta^{\frac{1}{2}}D'^\star u||^2 =$$

$$= \langle\langle [\eta i\Theta(E) - id'd''\eta,\Lambda]u,u\rangle\rangle + 2\mathrm{Re}\langle\langle D''^\star u,(d''\eta)^\star u\rangle\rangle + 2\mathrm{Re}\langle\langle D'u,d'\eta\wedge u\rangle\rangle.$$

En négligeant le terme négatif $-||\eta^{\frac{1}{2}}D'u||^2 - ||\eta^{\frac{1}{2}}D'^\star u||^2$ et en rajoutant les carrés suivants :

$$||\lambda^{\frac{1}{2}}D''^\star u||^2 + 2\mathrm{Re}\langle\langle D''^\star u,(d''\eta)^\star u\rangle\rangle + ||\lambda^{-\frac{1}{2}}(d''\eta)^\star u||^2 \geq 0,$$

$$||\lambda^{\frac{1}{2}}D' u||^2 + 2\mathrm{Re}\langle\langle D'u,d'\eta\wedge u\rangle\rangle + ||\lambda^{-\frac{1}{2}}d'\eta\wedge u||^2 \geq 0,$$

nous obtenons :

$$||(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})D''^\star u||^2 + ||\eta^{\frac{1}{2}}D'' u||^2 + ||\lambda^{\frac{1}{2}}D' u||^2 + ||\lambda^{-\frac{1}{2}}d'\eta\wedge u||^2 + ||\lambda^{-\frac{1}{2}}(d''\eta)^\star u||^2$$

$$\geq \langle\langle [\eta i\Theta(E) - id'd''\eta,\Lambda]u,u\rangle\rangle.$$

Le point (b) du lemme précédent donne:

$$(d'\eta)^\star(d'\eta) - (d''\eta)(d''\eta)^\star = [id''\eta\wedge d'\eta,\Lambda],$$

$$||\lambda^{-\frac{1}{2}}d'\eta\wedge u||^2 - ||\lambda^{-\frac{1}{2}}(d''\eta)^\star u||^2 = -\langle\langle [i\lambda^{-1}d'\eta\wedge d''\eta,\Lambda]u,u\rangle\rangle.$$

Nous n'avons plus qu'à rajouter la seconde identité à la dernière inégalité pour obtenir le résultat. $\square$

Dans le cas particulier des (n,q)-formes, les formes $D'u$ et $d'\eta \wedge u$ sont de bidegré $(n+1,q)$, et donc nulles, et l'inégalité précédente devient :

$$||(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})D''^{\star}u||^2 + ||\eta^{\frac{1}{2}}D''u||^2 \geq \langle\langle[\eta i\Theta(E) - id'd''\eta - i\lambda^{-1}d'\eta \wedge d''\eta,\Lambda]u,u\rangle\rangle.$$

Théorème d'existence L^2. L'inégalité fondamentale de courbure permet de déduire un théorème d'existence L^2 analogue à celui de Hörmander [Hör65, 66] dans le contexte d'un opérateur de courbure modifié. Il s'agit de la

Proposition 1.0.2.3 *Soit (X,ω) une variéte kählérienne. La métrique ω n'est pas nécessairement complète mais on suppose que X admet une métrique kählérienne complète. Étant donné un fibré vectoriel hermitien (E,h) et $\eta,\lambda > 0$ des fonctions lisses bornées sur X, on considère l'opérateur de courbure :*

$$B := B^{n,q}_{E,\omega,\eta,\lambda} := [\eta\, i\Theta(E) - id'd''\eta - i\lambda^{-1}\, d'\eta \wedge d''\eta, \Lambda_\omega],$$

agissant sur les sections du fibré $\Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E$, pour un certain $q \geq 1$, et on fait l'hypothèse que B est défini positif en tout point de X.

Alors, pour tout $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E)$ tel que $D''g = 0$ et

$$\int_X \langle B^{-1}g, g\rangle\, dV_\omega < +\infty,$$

il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1}T^\star_X \otimes E)$ tel que $D''f = g$ et

$$\int_X (\eta+\lambda)^{-1}\, |f|^2\, dV_\omega \leq 2 \int_X \langle B^{-1}g, g\rangle\, dV_\omega.$$

Preuve. Il s'agit de résoudre l'équation $D''f = g$. La solution f satisfera alors la relation $\langle\langle v,g\rangle\rangle = \langle\langle v,D''f\rangle\rangle = \langle\langle D''^{\star}v,f\rangle\rangle$, pour tout $v \in L^2(X,\Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E)$. Trouver f revient à trouver l'application linéaire $\langle\langle\cdot, f\rangle\rangle$. Ceci revient à estimer la norme de l'application linéaire $D''^{\star}v \mapsto \langle\langle v, g\rangle\rangle$.

Soit $v \in L^2(X, \Lambda^{n,q}T^\star_X \otimes E)$, un élément quelconque. Plaçons-nous d'abord dans le cas où la métrique ω est complète; on a alors $(\mathrm{Ker}D'')^\perp = \overline{\mathrm{Im}D''^\star} \subset \mathrm{Ker}D''^\star$. En utilisant la décomposition $v = v_1 + v_2 \in (\mathrm{Ker}D'') \oplus (\mathrm{Ker}D'')^\perp$ et le fait que $g \in \mathrm{Ker}D''$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle\langle g,v\rangle\rangle|^2 = |\langle\langle g,v_1\rangle\rangle|^2 = |\langle\langle B^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}g,v_1\rangle\rangle|^2 = |\langle\langle B^{-\frac{1}{2}}g,B^{\frac{1}{2}}v_1\rangle\rangle|^2 \leq$$

$$\leq ||B^{-\frac{1}{2}}g||^2\, ||B^{\frac{1}{2}}v_1||^2 = \textstyle\int_X \langle B^{-1}g,g\rangle dV_\omega \int_X \langle Bv_1,v_1\rangle dV_\omega.$$

On a utilisé partout le fait que l'opérateur B est autoadjoint, et donc $B^{\frac{1}{2}}$ et $B^{-\frac{1}{2}}$ le sont aussi. Les opérateurs $B^{\frac{1}{2}}$ et $B^{-\frac{1}{2}}$ sont définis en considérant la forme diagonalisée de l'opérateur B et en prenant respectivement les puissances $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ de ses valeurs propres. On voit donc que la condition que B soit défini positif en tout point est essentielle. Comme $v_2 \in \mathrm{Ker}D''^{\star}$, et donc $D''^{\star}v = D''^{\star}v_1$, la proposition 1.0.2.1 implique:

$$\int_X \langle Bv_1,v_1\rangle dV_\omega \leq ||(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})D''^{\star}v_1||^2 + ||\eta^{\frac{1}{2}}D''v_1||^2 = ||(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})D''^{\star}v||^2,$$

si $v \in \mathrm{Dom}D''^{\star}$. On trouve donc :

$$|\langle\langle g,v\rangle\rangle|^2 \leq \left(\int_X \langle B^{-1}g,g\rangle dV_\omega\right) ||(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})D''^{\star}v||^2.$$

Il existe, par conséquent, $w \in L^2(X,\Lambda^{n,q}T_X^\star \otimes E)$ tel que :

$$\begin{array}{rcll} ||w||^2 & \leq & \int_X \langle B^{-1}g,g\rangle dV_\omega & \text{et} \\ \langle\langle v,g\rangle\rangle & = & \langle\langle(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})D''^{\star}v,w\rangle\rangle, & \text{pour tout } g \in \mathrm{Dom}D'' \cap \mathrm{Dom}D''^{\star}. \end{array}$$

Alors $f = (\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})w$ satisfait $D''f = g$, et comme $(\eta^{\frac{1}{2}} + \lambda^{\frac{1}{2}})^2 \leq 2(\eta + \lambda)$, f satisfait aussi l'estimation L^2 requise. Si ω n'est pas complète, on considère $\omega_\varepsilon = \omega + \varepsilon\hat{\omega}$, où $\hat{\omega}$ est une métrique kählérienne complète. La conclusion est obtenue par passage à la limite. La technique est standard. $\square$

Dans la démonstration du théorème d'extension de jets on sera amené à appliquer ce théorème pour une métrique modifiée du fibré dans lequel on se place, qui est obtenue en multipliant la métrique lisse initiale par le poids $|s|^{-2(r+k)}$ qui est singulier sur $Y = \{s = 0\}$. Comme les estimations L^2 présentées antérieurement sont valables uniquement pour une métrique lisse sur une variété kählérienne complète, on se restreindra à $X\backslash Y$. Il faut donc s'assurer que $X\backslash Y$ porte une métrique kählérienne complète.

Lemme 1.0.2.4 *(voir, par ex, [Dem82]) Soit (X,ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, ψ une exhaustion psh et $X_c = \{x \in X; \psi(x) < c\}$, pour $c \in \mathbb{R}$. Soit $Y = \{s = 0\} \subset X$, un sous-ensemble analytique défini par une section $s \in H^0(X,E)$ d'un fibré vectoriel hermitien (E,h) sur X.*

Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $X_c\backslash Y$ porte une métrique kählérienne complète.

Idée de preuve. Comme $\partial(X_c\backslash Y) = \partial X_c \cup (Y \cap X_c)$, on doit assurer la complétude près de ∂X_c et près de $Y \cap X_c$. Pour ∂X_c on a besoin, grosso modo, d'une fonction C^∞ qui s'approche de $+\infty$ quand on s'approche de ∂X_c. Prenons, par exemple, $-\log(c - \psi)$. Pour $Y \cap X_c$, on a besoin d'une fonction C^∞ qui tende vers $+\infty$ quand on s'approche de $Y \cap X_c$. Prenons, par exemple, $\chi(\log|s|^2)$, où $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe décroissante telle que $\lim_{t\to-\infty} \chi(t) = \infty$.

On prend alors $\tilde{\omega} := \omega + id'd''(\chi \circ \tau) + id'd'' \log(c - \psi)^{-1}$, où $\tau = \log|s|^2$. $\square$

1.0.3 Démonstration du théorème 1.0.1.4

Supposons que l'ensemble des singularités $\Sigma = \{s = 0, \Lambda^r(ds) = 0\}$ de Y est vide, ce qui signifie que Y est une sous-variété lisse fermée de X. Cette restriction sera levée par un argument standard au paragraphe 1.0.7. Nous allons procéder par récurrence sur $k \geq 0$. Le cas $k = 0$ est le théorème d'Ohsawa-Takegoshi. Supposons le théorème démontré pour $k-1$. Considérons la suite exate de faisceaux :

$$0 \longrightarrow S^k N^\star_{Y/X} \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k \longrightarrow 0$$

et soit $J^{k-1}f \in H^0(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k)$ l'image de $f \in H^0(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$ par le morphisme de groupes de cohomologie obtenu après tensorisation à gauche de la suite exacte par $\Lambda^n T^\star_X \otimes L$. Par hypothèse de récurrence, il existe $F_{k-1} \in H^0(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L)$ tel que :

$$J^{k-1}F_{k-1} = J^{k-1}f \text{ et}$$

$$\int_\Omega \frac{|F_{k-1}|^2}{|s|^{2r}(-\log|s|)^2}\, dV_\omega \leq C_r^{(k-1)} \int_Y |f|^2_{s,\rho,(k-1)}\, |\Lambda^r(ds)|^{-2}\, dV_{Y,\omega},$$

où $C_r^{(k-1)} > 0$ est une constante comme dans l'énoncé du théorème 1.0.1.4. Ainsi l'image de $f - J^k F_{k-1} \in H^0(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$ dans $H^0(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^k)$ est $J^{k-1}f - J^{k-1}F_{k-1} = 0$. Ceci permet de voir le jet $f - J^k F_{k-1}$ comme une section globale holomorphe (sur Y) du faisceau $\Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes S^k N^\star_{Y/X} = \Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes S^k E^\star_{|Y}$.

Prolongement C^∞ du jet. Nous commençons par construire un prolongement $\tilde{f} \in C^\infty(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L)$ du k-jet holomorphe $f \in H^0(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$ à l'aide d'une partition de l'unité. Considérons un recouvrement de Y par des ouverts de coordonnées $U_i \subset X$ sur lesquels les fibrés E et $\Lambda^n T^\star_X \otimes L$ sont triviaux. Soit e_i une section holomorphe sans zéros de $\Lambda^n T^\star_X \otimes L_{|U_i}$ et $s_1, \ldots, s_r$ des fonctions holomorphes sur U_i telles que $s_{|U_i} = (s_1, \ldots, s_r)$ dans une trivialisation de $E_{|U_i}$. Les fonctions $s_1, \ldots, s_r$ définissent des coordonnées holomorphes transverses à Y sur U_i. Soit $z'_{(i)} = (z^{(i)}_{r+1}, \ldots, z^{(i)}_n)$, des coordonnées holomorphes sur $Y \cap U_i$. Sur $Y \cap U_i$ on peut écrire le jet f comme $f_{|Y\cap U_i} = w_i \otimes e_{i|Y\cap U_i}$, avec $w_i \in H^0(U_i, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$. La donnée du k-jet local w_i est la donnée de fonctions holomorphes $a^{(i)}_\alpha(z'_{(i)})$ sur $Y \cap U_i$, indexées sur les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$, avec $|\alpha| \leq k$. On pose :

$$\hat{f}_i(s, z'_{(i)}) := \Big(\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(z'_{(i)})\, s^\alpha\Big) \otimes e_i \in H^0(U_i, \Lambda^n T^\star_X \otimes L).$$

Alors $\dfrac{\partial^\alpha \hat{f}_i}{\partial s^\alpha}(0, z'_{(i)}) = a^{(i)}_\alpha(z'_{(i)})$, pour tout $\alpha, |\alpha| \leq k$, et $\hat{f}_i$ définit ainsi un prolongement local holomorphe du jet f de $U_i \cap Y$ à U_i. Soit $\theta_i \in \mathcal{D}(U_i)$ une partition de l'unité telle que $\sum \theta_i \equiv 1$ sur un voisinage de Y. Alors

$$\tilde{f} := \sum_i \theta_i \hat{f}_i \in C^\infty(X, \Lambda^n T^\star_X \otimes L),$$

définit un prolongement C^∞ du jet f. De plus, on a :

$$D''\tilde{f} = \sum_i d''\theta_i \wedge \hat{f}_i, \qquad D''\tilde{f} = 0 \qquad \text{sur } Y,$$

car tous les $\hat{f}_i$ prennent la même valeur en tout point de Y et $\sum_i d''\theta_i = 0$ sur Y. De même, pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$, $|\alpha| \leq k$, si on dérive localement $D''\tilde{f}$ dans les directions $s = (s_1, \ldots, s_r)$ transverses à Y, on obtient :

$$D^\alpha(D''\tilde{f}) = \sum_{\beta \leq \alpha} \sum_i \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(d''\theta_i) \wedge D^{\alpha-\beta}\hat{f}_i = 0 \qquad \text{sur } Y,$$

car pour $\alpha - \beta$ fixé, tous les $D^{\alpha-\beta}\hat{f}_i$ prennent la même valeur en tout point de Y (comme prolongements à l'ordre k du même jet transverse f). La sous-variété $Y = \{s = 0\}$ étant supposée lisse, le développement de Taylor de $D''\tilde{f}$ près de Y montre que le prolongement C^∞ construit pour f vérifie :

$$|D''\tilde{f}| = O(|s|^{k+1}) \qquad \text{au voisinage de } Y.$$

Construction des poids; méthode des bosses. Comme on ne connaît pas $\tilde{f}$ loin de Y, on va considérer une troncature à support dans un voisinage tubulaire de Y. Soit :

$$G_\varepsilon^{(k-1)} := \theta\left(\frac{|s|^2}{\varepsilon^2}\right)(\tilde{f} - F_{k-1}) \in C^\infty(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L),$$

où $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ telle que $\theta \equiv 1$, sur $]-\infty,\frac{1}{2}]$, et $\operatorname{Supp}\theta \subset\,]-\infty,1[$. Il est clair que $\operatorname{Supp} G_\varepsilon^{(k-1)} \subset \{|s| < \varepsilon\}$. Nous allons résoudre l'équation :

$$(\star) \quad D''u_\varepsilon = D''G_\varepsilon^{(k-1)},$$

avec la condition supplémentaire $\dfrac{|u_\varepsilon|^2}{|s|^{2(r+k)}} \in L^1_{\text{loc}}$ au voisinage de Y. Cette condition assure que u_ε ainsi que tous ses jets d'ordre $\leq k$ s'annulent sur Y. Soit ψ une exhaustion plurisousharmonique de X et $X_c = \{\psi < c\} \subset\subset X$, pour tout réel c. L'idéal serait de résoudre l'équation $(\star)$ sur X. Pour des raisons techniques qui apparaîtront dans la suite, on va résoudre l'équation $(\star)$ sur $X_c \backslash Y_c$, qui est encore une variété kählérienne complète grâce au lemme 1.0.2.4. Le prolongement holomorphe du jet f sera $G_\varepsilon^{(k-1)} - u_\varepsilon + F_{k-1}$. La solution finale sera obtenue par passage à la limite avec $c \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$.

Considérons maintenant les fonctions suivantes :

$$\sigma_\varepsilon := \log(|s|^2 + \varepsilon^2),\ \eta_\varepsilon := \varepsilon - \chi_0(\sigma_\varepsilon),\ \lambda_\varepsilon := \tfrac{\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^2}{\chi_0''(\sigma_\varepsilon)},$$

où $\chi_0 :]-\infty,0] \to]-\infty,0]$, $\chi_0(t) = t - \log(1-t)$, pour tout $t \leq 0$, ayant les propriétés suivantes: $\chi(t) \leq t$, $\ 1 \leq \chi_0' \leq 2$, $\ \chi''(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$.
La fonction η_ε est proche de $+\infty$ au voisinage de Y et décroît quand on s'en éloigne. Elle permet ainsi de concentrer la courbure de L sur un voisinage de Y. On définit un nouvel opérateur de courbure :

$$B_\varepsilon := [\eta_\varepsilon\,(i\Theta(L) + (r+k)\,id'd''\log|s|^2) - id'd''\eta_\varepsilon - \lambda_\epsilon^{-1}\,id'\eta_\varepsilon \wedge d''\eta_\varepsilon, \Lambda],$$

dont on démontre l'estimation :

$$B_\varepsilon \geq \tfrac{\varepsilon^2}{2|s|^2}(d''\eta_\varepsilon)(d''\eta_\varepsilon)^\star,$$

en tant qu'opérateur sur les (n,q)-formes. Des calculs faciles montrent que :

$$d'\sigma_\varepsilon = \frac{\{D's, s\}}{|s|^2+\varepsilon^2},\ d''\sigma_\varepsilon = \tfrac{\{s, D's\}}{|s|^2+\varepsilon^2},$$
$$d'd''\sigma_\varepsilon = \frac{\{D's, D's\}}{|s|^2+\varepsilon^2} + \frac{\{s, D''D's\}}{|s|^2+\varepsilon^2} - \frac{\{D's, s\}\wedge\{s, D's\}}{(|s|^2+\varepsilon^2)^2}.$$

Par ailleurs, $\Theta(E) = D^2 = D'D'' + D''D'$ et comme $D''s = 0$, par holomorphie de s, $D''D's = \Theta(E)s$. Ceci donne finalement :

$$id'd''\sigma_\varepsilon = \frac{i\{D's,D's\}}{|s|^2+\varepsilon^2} - \frac{i\{D's,s\}\wedge\{s,D's\}}{(|s|^2+\varepsilon^2)^2} - \frac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2+\varepsilon^2}.$$

On utilise l'inégalité de Lagrange : $i\{D's, D's\} \geq \dfrac{i\{D's, s\}\wedge\{s, D's\}}{|s|^2}$ pour obtenir :

$$id'd''\sigma_\varepsilon \geq \tfrac{\varepsilon^2}{|s|^2}\tfrac{i\{D's, s\}\wedge\{s, D's\}}{(|s|^2+\varepsilon^2)^2} - \tfrac{\{i\Theta(E)s, s\}}{|s|^2+\varepsilon^2} = \tfrac{\varepsilon^2}{|s|^2} id'\sigma_\varepsilon \wedge d''\sigma_\varepsilon - \tfrac{\{i\Theta(E)s, s\}}{|s|^2+\varepsilon^2}.$$

Par ailleurs, $d'\eta_\varepsilon = -\chi_0'(\sigma_\varepsilon)\,d'\sigma_\varepsilon$, $d''\eta_\varepsilon = -\chi_0'(\sigma_\varepsilon)\,d''\sigma_\varepsilon$ et

$$\begin{aligned} -id'd''\eta_\varepsilon &= \chi_0'(\sigma_\varepsilon)\,id'd''\sigma_\varepsilon + \chi_0''(\sigma_\varepsilon)\,id'\sigma_\varepsilon\wedge d''\sigma_\varepsilon \geq \\ &\geq \left(\frac{\varepsilon^2}{2|s|^2} + \frac{\chi_0''(\sigma_\varepsilon)}{\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^2}\right) id'\eta_\varepsilon \wedge d''\eta_\varepsilon - 2\frac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2+\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

On multiplie la métrique initiale de L par le poids $|s|^{-2(r+k)}$; la courbure de cette nouvelle métrique est :

$$i\Theta(L) + (r+k)\,id'd''\log|s|^2 \geq \alpha^{-1}\,\frac{\{i\Theta(E)s, s\}}{|s|^2+\varepsilon^2},$$

grâce à l'hypothèse (a). L'inégalité reste valable avec le dénominateur $|s|^2+\varepsilon^2$ à la place de $|s|^2$, grâce à la semipositivité du terme de gauche. Par ailleurs, $|s| \leq e^{-\alpha} \leq e^{-1}$, ce qui entraîne $\sigma_\varepsilon \leq 0$ pour ε petit, et

$$\eta_\varepsilon \geq \varepsilon - \sigma_\varepsilon \geq \varepsilon - \log(e^{-2\alpha}+\varepsilon^2).$$

On a : $\eta_\varepsilon \geq 2\alpha$, pour $\varepsilon < \varepsilon(c)$ assez petit. Ceci et les inégalités précédentes entraînent :

$$\eta_\varepsilon(i\Theta(L) + (r+k)\,id'd''\log|s|^2) - id'd''\eta_\varepsilon - \tfrac{\chi_0''(\sigma_\varepsilon)}{\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^2}\,id'\eta_\varepsilon\wedge d''\eta_\varepsilon \geq \tfrac{\varepsilon^2}{2|s|^2}\,id'\eta_\varepsilon\wedge d''\eta_\varepsilon,$$

sur X_c. On pose $\lambda_\varepsilon = \dfrac{\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^2}{\chi_0''(\sigma_\varepsilon)}$ et l'on obtient :

$$\begin{aligned} B_\varepsilon : &= [\eta_\varepsilon(i\Theta(L) + (r+k)\, id'd'' \log|s|^2) - id'd''\eta_\varepsilon - \lambda_\varepsilon^{-1}\, id'\eta_\varepsilon \wedge d''\eta_\varepsilon, \Lambda] \geq \\ &\geq \left[\frac{\varepsilon^2}{2|s|^2} id'\eta_\varepsilon \wedge d''\eta_\varepsilon, \Lambda\right] = \frac{\varepsilon^2}{2|s|^2}(d''\eta_\varepsilon)(d''\eta_\varepsilon)^\star \end{aligned}$$

en tant qu'opérateur sur les (n,q)-formes. Pour la dernière égalité nous avons utilisé le point (b) du lemme 1.0.2.2.

Résolution du $\bar\partial$ avec estimations L^2. Nous résolvons maintenant l'équation $(\star)$ à l'aide de la proposition 1.0.2.3. Au lieu de travailler sur X, nous nous plaçons sur l'ensemble relativement compact $X_c \setminus Y_c$, où $Y_c = Y \cap X_c = Y \cap \{\psi < c\}$. Ainsi nous évitons la singularité du poids $|s|^{-2(r+k)}$ le long de Y. Pour résoudre l'équation $(\star)$, il faut vérifier que la condition L^2 requise a priori dans la proposition 1.0.2.3 est satisfaite. Des calculs faciles montrent que :

$$D''G_\varepsilon^{(k-1)} = g_\varepsilon^{(1)} + g_\varepsilon^{(2)}, \qquad \text{où}$$

$$g_\varepsilon^{(1)} = (1 + \tfrac{|s|^2}{\varepsilon^2})\theta'(\tfrac{|s|^2}{\varepsilon^2})d''\sigma_\varepsilon \wedge (\tilde f - F_{k-1}),$$

$$g_\varepsilon^{(2)} = \theta(\tfrac{|s|^2}{\varepsilon^2})D''(\tilde f - F_{k-1}).$$

Comme $g_\varepsilon^{(2)}$ converge uniformément vers 0 sur tout compact quand ε tend vers 0, il n'aura aucune contribution dans la limite. En fait, $\mathrm{Supp}\,(g_\varepsilon^{(2)}) \subset \{|s| < \varepsilon\}$ et $|g_\varepsilon^{(2)}| = O(|s|^{k+1})$, car on avait montré plus haut que $|D''\tilde f| = O(|s|^{k+1})$ au voisinage de Y. Ceci entraîne :

$$\int_{X_c \setminus Y_c} \langle B_\varepsilon^{-1} g_\varepsilon^{(2)}, g_\varepsilon^{(2)}\rangle\, |s|^{-2(r+k)}\, dV_{X,\omega} = O(\varepsilon),$$

si B_ε est uniformément localement borné inférieurement au voisinage de Y. Sinon, on résout l'équation approximative $D''u + \delta^{\frac12} h = g_\varepsilon$, où $\delta > 0$ est petit (voir [Dem99], Remarque 3.2, pour les détails). Comme il n'y a essentiellement aucune difficulté, on peut supposer pour la clarté de l'exposition que l'on a la borne inférieure souhaitée pour B_ε. Quant à $g_\varepsilon^{(1)}$, on obtient l'estimation suivante :

$$\int_{X_c \setminus Y_c} \langle B_\varepsilon^{-1} g_\varepsilon^{(1)}, g_\varepsilon^{(1)}\rangle\, |s|^{-2(r+k)}\, dV_{X,\omega} \leq 8 \int_{X_c \setminus Y_c} |\tilde f - F_{k-1}|^2 \theta'\left(\frac{|s|^2}{\varepsilon^2}\right)^2 |s|^{-2(r+k)}\, dV_{X,\omega}.$$

En fait,

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^{(1)} &= -(1 + \tfrac{|s|^2}{\varepsilon^2})\theta'(\tfrac{|s|^2}{\varepsilon^2})\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^{-1}\, d''\eta_\varepsilon \wedge (\tilde f - F_{k-1}), \\ B_\varepsilon^{-1} &\leq \tfrac{2|s|^2}{\varepsilon^2}\, (d''\eta_\varepsilon)^{\star-1}(d''\eta_\varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\langle B_\varepsilon^{-1}(d''\eta_\varepsilon\wedge u),(d''\eta_\varepsilon\wedge u)\rangle &\leq \tfrac{2|s|^2}{\varepsilon^2}\langle (d''\eta_\varepsilon)^{-1\star}(d''\eta_\varepsilon)^{-1}(d''\eta_\varepsilon\wedge u),(d''\eta_\varepsilon\wedge u)\rangle = \\ &= \tfrac{2|s|^2}{\varepsilon^2}\langle u,u\rangle = \tfrac{2|s|^2}{\varepsilon^2}|u|^2.\end{aligned}$$

De plus, $\frac{2|s|^2}{\varepsilon^2}\leq 2$ et $(1+\frac{|s|^2}{\varepsilon^2})\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^{-1}\leq 2$, sur $\operatorname{Supp} g_\varepsilon^{(1)}\subset\{|s|<\varepsilon\}$. Ceci entraîne :

$$\langle B_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon^{(1)},g_\varepsilon^{(1)}\rangle \leq 8\,\theta'(\tfrac{|s|^2}{\varepsilon^2})^2|\tilde f-F_{k-1}|^2.$$

Si $z=(z_1,\ldots,z_r)$ est un système quelconque de coordonnées locales transverses à Y, on a :

$$\frac{|s|^{2r}}{|\Lambda^r(ds)|^2}=\frac{|z|^{2r}}{|\Lambda^r(dz)|^2},$$

les normes étant calculées pour les sections $\Lambda^r(ds)\in H^0(X,\Lambda^r(T_X/T_Y)^\star\otimes \text{dét}E)$ et $\Lambda^r(dz)\in H^0(U,\Lambda^r(T_X/T_Y)^\star)$ par rapport aux métriques induites sur les fibrés respectifs par ω et par la métrique donnée sur E.

L'intégrande de la dernière intégrale s'écrit localement, après le changement de variable $s\rightsquigarrow\varepsilon\, s$, comme :

$$\begin{aligned}&\frac{|(\tilde f-F_{k-1})(\varepsilon\, s,z')|^2}{\varepsilon^{2(r+k)}|s|^{2(r+k)}}\,\frac{\theta'(|s|^2)^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}\,dV_\omega(\varepsilon\, s,z') = \\ &=\frac{|(\tilde f-F_{k-1})(\varepsilon\, s,z')|^2}{\varepsilon^{2k}|s|^{2(r+k)}}\,\frac{\theta'(|s|^2)^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}dV_\omega(s,z').\end{aligned}$$

Comme $J^{k-1}f-J^{k-1}F_{k-1}=0$, le développement en série de Taylor nous donne :

$$\begin{aligned}(\tilde f-F_{k-1})(\varepsilon\, s,z') &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\geq k}\frac{\varepsilon^{|\alpha|+|\beta|}}{(\alpha+\beta)!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta}(\tilde f-F_{k-1})}{\partial s^\alpha\partial\bar s^\beta}(0,z')s^\alpha\bar s^\beta = \\ &=\varepsilon^k\Bigg(\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha(\tilde f-F_{k-1})}{\partial s^\alpha}(0,z')s^\alpha+\sum_{|\alpha|+|\beta|\geq k+1}\frac{\varepsilon^{|\alpha|+|\beta|-k}}{(\alpha+\beta)!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta}(\tilde f-F_{k-1})}{\partial s^\alpha\partial\bar s^\beta}(0,z')s^\alpha\bar s^\beta\Bigg)= \\ &=\varepsilon^k(f-J^kF_{k-1})(z')+O(|\varepsilon s|^{k+1})=\varepsilon^k\,\nabla^k(f-J^kF_{k-1})(z')+O(|\varepsilon s|^{k+1}).\end{aligned}$$

La première somme ne porte que sur les multi-indices α et β tels que si $|\alpha|+|\beta|=k$, alors $|\alpha|=k$.

Ceci montre que $\dfrac{|(\tilde f-F_{k-1})(\varepsilon s,z')|^2}{\varepsilon^{2k}}$ converge vers $|\nabla^k(f-J^kF_{k-1})(z')|^2$, (cf. la notation 1.0.1.3), uniformément sur tout compact, quand $\varepsilon\to 0$.

Nous avons donc démontré que :

$$\int_{X_c\setminus Y_c}\langle B_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon^{(1)},g_\varepsilon^{(1)}\rangle\,|s|^{-2(r+k)}dV_{X,\,\varepsilon}\leq$$

$$\leq 8 \int\limits_{X_c \setminus Y_c} |\tilde{f} - F_{k-1}|^2 \, \Theta'\left(\frac{|s|^2}{\varepsilon^2}\right)^2 |s|^{-2(r+k)} \, dV_{X,\varepsilon} \to 8\, C_{r,k} \int\limits_{Y_c} \frac{|\nabla^k(f - J^k F_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}} \, dV_{Y,\omega},$$

où $C_{r,k} := \displaystyle\int\limits_{z \in \mathbb{C}^r, |z| \leq 1} \theta'(|z|^2)^2 \, \frac{i\Lambda^r(dz) \wedge \Lambda^r(d\bar{z})}{|z|^{2(r+k)}}.$

On remarquera que $|\nabla^k(f - J^k F_{k-1})| = |f - J^k F_{k-1}|$, où $|f - J^k F_{k-1}|$ est la norme de la section :

$$f - J^k F_{k-1} \in H^0(Y, \Lambda^n T_X^\star \otimes L \otimes S^k N_{Y/X}^\star)$$

par rapport à la métrique induite sur $S^k N_{Y/X}^\star$ par la métrique de référence ω sur X. En fait, $S^k N_{Y/X}$ est un sous-fibré de $(S^k T_X)_{|Y}$; on considère la métrique induite sur $S^k N_{Y/X}$ par restriction.

La condition L^2 requise a priori par la proposition 1.0.2.3 est donc satisfaite. La solution $u_{c,\varepsilon}$ de l'équation $(\star)$ $D'' u_{c,\varepsilon} = D'' G_\varepsilon^{(k+1)} = g_\varepsilon^{(1)} + g_\varepsilon^{(2)}$ sur $X_c \setminus Y_c$ vérifie alors l'estimation :

$$(1) \quad \int\limits_{X_c \setminus Y_c} \frac{|u_{c,\varepsilon}|^2}{|s|^{2(r+k)}(-\log(|s|^2 + \varepsilon^2))^2} \, dV_{X,\varepsilon} \leq \int\limits_{X_c \setminus Y_c} \frac{|u_{c,\varepsilon}|^2}{(\eta_\varepsilon + \lambda_\varepsilon)|s|^{2(r+k)}} \, dV_{X,\omega} \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_{X_c \setminus Y_c} \langle B_\varepsilon^{-1} g_\varepsilon, g_\varepsilon \rangle |s|^{-2(r+k)} dV_{X,\omega} \leq 16 C_{r,k} \int\limits_{Y_c} \frac{|\nabla^k(f - J^k F_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}} dV_{Y,\omega} + O(\varepsilon).$$

Nous avons utilisé les estimations évidentes suivantes :

$$\sigma_\varepsilon = \log(|s|^2 + \varepsilon^2) \leq \log(e^{-2\alpha} + \varepsilon^2) \leq -2\alpha + O(\varepsilon^2) \leq -2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\eta_\varepsilon = \varepsilon - \chi_0(\sigma_\varepsilon) \leq (1 + O(\varepsilon))\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\lambda_\varepsilon = \tfrac{\chi_0'(\sigma_\varepsilon)^2}{\chi_0''(\sigma_\varepsilon)} = (1 - \sigma_\varepsilon)^2 + (1 - \sigma_\varepsilon) \leq (3 + O(\varepsilon))\sigma_\varepsilon^2,$$

$$\eta_\varepsilon + \lambda_\varepsilon \leq (4 + O(\varepsilon))\sigma_\varepsilon^2 \leq (4 + O(\varepsilon))(-\log(|s|^2 + \varepsilon^2))^2.$$

Le prolongement de f à $X_c \setminus Y_c$ est donné par :

$$F_{c,\varepsilon}^{(k)} := G_\varepsilon^{(k-1)} - u_{c,\varepsilon} + F_{k-1}.$$

Localement en un point arbitraire de Y, ceci signifie que toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ de $F_{c,\varepsilon}^{(k)}$ sont prescrites par f. La fonction $G_\varepsilon^{(k-1)}$ est C^∞ sur un voisinage tubulaire de Y et $\operatorname{Supp} G_\varepsilon^{(k-1)} \subset \{|s| < \varepsilon\}$. Ceci implique que :

$$(2)\quad \int\limits_{X_c} \frac{|G_\varepsilon^{(k-1)}|^2}{(|s|^2+\varepsilon^2)^r(-\log(|s|^2+\varepsilon^2))^2}\, dV_{X,\omega} \leq \frac{\text{Const}}{(\log\varepsilon)^2}.$$

Comme :

$$\int\limits_{X_c\backslash Y_c} \frac{|u_{c,\varepsilon}|^2}{|s|^{2r}(-\log(|s|^2+\varepsilon^2))^2}\, dV_{X,\omega} \leq \int\limits_{X_c\backslash Y_c} \frac{|u_{c,\varepsilon}|^2}{|s|^{2(r+k)}(-\log(|s|^2+\varepsilon^2))^2}\, dV_{X,\omega},$$

(1), (2) et l'hypothèse de récurrence sur la norme L^2 de F_{k-1} entraînent l'estimation :

$$\int\limits_{X_c\backslash Y_c} \frac{|F_{c,\varepsilon}^{(k)}|^2}{(|s|^2+\varepsilon^2)^r(-\log(|s|^2+\varepsilon^2))^2}\, dV_{X,\omega} \leq$$

$$\leq 16\, C_{r,k} \int_{Y_c} \frac{|\nabla^k(f - J^k F_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}\, dV_{Y,\omega} + \int_{X_c} \frac{|F_{k-1}|^2}{|s|^{2r}(-\log|s|)^2}\, dV_{X,\omega} + \frac{\text{Const}}{(\log\varepsilon)^2} \leq$$

$$\leq 16\, C_{r,k} \int\limits_{Y_c} \frac{|\nabla^k(f - J^k F_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}\, dV_{Y,\omega} + C_r^{(k-1)} \int\limits_{Y} |f|^2_{s,\,\rho,\,(k-1)}\, |\Lambda^r(ds)|^{-2}\, dV_{Y,\omega} + \frac{\text{Const}}{(\log\varepsilon)^2}$$

$$\leq C_r^{\prime(k)} \int\limits_{Y} |f|^2_{s,\,\rho,\,k}\, |\Lambda^r(ds)|^{-2}\, dV_{Y,\omega} + 16\, C_{r,k} \int\limits_{Y_c} \frac{|\nabla^k(J^k F_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}\, dV_{Y,\omega} + \frac{\text{Const}}{(\log\varepsilon)^2},$$

où $C_r^{\prime(k)} = C_r^{(k-1)} + 16\, C_{r,k}$.
Nous avons aussi $D'' F_{c,\varepsilon}^{(k)} = 0$ sur $X_c\backslash Y_c$, par construction. Cette relation s'étend de $X_c\backslash Y_c$ à X_c car $F_{c,\varepsilon}^{(k)}$ est L^2_{loc} au voisinage de Y_c. Ceci est assuré par le lemme standard suivant sur l'opérateur $\bar\partial$ (voir par ex. [Dem82]).

Lemme 1.0.3.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et Y un sous-ensemble analytique de Ω. Soit v une $(p,q-1)$-forme à coefficients L^2_{loc} et w une (p,q)-forme à coefficients L^1_{loc} telles que $d''v = w$ sur $\Omega\backslash Y$ (au sens des distributions). Alors $d''v = w$ sur Ω.*

L'ellipticité de l'opérateur $\bar\partial$ en bidegré (0,0) assure que $u_{c,\varepsilon}$ est C^∞. Par conséquent, $F_{c,\varepsilon}^{(k)}$ est aussi C^∞.

On a obtenu ainsi une famille de solutions $(F_{c,\varepsilon}^{(k)})_\varepsilon$ et des estimations L^2 de celles-ci sur l'ouvert X_c relativement compact dans X. En extrayant une limite faible quand $\varepsilon \to 0$, on obtient une solution $F_c^{(k)}$ et une estimation L^2 de celle-ci sur l'ouvert relativement compact X_c, pour tout $c > 0$.

1.0.4 Estimation de la solution dans le théorème 1.0.1.5

Pour obtenir les estimations finales dans les théorèmes 1.0.1.4 et 1.0.1.5, il reste à estimer : $\displaystyle\int_{Y_c} \frac{|\nabla^k(J^k F_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}\, dV_{Y,\omega}$.

Nous traitons dans ce paragraphe le cas du théorème 1.0.1.5 où l'étude est facilitée par le fait que la variété ambiante est un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Nous allons utiliser les inégalités de Cauchy (ou, ce qui revient au même, la formule de Parseval). Dans le cas plus général du théorème 1.0.1.4, une telle approche donnerait une constante qui dépendrait du rayon des boules de coordonnées holomorphes locales de X. Comme ceci est une quantité incontrôlable, on évitera cet arbitraire dans les paragraphes suivants au moyen de l'application exponentielle qui remplacera localement la variété ambiante X par son espace tangent en un point.

Soit ω la métrique kählérienne standard sur Ω. La courbure de E étant bornée, il existe une constante $M > 0$ telle que $i\Theta(E) \le M\omega \otimes \mathrm{Id}_E$. Posons $L = \Omega \times \mathbb{C}$, muni de la métrique de poids $e^{-\varphi - A|z|^2}$, avec une constante $A \gg 0$. Si l'on pose $\alpha \equiv 1$, la condition (a) du théorème 1.0.1.4 est équivalente à :

$$id'd''\varphi + A\, id'd''|z|^2 + (r+k)\, id'd'' \log |s|^2 \ge \frac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2}.$$

Comme $id'd''\varphi \ge 0$, $id'd''\log|s|^2 \ge -\frac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2}$ et $\frac{\{i\Theta(E)s,s\}}{|s|^2} \le M\omega$, cette relation est satisfaite dès que A est choisi assez grand. Ce choix de A dépend de la borne M du tenseur de courbure de E.

Soit $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ une exhaustion psh C^∞ de Ω, à savoir une fonction telle que les ouverts de niveau $\Omega_c := \{\psi < c\}$ sont relativement compacts dans Ω, pour tout $c > 0$. On peut supposer que $\Omega' = \Omega_c$ pour un c, et notons $Y_c := Y \cap \Omega_c$. Considérons un recouvrement de Y_c par des ouverts U_j, $j = 1, \ldots, p$, tels que sur chaque U_j il existe des coordonnées locales $z = (z', z'')$, $z' = (z_1, \ldots, z_r)$, $z'' = (z_{r+1}, \ldots, z_n)$ de sorte que $Y \cap U_j = \{z' = 0\}$. Choisissons un tel U_j et supposons que $U_j = B'(0,\rho) \times B''(0,\rho) \subset B(0, \rho\sqrt{2})$, où $B'(0,\rho)$ est la boule de rayon ρ de $\mathbb{C}^r$, $B''(0,\rho)$ est la boule de rayon ρ de $\mathbb{C}^{n-r}$ et $B(0,\rho\sqrt{2})$ est la boule de rayon $\rho\sqrt{2}$ de $\mathbb{C}^n$. Le jet $\nabla^k(J^k F_{k-1})$ s'écrit sur U_j comme $\sum\limits_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha F_{k-1}}{\partial z'^\alpha}(0,z'') z'^\alpha$ et sa norme est donnée par :

$$|\nabla^k(J^k F_{k-1})|^2 = \sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{\frac{\partial^\alpha F_{k-1}}{\partial z'^\alpha}(0,z'')}{\alpha!} \right|^2 e^{-2\varphi(0,z'') - 2A|z''|^2}.$$

La formule de Parseval appliquée pour $z' \in B'(0,\rho)$ nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Const}}{\rho^{2r}} \int_{z' \in B'(0,\rho)} |F_{k-1}(z',z'')|^2\, d\lambda(z') &= \sum_{\alpha} \left| \frac{\frac{\partial^\alpha F_{k-1}}{\partial z'^\alpha}(0,z'')}{\alpha!} \right|^2 \frac{\rho^{2|\alpha|}}{2r + 2|\alpha|} \ge \\
&\ge \sum_{|\alpha|=k} \left| \frac{\frac{\partial^\alpha F_{k-1}}{\partial z'^\alpha}(0,z'')}{\alpha!} \right|^2 \frac{\rho^{2k}}{2(r+k)},
\end{aligned}$$

où Const est une constante universelle. Par suite :

$$\frac{\displaystyle\sum_{|\alpha|=k}\left|\frac{\frac{\partial^\alpha F_{k-1}}{\partial z'^\alpha}(0,z'')}{\alpha!}\right|^2 e^{-2\varphi(0,z'')-2A|z''|^2}}{|\Lambda^r(ds)(0,z'')|^{2\frac{r+k}{r}}}\leq$$
$$\leq \mathrm{Const}\,\frac{2(r+k)}{\rho^{2(r+k)}}\int\limits_{z'\in B'(0,\,\rho)}||F_{k-1}(z',z'')||^2\,\frac{e^{2(\varphi(z',z'')-\varphi(0,z''))}\,e^{2A|z'|^2}}{|\Lambda^r(ds)(0,z'')|^{2\frac{r+k}{r}}}\,d\lambda(z'),$$

pour tout $z''\in B''(0,\rho)$, où on a noté

$$||F_{k-1}(z',z'')||^2 \doteqdot |F_{k-1}(z',z'')|^2\,e^{-2\varphi(z',z'')}\,e^{-2A(|z'|^2+|z''|^2)},$$

la norme de la section F_{k-1} dans le fibré L. Par une incohérence de notation, cette norme de fibré $||\ ||$ est celle que l'on avait notée $|\ |$ dans l'hypothèse de récurrence (cf. le début du paragraphe 0.3). Soit ε un module de continuité pour φ, à savoir une fonction telle que :

$$|\varphi(z',z'')-\varphi(0,z'')|\leq\varepsilon(\,|z'|\,),\quad \forall(z',z'')\in\bigcup_{j=1}^{p}U_j,$$

et $\varepsilon(\delta)\downarrow 0$, lorsque $\delta\downarrow 0$.

Comme $\varepsilon(|z'|)\leq\varepsilon(\rho)$, pour $z'\in B'(0,\rho)$, la dernière inégalité devient :

$$\frac{\displaystyle\sum_{|\alpha|=k}\left|\frac{\frac{\partial^\alpha F_{k-1}}{\partial z'^\alpha}(0,z'')}{\alpha!}\right|^2 e^{-2\varphi(0,z'')-2A|z''|^2}}{|\Lambda^r(ds)(0,z'')|^{2\frac{r+k}{r}}}\leq$$
$$\leq \mathrm{Const}\,\frac{2(r+k)}{\rho^{2(r+k)}}\,e^{2(\varepsilon(\rho)+A\rho^2)}\sup_{(z',\,z'')\in U_j}\frac{|s(z',z'')|^{2r}\,(-\log|s(z',z'')|)^2}{|\Lambda^r(ds)(0,z'')|^{2\frac{r+k}{r}}}$$
$$\int\limits_{z'\in B'(0,\rho)}\frac{||F_{k-1}(z',z'')||^2}{|s(z',z'')|^{2r}\,(-\log|s(z',z'')|)^2}\,d\lambda(z'),$$

pour tout $z''\in B''(0,\rho)$. Les propriétés topologiques usuelles de Y assurent qu'il existe un entier positif N tel que le recouvrement $(U_j)_j$ de Y_c peut être choisi avec la propriété : $\#\{j\,;\,U_j\ni y\}\leq N$. Une intégration par rapport à z'' dans l'inégalité précédente, une sommation sur j et des majorations évidentes entraînent :

$$\int\limits_{Y_c}\frac{|\nabla^k(J^kF_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}}dV_{Y,\omega}\leq C_{r,\,k}\,N\,M(c)\frac{1}{\rho^{2(r+k)}}e^{2(\varepsilon(\rho)+A\rho^2)}\int\limits_{\Omega'}\frac{||F_{k-1}||^2}{|s|^{2r}\,(-\log|s|)^2}dV_{X,\,\omega},$$

où $M(c)=\displaystyle\sup_{(z',\,z'')\in\Omega'}\frac{|s(z',z'')|^{2r}\,(-\log|s(z',z'')|)^2}{|\Lambda^r(ds)(0,z'')|^{2\frac{r+k}{r}}}$ et $C_{r,\,k}=\mathrm{Const}\,2(r+k)$.

Le rayon ρ des cartes locales sur lesquelles la sous-variété Y peut être redressée s'obtient via le lemme élémentaire suivant qui est un raffinement du théorème d'inversion locale précisant la "taille" de la boule sur laquelle on a un difféomorphisme local.

Lemme 1.0.4.1 *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de classe C^1 telle que sa différentielle $df_a : E \to F$ en un point $a \in U$ est un isomorphisme bicontinu.*

Alors le voisinage ouvert V de a, donné par le théorème d'inversion locale, sur lequel f est un difféomorphisme sur l'image contient la boule $B(a,\rho)$, où :

$$\rho = \frac{1}{6(||df_a^{-1}||)(\sup\limits_{\xi\in U} ||d^2 f_\xi||)}.$$

Nous avons rejeté la démonstration élémentaire de ce lemme, qui s'obtient facilement de celle du théorème d'inversion locale, dans l'annexe A. Comme la sous-variété Y est définie par la section $s \in H^0(X, E)$, nous en déduisons l'expression explicite pour la fonction poids ρ annoncée dans les énoncés des théorèmes 1.0.1.4 et 1.0.1.5. En fait, si $\theta : E_{|U} \to U \times \mathbb{C}^r$ est une trivialisation de $E_{|U}$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ le repère holomorphe correspondant de $E_{|U}$, la restriction de s à U s'écrit de manière unique comme

$$s = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \otimes e_j, \qquad \sigma_j \in \mathcal{O}(U).$$

Si D est la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien E, l'opérateur D s'écrit comme

$$Ds \simeq_\theta d\,\sigma + A \wedge \sigma,$$

où $A = (a_{j\,k})$ est la matrice de 1-formes qui représente la connexion D dans la trivialisation θ. Les coefficients a_{jk} de A étant localement bornés (par des constantes qui dépendent donc de E), le lemme 1.0.4.1 et l'expression de d en fonction de D montrent que le rayon de la boule de coordonnées sur laquelle Y peut être redressée au voisinage d'un point $y \in Y$ est minoré par

$$C\,\rho(y) = C\,\frac{1}{||Ds_y^{-1}||\sup\limits_{\xi}(||D^2 s_\xi|| + ||Ds_\xi||)},$$

la constante $C > 0$ dépendant uniquement de E.

Ceci achève la démonstration du théorème 1.0.1.5.

1.0.5 Un théorème de comparaison de type Rauch

Rappelons que le cadre du théorème 1.0.1.4 est une variété kählérienne (X, ω). Pour que les estimations finales soient indépendantes du rayon des boules de coordonnées holomorphes locales de X, nous préférons travailler sur l'espace tangent à X en un point. L'application exponentielle identifie localement X à son espace tangent. Pour estimer la déviation de la métrique tirée en arrière de ω sur l'espace tangent par rapport à la métrique euclidienne standard de $\mathbb{C}^n$, nous avons besoin d'établir un résultat de géométrie riemannienne voisin du théorème de Rauch (voir, par ex, [BC64], p. 250). La démonstration de ce résultat ne sera qu'une légère adaptation de la démonstration du théorème de Rauch et utilisera la théorie des champs de Jacobi et un lemme élémentaire de type Gronwall.

Soit (M,g) une variété riemannienne complète, $m \in M$ un point quelconque et $\exp_m : T_mM \to M$, l'application exponentielle au point m. Notons $\mathrm{Id} := \mathrm{Id}_{T_mM}$ et, pour un point arbitraire $x \in T_mM$, considérons l'application linéaire tangente (ou la différentielle) $T_x\exp_m : T_mM \to T_{\exp_m(x)}M$ de $\exp_m$ au point x. On identifie T_mM et $T_{\exp_m(x)}M$ via l'isométrie définie par le transport parallèle le long de la géodésique issue de x. Notre objectif est d'estimer :

$$||T_x\exp_m - \mathrm{Id}||$$

en fonction de $||x||$, quand x varie dans l'espace tangent T_mM. Soit $u \in T_mM, ||u|| = 1$, et γ_u la géodésique issue de u. Ainsi, on a :

$$\gamma_u(0) = m \text{ et } \gamma_u(t) = \exp_m(tu),$$

pour tout t dans l'intervalle de définition de γ_u. Nous rappelons qu'un champ de vecteurs Y le long de la géodésique γ_u est dit *champ de Jacobi* s'il vérifie l'équation différentielle du second ordre :

$$Y'' + R(\gamma_u',Y)\gamma_u' = 0,$$

où R est le tenseur de courbure de (M, g), défini comme $R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z$. C'est un fait bien connu que la différentielle de l'application exponentielle est donnée par un champ de Jacobi. Plus précisément, pour tous $u,v \in T_mM$, on a la relation:

$$(T_{tu}\exp_m)(tv) = Y(t),$$

où Y est l'unique champ de Jacobi le long de γ_u tel que $Y(0) = 0$ et $Y'(0) = v$.

Supposons maintenant que la courbure sectionnelle de (M,g) est bornée, à savoir qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$-k \leq K(p,P) \leq k,$$

pour tout point $p \in M$ et tout plan $P \subset T_pM$, où $K(p,P)$ désigne la courbure sectionnelle du plan P. Pour estimer $||T_x\exp_m - \mathrm{Id}||$, on a besoin d'estimer :

$$||(T_{tu}\exp_m)(tv) - \mathrm{Id}(tv)|| = ||Y(t) - Y'(0)t||,$$

quand t varie dans $\mathbb{R}$. Nous avons ainsi besoin d'une estimation de Y sachant qu'il vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre. Le lemme élémentaire suivant, de type Gronwall, donne l'estimation nécessaire.

Lemme 1.0.5.1 *Soit $v : [0,T] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, $v \geq 0$, telle que $v(0) = 0$, $v'(0) = A$ et*

$$-kv \leq v'' \leq kv, \qquad \text{sur } [0,T],$$

où $k > 0$ est une constante. Alors :

$A\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t) \leq v(t) \leq A\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}t)$, *pour tout* $t \in [0,T]$.

Preuve. Démontrons d'abord l'inégalité de droite. Soit u la solution du problème de Cauchy $u'' = ku$ avec conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$. Alors, $u(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}t)$. En particulier, $u \geq 0$, et $u(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Par hypothèse, on voit que :

$$\frac{v''}{v} \leq k = \frac{u''}{u} \Longleftrightarrow (v'u - vu')' \leq 0 \Rightarrow v'u - vu' \leq 0,$$

sur $[0,T]$. Ceci implique :

$$(\frac{v}{u})' \leq 0 \Rightarrow \frac{v(t)}{u(t)} \leq \frac{v}{u}(0_+),$$

pour tout $t \in [0,T]$. Par conséquent,

$$v(t) \leq \frac{v}{u}(0_+)\,\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}t),$$

pour tout $t \in [0,T]$. Par ailleurs, on voit que :

$$\frac{v}{u}(0_+) = \lim_{t\to 0}\frac{v(t)}{u(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{v'(0)}{u'(0)} = A,$$

ce qui démontre l'inégalité de droite. Démontrons maintenant l'inégalité de gauche.

Soit u la solution du problème de Cauchy $u'' = -ku$ avec conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$. Alors, $u(t) = \frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t)$. En particulier, $u \geq 0$, et $u(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Par hypothèse, on voit que :

$$\frac{v''}{v} \geq -k = \frac{u''}{u} \Longleftrightarrow (v'u - vu')' \geq 0 \Longrightarrow v'u - vu' \geq 0,$$

sur $[0,T]$. Ceci implique :

$$(\frac{v}{u})' \geq 0 \Rightarrow \frac{v(t)}{u(t)} \geq \frac{v}{u}(0_+),$$

pour tout $t \in [0,T]$. Par conséquent,

$$v(t) \geq \frac{v}{u}(0_+)\,\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t),$$

pour tout $t \in [0,T]$. Comme précédemment, $\frac{v}{u}(0_+) = \frac{v'(0)}{u'(0)} = A$, ce qui établit l'inégalité de gauche. □

On va maintenant appliquer ce lemme aux composantes Y_j du champ de Jacobi $Y = (Y_1, \ldots, Y_{2n})$, qui sont des fonctions réelles satisfaisant $Y_j(0) = 0$, $Y_j'(0) = v_j$, et $-kY_j \leq Y_j'' \leq kY_j$, pour tout $j = 1, \ldots, 2n$, où $2n$ est la dimension réelle de la variété M et $v = (v_1, \ldots, v_{2n})$ sont les composantes de $v \in T_mM \simeq \mathbb{R}^{2n}$. On obtient :

$$||Y_j(t) - Y_j'(0)t|| \leq |\frac{\sinh(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}} - t|\,||v_j||, \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, 2n,$$

si l'on tient compte également de l'inégalité $\sin x \leq x \leq \sinh x$, pour $x \geq 0$. Une sommation pour $j = 1, \ldots, 2n$ donne :

$$||Y(t) - Y'(0)t|| \leq |\tfrac{\sinh(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}} - t|\, ||v||,$$

pour tous t, v, u. On obtient ensuite, après division par t :

$$||(T_{tu}\exp_m)(v) - \mathrm{Id}(v)|| \leq |\tfrac{\sinh(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}t} - 1|\, ||v||,$$

$$||T_{tu}\exp_m - \mathrm{Id}|| \leq |\tfrac{\sinh(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}t} - 1|,$$

pour tous t, u. Si on pose $x = tu$, on trouve :

$$||T_x\exp_m - \mathrm{Id}|| \leq \left|\tfrac{\sinh(\sqrt{k}||x||)}{\sqrt{k}||x||} - 1\right|, \text{ pour tout } x \in T_mM.$$

Comme $\sinh x \geq x$, pour tout $x \geq 0$, la valeur absolue est superflue dans le terme de droite. On a ainsi démontré la

Proposition 1.0.5.2 *S'il existe une constante $k > 0$ telle que :*

$$-k \leq K(p,P) \leq k,$$

pour tout point $p \in M$ et tout plan $P \subset T_pM$, alors :

$$||T_x\exp_m - \mathrm{Id}|| \leq \frac{\sinh(\sqrt{k}||x||)}{\sqrt{k}||x||} - 1,$$

pour tout $x \in T_mM$.

Remarque. Le théorème de comparaison de Rauch donne une estimation de $||T_x\exp_m||$. La proposition ci-dessus estime l'écart entre $T_x\exp_m$ et $T_0\exp_m = \mathrm{Id}$. Elle est donc légèrement plus générale.

1.0.6 Estimation finale

Pour finir la démonstration du théorème 1.0.1.4, il reste à obtenir un contrôle uniforme de $\displaystyle\int_{Y_c} \frac{|\nabla^k(J^kF_{k-1})|^2}{|\Lambda^r(ds)|^{2\frac{r+k}{r}}} dV_{Y,\omega}$. (cf. la fin du paragraphe 1.0.3)

Fixons un point $y_0 \in Y \subset X$ et considérons l'application exponentielle $\Phi \coloneqq \exp_{y_0} : T_{y_0}X \to X$. La métrique kählérienne ω sur la variété faiblement pseudoconvexe X peut être rendue complète par un procédé standard bien connu. On peut donc supposer, sans perte de généralité, que l'application exponentielle est définie sur l'espace tangent tout entier. Soit ω_0 la métrique kählérienne standard de l'espace euclidien $T_{y_0}X \simeq \mathbb{C}^n$. Notre premier objectif dans ce paragraphe est de trouver une formule explicite du rayon de la boule de l'espace tangent $T_{y_0}X$ sur laquelle on peut comparer les métriques $\Phi^\star\omega$ et ω_0. Posons :

$$(0.6.1) \quad r(y_0) \doteqdot \sup\{r > 0\,;\ \sup_{\substack{x\in B(y_0,\,r)\\ 0\leq l\leq m}} r^{2+l}\,||\nabla^l\Theta(T_X)(x)|| < 10^{-2a}\},$$

où $a > 0$ est une constante qui sera précisée par la suite et $\nabla^l\Theta(T_X)$ désigne la dérivée d'ordre l du tenseur de courbure $\Theta(T_X)$ vue comme section de classe C^∞ du fibré $\Lambda^{1,1}T_X^\star \otimes \mathrm{Hom}(T_X, T_X)$. Localement, ceci revient à dériver les coefficients de $\Theta(T_X)$. En particulier, on a :

$$\sup_{x\in B(y_0,\,r(y_0))} ||\Theta(T_X)|| \leq \tfrac{10^{-2a}}{r(y_0)^2} := k,$$

et donc l'encadrement suivant pour la courbure sectionnelle de la variété X :

$$-k \leq K(p,P) \leq k,$$

pour tout $p \in B(y_0,r(y_0))$ et tout $P \subset T_{y_0}X$, plan de l'espace tangent en y_0 à X.

Ceci montre que l'hypothèse de la proposition 1.0.5.2 est satisfaite dans la boule $B(y_0,r(y_0))$. On obtient alors :

$$(\star) \qquad ||T_v\mathrm{exp}_{y_0} - \mathrm{Id}|| \leq \frac{\sinh(\sqrt{k}||v||)}{\sqrt{k}||v||} - 1,$$

pour tout $v \in T_{y_0}X$, tel que $||v|| < r(y_0)$. Si $||T_v\mathrm{exp}_{y_0} - \mathrm{Id}|| < 1$, l'application $T_v\mathrm{exp}_{y_0}$ est inversible. Par conséquent, exp_{y_0} est une immersion sur $B(0,r(y_0)) \subset T_{y_0}X$, si $\frac{\sinh(\sqrt{k}||v||)}{\sqrt{k}||v||} < 2$ pour tout v avec $||v|| < r(y_0)$. Il suffit pour cela d'avoir :

$$(1) \quad \tfrac{\sinh(10^{-a})}{10^{-a}} < 2.$$

Par ailleurs, on cherche une valeur de la constante a pour qu'on ait l'encadrement :

$$(\star\star) \qquad \tfrac{1}{2}\omega_0 \leq \mathrm{exp}_{y_0}^\star\omega \leq 2\omega_0, \qquad \text{sur la boule } B(0,r(y_0)) \text{ de } T_{y_0}X.$$

Pour avoir cet encadrement, il suffit d'avoir :

$$\tfrac{1}{2} \leq ||T_v\mathrm{exp}_{y_0}|| \leq 2$$

pour tout $v \in T_{y_0}X$ avec $||v|| < r(y_0)$. On déduit de $(\star)$ que :

$$2 - \tfrac{\sinh(\sqrt{k}||v||)}{\sqrt{k}||v||} \leq ||T_v\mathrm{exp}_{y_0}|| \leq \tfrac{\sinh(\sqrt{k}||v||)}{\sqrt{k}||v||},$$

pour tout $v \in T_{y_0}X, ||v|| < r(y_0)$. Ceci montre qu'il suffit d'avoir $\frac{\sinh(\sqrt{k}||v||)}{\sqrt{k}||v||} \leq \frac{3}{2}$, pour tout v tel que $||v|| < r(y_0) = \frac{10^{-a}}{\sqrt{k}}$. L'encadrement $(\star\star)$ est donc garanti dès que la constante a vérifie l'inégalité :

$$(2) \quad \tfrac{\sinh(10^{-a})}{10^{-a}} \leq \tfrac{3}{2}.$$

En résumé, on a démontré le

Lemme 1.0.6.1 *Pour un choix de la constante $a > 0$ qui vérifie l'inégalité* (2) *et pour* $r(y_0)$ *défini par la relation* (0.6.1), *l'exponentielle* $\Phi = \exp_{y_0}$ *est une immersion et l'encadrement* $(\star\star)$ *a lieu, sur la boule* $B(0,r(y_0))$ *de l'espace tangent* $T_{y_0}X$.

Le lemme 1.0.4.1 montre qu'il existe des coordonnées locales holomorphes $\zeta = (\zeta', \zeta'')$, $\zeta' = (\zeta_1, \ldots, \zeta_r)$, $\zeta'' = (\zeta_{r+1}, \ldots, \zeta_n)$ sur la boule $B(0, r) \subset T_{y_0}X$ telles que la sous-variété $\Phi^{-1}(Y \cap B(y_0, r)) \subset B(0, r)$ est définie par les équations $\zeta' = 0$, pour le rayon

$$r = \rho(y_0) = \frac{1}{6\,||Ds_{y_0}^{-1}||_{\omega_0} \sup\limits_{\xi}(||(D^2 s_\xi||_{\omega_0} + ||Ds_\xi||_{\omega_0})}.$$

De plus, l'encadrement $(\star\star)$ implique que :

$$r \geq \frac{1}{24\,||Ds_{y_0}^{-1}||_{\omega} \sup\limits_{\xi}(||D^2 s_\xi||_{\omega} + ||Ds_\xi||_{\omega})} \eqqcolon r_0(y_0).$$

Dans les expressions ci-dessus, tous les $\sup\limits_{\xi}$ sont calculés sur les $\xi \in B(y_0,r(y_0))$. Notons dorénavant :

(0.6.2) $\qquad r_1(y_0) = \min(r(y_0), r_0(y_0)).$

Rappelons que $F_{k-1} \in H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L)$ est le prolongement du jet $f \in H^0(X, \Lambda^n T_X^\star \otimes L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$ à l'ordre $k-1$, donné par l'hypothèse de récurrence du théorème 1.0.1.4 (cf. le début de 1.0.3). Le fibré en droites holomorphe $L' \coloneqq \Lambda^n T_X^\star \otimes L$ est muni d'une métrique hermitienne C^∞ h. Considérons le fibré en droites C^∞ $\Phi^\star L'$ muni de la métrique $\phi^\star h$ et la section $\Phi^\star F_{k-1} \in C^\infty(T_{y_0}X, \Phi^\star L')$.

Soit $J_X \in \mathrm{End}(T_X)$ la structure complexe de la variété X et $J \coloneqq \Phi^\star J_X$ la structure presque complexe induite sur $T_{y_0}X$. Si J_0 est la structure complexe canonique de $T_{y_0} \simeq \mathbb{C}^n$, l'application Φ n'est pas (J_0,J_X)-holomorphe, mais elle est (J,J_X)-holomorphe. Si $i\Theta(L')$ est la forme de courbure (de type $(1,1)$) de (L', h), $\Phi^\star(i\Theta(L'))$ est une forme de type $(1,1)$, pour J, sur $T_{y_0}X$.

Lemme 1.0.6.2 *Il existe une fonction réelle* $\tilde{\varphi} \in C^\infty$ *sur la boule* $B = B(0, r_1(y_0))$ *de l'espace tangent* $T_{y_0}X$ *telle que* $i\partial_J\bar{\partial}_J\tilde{\varphi} = \Phi^\star(i\Theta(L'))$ *et*

$$\sup_B |\tilde{\varphi}| \leq C \sup_B ||\Phi^\star(i\Theta(L'))||,$$

où $C > 0$ *est une constante qui ne dépend que de* $r_1(y_0)$.

Démonstration. Dans des coordonnées réelles $x_1, \ldots, x_{2n}$ sur B, la 2-forme réelle d-fermée $\Phi^\star(i\Theta(L'))$ s'écrit : $\Phi^\star(i\Theta(L')) = \sum\limits_{i<j} v_{ij}\, dx_i \wedge dx_j$, pour des fonctions $v_{ij} \in C^\infty(B)$. Le lemme de Poincaré donne la formule explicite :

$$U(x) = \sum_{i<j} \left(\int_0^1 t\, v_{ij}(tx)\, dt \right) (x_i\, dx_j - x_j\, dx_i),$$

pour une solution C^∞ de l'équation $dU = \Phi^\star(i\Theta(L'))$ sur B. On voit que :

$$||U||_{L^\infty(B)} \leq C_1\, ||\Phi^\star(i\Theta(L'))||_{L^\infty(B)},$$

avec une constante $C_1 > 0$ qui dépend uniquement du rayon de B. Par rapport à la structure presque complexe J, la 1-forme réelle U se décompose en $U = U^{1,0} + U^{0,1}$, avec $U^{0,1} = \overline{U^{1,0}}$. Alors $dU = \partial_J U^{0,1} + \overline{\partial_J U^{0,1}}$, car dU est de type $(1,1)$ pour J. La structure presque complexe J est intégrable, comme image réciproque d'une structure presque complexe intégrable. Soit $(z_1,\ldots,z_n)$ des coordonnées J-holomorphes complexes, centrées en 0, sur un voisinage de la boule $B \subset T_{y_0}X$. On a, bien sûr, $\bar\partial_J U^{0,1} = 0$ sur B. Grâce à l'encadrement $(\star\star)$ reliant les métriques ω et ω_0, on peut supposer que la boule B est J-pseudoconvexe (sinon, on multiplie le rayon $r_1(y_0)$ par une constante fixe). Comme pour une structure presque complexe intégrable on a le même formalisme que pour une structure analytique complexe, un résultat classique sur la résolubilité de l'opérateur $\bar\partial$ dans des domaines strictement pseudoconvexes bornés à bord C^2 de $\mathbb{C}^n$ (voir, par ex, [HL84], théorème 2.3.5.), donne l'existence d'une constante $C_2 > 0$ ne dépendant que du rayon de la boule B et d'une solution de l'équation $\bar\partial_J v = U^{0,1}$ sur B obtenue explicitement par une formule intégrale, telle que :

$$||v||_{L^\infty(B)} \leq C_2\, ||U^{0,1}||_{L^\infty(B)} \leq 2C_2\, ||U||_{L^\infty(B)}.$$

Alors $\tilde\varphi \coloneqq i(\bar v - v)$ est la fonction recherchée. □

Comme ϕ est une immersion sur $B(0,r_1(y_0))$, il existe $V \subset B(0,r_1(y_0))$, voisinage de 0, tel que ϕ réalise un difféomorphisme de V sur un voisinage U de y_0 dans X. Soit $\psi : U \to V$ le difféomorphisme inverse. Dans une trivialisation locale de L' au voisinage de y_0, la section F_{k-1} s'écrit : $F_{k-1} = u \otimes e$, avec un repère local holomorphe e. La fonction $v = u \circ \Phi$ est alors C^∞ sur V et l'holomorphie de u entraîne : $\bar\partial(v \circ \psi) = 0$. Si $z = (z_1,\ldots,z_n)$ est un système de coordonnées locales holomorphes sur U, ceci signifie que v est solution du système elliptique suivant :

$$(\star\star\star) \qquad \sum_j \frac{\partial v}{\partial \zeta_j} \circ \psi \, \frac{\partial \psi_j}{\partial \bar z_k} + \sum_j \frac{\partial v}{\partial \bar\zeta_j} \circ \psi \, \frac{\partial \bar\psi_j}{\partial \bar z_k} = 0, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Nous rappelons maintenant un résultat standard de théorie des opérateurs différentiels. Il s'agit du lemme de Gårding qui donne un contrôle de la croissance des dérivées d'une solution d'une équation elliptique en fonction de la croissance de cette solution. Ce résultat joue le rôle des inégalités de Cauchy dans le cas non holomorphe. On désigne par H_j^{loc} l'espace de Sobolev des fonctions localement L^2 dont toutes les dérivées au sens des distributions jusqu'à l'ordre j sont encore localement L^2, et par $||\ ||_j$ sa norme de Sobolev. Nous renvoyons pour des détails à [Agm65] (lemme 6.1 et théorèmes 6.2-6.7, pag. 53-67).

Théorème 1.0.6.3 *(théorème 6.5 de [Agm65]) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A_1(x,D)$, $\ldots,A_N(x,D)$ des opérateurs différentiels d'ordres $m_1,\ldots,m_N$ respectivement, à coefficients $a^i_\alpha \in C^\infty$, formant un système elliptique dans Ω. Soit $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tel que $A_i^\star u \in H_{k_i}^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pour tout $i = 1,\ldots,N$.*

Si $j \coloneqq \min(m_1 + k_1,\ldots,m_N + k_N)$, alors $u \in H_j^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. De plus, pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$, il existe $\gamma = \gamma(A_i,\Omega',\Omega)$ tel que :

$$||u||_{j,\Omega'} \leq \gamma\, (\sum_{i=1}^N |A_i^\star u|_{k_i,\Omega} + ||u||_{0,\Omega}),$$

où la constante $\gamma = \mathrm{Const}\, pNKM$, Const *étant une constante universelle,* $p = p(n,l) = \mathrm{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^n \| |\alpha| = l\}$, $K = \sup_{\xi\in\Omega',\, |\alpha|\leq l, i} |da^i_\alpha(\xi)|$, $M = \sup_{x\in\Omega',\, |\alpha|\leq l, i} |a^i_\alpha(x)|$.

Dans [Agm65] la dépendance de la constante γ des données du problème n'est pas explicitée, mais elle se déduit facilement des démonstrations des théorèmes $6.2 - 6.7$. Aussi, l'énoncé y est donné dans un contexte légèrement plus général où les coefficients des opérateurs $A_i(x,D)$ sont seulement supposés "s-lisses".

Comme v est solution du système elliptique $(\star\star\star)$, le théorème précédent montre qu'on a l'estimation :

$$\sup_{||\zeta''||\leq \frac{1}{2}r_1(y_0)} \sum_{|\alpha|=k} \left|\frac{\partial^\alpha v}{\partial \zeta'^\alpha}(0,\zeta'')\right|^2 \leq \gamma_k \int_{B(0,\, r_1(y_0))} |v(\zeta',\zeta'')|^2\, d\,\lambda(\zeta',\zeta''),$$

où $\gamma_k = \mathrm{Const}\, p_k \max(\sup_{\xi\in U} ||d_\xi \psi||, \sup_{\xi\in U} ||d^2_\xi\psi||)$, $p_k = \mathrm{Card}\{\alpha|\, |\alpha| = k\}$ et Const est une constante universelle. Pour les normes suivantes calculées dans le fibré hermitien $(\Phi^\star L', \Phi^\star h)$ avec le poids local $\tilde{\varphi}$:

$$\left|\left|\tfrac{\partial^\alpha v}{\partial \zeta'^\alpha}(0,\zeta'')\right|\right|^2 = \left|\tfrac{\partial^\alpha v}{\partial \zeta'^\alpha}(0,\zeta'')\right|^2 e^{-2\tilde{\varphi}(0,\,\zeta'')}, \qquad ||v(\zeta',\zeta'')||^2 = |v(\zeta',\zeta'')|^2\, e^{-2\tilde{\varphi}(\zeta',\,\zeta'')},$$

on obtient l'estimation :

$$\int_{||\zeta''||\leq \frac{1}{2}r_1(y_0)} \sum_{|\alpha|=k} \left|\left|\frac{\partial^\alpha v}{\partial \zeta'^\alpha}(0,\zeta'')\right|\right|^2 d\,\zeta'' \leq \gamma_k \int_{B(0,\, r_1(y_0))} ||v(\zeta',\zeta'')||^2\, e^{2(\tilde{\varphi}(\zeta',\zeta'')-\tilde{\varphi}(0,\zeta''))}\, d\,\lambda(\zeta',\zeta''),$$

et encore, grâce au lemme 1.0.6.2,

$$(3) \qquad \int_{||\zeta''||\leq \frac{1}{2}r_1(y_0)} \sum_{|\alpha|=k} \left|\left|\frac{\partial^\alpha v}{\partial \zeta'^\alpha}(0,\zeta'')\right|\right|^2 d\,\zeta'' \leq \gamma_k\, C_{L'} \int_{B(0,\, r_1(y_0))} ||v(\zeta',\zeta'')||^2\, d\,\lambda(\zeta',\zeta''),$$

où la constante $C_{L'} \coloneqq e^{2C \sup_U ||i\Theta(L')||}$ ne dépend que de la croissance de la courbure de L'.

Il nous reste à déduire de l'estimation (3) pour v une estimation analogue pour u. Si z est la variable sur $U \subset X$ et ζ est la variable sur $V \subset T_{y_0}X$, le changement de variable $\zeta = \psi(z)$ entraîne l'estimation suivante pour u :

$$(4) \qquad ||u||^2_{k,\,U'\cap Y} \leq \tilde{\gamma}_k\, C_{L'}\, ||u||^2_{0,\,U}, \qquad U' \subset\subset U,$$

où $\tilde{\gamma}_k = \mathrm{Const}\, p_k \sup_{\substack{1\leq l\leq k \\ \xi\in U}} ||d^l_\xi\psi||$, Const étant une constante universelle.

La proposition 3 nous a déjà donné une estimation de la norme de la différentielle de ϕ et donc implicitement de la différentielle de ψ. La formule obtenue pour $\tilde{\gamma}_k$ exige également une estimation de la croissance des différentielles d'ordre $\leq k$ de ψ. Il est clair que $\sup_{\substack{1\leq l\leq k \\ \xi\in U}} ||d^l_\xi\psi||$ est majoré par une constante ne dépendant que du rayon $r_1(y_0)$ de la boule sur laquelle on se place. Nous avons rejeté les calculs, qui ne sont pas très intéressants, dans l'annexe B.

Nous pouvons conclure maintenant que la constante $C_r^{(k)}$ de l'énoncé du théorème 1.0.1.4 ne dépend que de r, de k, de E et de $\sup_\Omega ||i\Theta(L)||$.

1.0.7 Le cas d'une sous-variété singulière

Un argument standard montre que la restriction imposée au début du paragraphe 1.0.3 sur l'ensemble des singularités $\Sigma = \{s = 0, \Lambda^r(ds) = 0\}$ de Y d'être vide est inutile. En fair, l'hypothèse faite sur $s \in H^0(X, E)$ d'être génériquement transverse à la section nulle signifie que l'ensemble Σ est rare dans $\overline{Y}$. On peut toujours trouver une hypersurface complexe $Z \subset X$ telle que $\Sigma \subset \overline{Y} \cap Z \subsetneq \overline{Y}$. Si la variété ambiante X est de Stein, il est bien connu que le complémentaire d'une hypersurface est aussi de Stein. On peut alors appliquer le théorème 1.0.1.4 à la variété de Stein $X \setminus Z$ et utiliser le lemme 1.0.3.1 pour effectuer un prolongement à travers Z, ce que les estimations L^2 obtenues autorisent. Dans le cas général d'une variété ambiante X faiblement pseudoconvexe, on peut appliquer le cas Stein sur des boules de coordonnées U_j pour construire des prolongements holomorphes locaux $\tilde{f}_j$ du jet f satisfaisant des estimations $\int_{U_j} |\tilde{f}_j|^2 |s|^{-2r}(-\log|s|)^{-2}\, dV < +\infty$, et on pose $\tilde{f}_\infty = \sum_j \theta_j\, \tilde{f}_j$, avec une partition de l'unité $(\theta_j)_j$.

Annexe A : Démonstration du lemme 1.0.4.1

On peut supposer $a = 0$ et $E = F$. Considérons la fonction $g : U \to E$,

$$g(x) = df_a^{-1}[f(a + x) - f(a)].$$

Alors, $g(0) = 0$ et $dg_0 = \mathrm{Id}_E$. Comme g est de classe C^1, il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset U$ et pour tout $x \in B(0,r)$, on a :

(1) $||dg_x - dg_0|| = ||dg_x - \mathrm{Id}_E|| \leq \frac{1}{2}$, pour tout $x \in B(0,r)$.

Le rayon r peut être estimé à l'aide du théorème des accroissements finis. En fait :

$$||dg_x - dg_0|| \leq (\sup_{\xi \in U} ||d^2\xi||)\, ||x|| \leq r \sup_{\xi \in U} ||d^2 g_\xi||,$$

pour tout $x \in B(0,r)$. Il suffit donc de prendre $r = \dfrac{1}{2 \sup_{\xi \in U} ||d^2 g_\xi||}$, pour que la propriété (1) soit vérifiée sur $B(0,r)$. Comme $||dg_x|| - ||dg_0|| \leq ||dg_x - dg_0||$, on obtient aussi $||dg_x|| \leq \frac{3}{2}$, pour tout $x \in B(0,r)$.

La démonstration du théorème d'inversion locale montre que l'ouvert V sur lequel g est un difféomorphisme sur l'image est donné par :

$$V = g^{-1}(B(0,\tfrac{r}{2})) \cap B(0,r).$$

Alors $g_{|V} : V \to B(0,\frac{r}{2})$ est un difféomorphisme. Il faut donc estimer le diamètre de cet ouvert V. Pour $x,y \in V$ quelconques on a :

$||g(x)-g(y)|| \leq (\sup_{\xi\in B(0,r)} ||dg_\xi||)\, ||x-y|| \leq \frac{3}{2}||x-y||.$

En prenant le sup sur $x,y \in U$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\,\tfrac{r}{2} = \sup_{u,v\in B(0,\frac{r}{2})} ||u-v|| = \sup_{x,y\in V} ||g(x)-g(y)|| &\leq \tfrac{3}{2} \sup_{x,y\in V} ||x-y|| \\ &\leq \tfrac{3}{2}\, 2 \,\mathrm{rayon}(V), \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{rayon}(V) \geq \frac{r}{3} = \frac{1}{6\sup\limits_{\xi\in U} ||d^2 g_\xi||}.$$

Revenons maintenant à f. La définition de g implique immédiatement les identités suivantes:

$dg_x = df_a^{-1} \circ df_{a+x} \qquad$ et $\qquad d^2 g_x = df_a^{-1} \circ d^2 f_{a+x},$

d'où $\;||d^2 g_x|| \leq ||df_a^{-1}||\, ||d^2 f_{a+x}||$ et

$\sup\limits_{\xi\in U} ||d^2 g_\xi|| \leq ||df_a^{-1}|| \sup\limits_{\xi\in U} ||d^2 f_\xi||, \qquad$ (car a est supposé nul).

On obtient finalement :

$$\mathrm{rayon}(V) \geq \frac{1}{6(||df_a^{-1}||)\,(\sup\limits_{\xi\in U} ||d^2 f_\xi||)}.$$

$\square$

Annexe B : Contrôle des différentielles supérieures de Φ

Proposition 1.0.7.1 *S'il existe une constante $k > 0$ telle que*

$-k \leq K(p,P) \leq k,$

pour tout point $p \in M$ et tout plan $P \subset T_pM$, alors :

$||d_x^2\phi|| \leq \frac{1}{||x||}\,(\cosh(\sqrt{k}||x||) - \frac{\sin(\sqrt{k}||x||)}{\sqrt{k}||x||}),$

pour tout $x \in T_mM$.

Démonstration. La preuve s'obtient facilement de celle de la proposition 1.0.5.2. En dérivant l'expression $(d_{tu}\phi)(tv) = Y(t)$ par rapport à t, on obtient :

$(d_{tu}^2\phi)(tu,tv) = tY'(t) - Y(t),$

pour tout t. Ensuite, pour la fonction v considérée dans le lemme 1.0.5.1, on obtient facilement l'encadrement :

$A\cos(\sqrt{k}t) \leq v'(t) \leq A\cosh(\sqrt{k}t), \quad \forall t \in [0,T].$

Il ne reste plus qu'à appliquer à Y l'estimation obtenue pour v avant de conclure. $\square$

Des dérivations successives en t de l'expression de $(d^2_{tu}\phi)(tu,tv)$ ci-dessus donnent l'identité suivante pour les différentielles d'ordre supérieur de ϕ :

$$(2) \qquad (d^p_{tu}\phi)(tu,\ldots,tu,tv) = \sum_{l=0}^{p-1}(-1)^l \tfrac{(p-1)!}{(p-l-1)!}t^{p-l-1}Y^{(p-l-1)}(t),$$

pour tout $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$. L'argument tu est itéré $(p-1)$ fois. Par conséquent, une estimation de $||d^p_{tu}\phi||$ sera obtenue dès que l'on aura estimé les dérivées successives de Y. Rappelons que Y vérifie l'équation :

$$Y'' + R(c',Y)c' = 0$$

où on a noté $c = \gamma_u$ la géodésique issue de $u \in T_{y_0}X$. Une dérivation de cette équation par rapport à l'argument t entraîne :

$$Y^{(3)} + (\nabla R)(c',Y)c' + R(c',Y')c' = 0,$$

car $c'' = D_{c'}c' = 0$, c étant une géodésique. En itérant cette dérivation on obtient facilement, par récurrence, l'expression :

$$(3) \qquad Y^{(p+2)} + \sum_{l=0}^{p}\tbinom{p}{l}(\nabla^l R)(c',Y^{(p-1)})c' = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1.$$

Par définition de $r_1(y_0)$ on a :

$$||\nabla^l R|| < \tfrac{10^{-2a}}{r_0^{2+l}} = \tfrac{k}{r_0^l} = \tfrac{k^{1+\frac{l}{2}}}{10^{-al}},$$

sur $B(y_0,r_1(y_0))$, pour tout $l = 0,\ldots,m$. Les relations (3) montrent que l'estimation des dérivées de Y se ramène à une estimation des dérivées d'une fonction v comme dans le lemme 1.0.5.1, vérifiant de plus les inégalités suivantes :

$$(4) \qquad -\sum_{l=0}^{p}\tbinom{p}{l}\tfrac{k^{1+\frac{l}{2}}}{10^{-al}}\,v^{(p-l)} \leq v^{(p+2)} \leq \sum_{l=0}^{p}\tbinom{p}{l}\tfrac{k^{1+\frac{l}{2}}}{10^{-al}}\,v^{(p-l)},$$

pour tout $p = 0,\ldots,m$. Pour $p = 0$ cette condition est celle du lemme 1.0.5.1. Sa démonstration nous a déjà donné les estimations suivantes pour v, v' et v'' :

$$\begin{array}{lcl}
A\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\sqrt{k}t) & \leq & v(t) \leq A\frac{1}{\sqrt{k}}\sinh(\sqrt{k}t), \\
A\cos(\sqrt{k}t) & \leq & v'(t) \leq A\cosh(\sqrt{k}t), \\
-A\sqrt{k}\sinh(\sqrt{k}t) & \leq & v''(t) \leq A\sqrt{k}\sinh(\sqrt{k}t).
\end{array}$$

En faisant $p = 1$ dans les relations (4) on obtient l'encadrement :

$$-kv' - \tfrac{k^{\frac{3}{2}}}{10^{-a}}\,v \leq v^{(3)} \leq kv' + \tfrac{k^{\frac{3}{2}}}{10^{-a}},$$

et les estimations obtenues pour v et v' entraînent l'estimation suivante pour $v^{(3)}$:

$$-Ak(\cosh(\sqrt{k}t) + 10^a\sinh(\sqrt{k}t)) \leq v^{(3)}(t) \leq Ak(\cosh(\sqrt{k}t) + 10^a\sinh(\sqrt{k}t)).$$

Les relations (4), pour $p=2$, deviennent :

$$-kv'' - 2\frac{k^{\frac{3}{2}}}{10^{-a}}v' - \frac{k^2}{10^{-2a}}v \leq v^{(4)} \leq kv'' + 2\frac{k^{\frac{3}{2}}}{10^{-a}}v' + \frac{k^2}{10^{-2a}}v.$$

Les estimations obtenues précédemment pour v,v',v'' entraînent l'estimation suivante pour $v^{(4)}$:

$$|v^{(4)}(t)| \leq Ak^{\frac{3}{2}}((1+10^{2a})\sinh(\sqrt{k}t) + 2\,10^a\cosh(\sqrt{(}kt)).$$

Une récurrence sur p entraîne finalement, grâce aux inégalités (4), l'estimation suivante pour tout $l = 0,\ldots,m$:

$$|v^{(l)}(t)| \leq Ak^{\frac{l-1}{2}}(P_1(l)\ \sinh(\sqrt{k}t) + P_2(l)\ \cosh(\sqrt{k}t)),$$

où $P_1(l) = 10^{(l-2)a} + 10^{(l-4)a} + s$ est un polynôme de degré $l-2$ en 10^a et $P_2(l) = (l-2)10^{(l-3)a} + s$ est un polynôme de degré $l-3$ en 10^a. Il existe, pour chaque l, un $M(l)$ tel que :

$P_1(l) \leq M(l)(10^{(l-2)a} + 10^{(l-4)a} + \cdots)$ et

$P_2(l) \leq 10^{-a}M(l)(10^{(l-2)a} + 10^{(l-4)a} + \cdots)$. Ceci implique :

$$|v^{(l)}(t)| \leq A\tilde{M}(l)k^{\frac{l-1}{2}}(\sinh(\sqrt{k}t) + 10^{-a}\cosh(\sqrt{k}t)), \text{ pour tout } l,$$

où on a noté $\tilde{M}(l) = M(l)(10^{(l-2)a} + 10^{(l-4)a} + \cdots)$.

En vue de l'estimation de $||d^p_{tu}\phi||$, en tenant compte de l'égalité (2), on obtient finalement :

$$\sum_{l=0}^{p-1}(-1)^l\frac{(p-1)!}{(p-l-1)!}t^{p-l-1}v^{(p-l-1)}(t) \leq$$
$$\leq A\sum_{l=0}^{p-1}\frac{(p-1)!}{(p-l-1)!}t^{p-l-1}k^{\frac{p-l-2}{2}}\tilde{M}(p-l-1)(\sinh(\sqrt{k}t) + 10^{-a}\cosh(\sqrt{k}t))$$

et

$$\begin{aligned} ||d^p_{tu}\phi|| &\leq \sum_{l=0}^{p-1}\frac{(p-1)!}{(p-l-1)!}\tilde{M}(p-l-1)\frac{\sinh(\sqrt{k}t)+10^{-a}\cosh(\sqrt{k}t)}{t^{l+1}} \\ &\leq M(p)\sum_{l=0}^{p-1}(\frac{1}{t^{l+1}})(\sinh(\sqrt{k}t) + 10^{-a}\cosh(\sqrt{k}t)) \\ &= M(p)\frac{1-t^p}{(1-t)t^p}(\sinh(\sqrt{k}t) + 10^{-a}\cosh(\sqrt{k}t)) \end{aligned}$$

En posant $x = tu$, on a $||x|| = t||u|| = t$. Ceci donne l'estimation :

$$(5) \qquad ||d^p_x\phi|| \leq M(p)\frac{1-||x||^p}{(1-||x||)||x||^p}(\sinh(\sqrt{k}||x||) + 10^{-a}\cosh(\sqrt{k}||x||)),$$

pour tout $x \in T_{y_0}X$ et tout $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$.

Chapitre 2

Une preuve simple d'un résultat d'Uhlenbeck et Yau

Un sous-fibré d'un fibré hermitien (E, h) peut être défini par la projection orthogonale sur ce sous-fibré. Un sous-fibré faiblement holomorphe d'un fibré holomorphe hermitien sera par définition une projection orthogonale π qui est dans l'espace de Sobolev L_1^2 des sections L^2 ayant leurs dérivées dans L^2 et qui vérifie de plus $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0$. Nous redémontrons ici qu'un sous-fibré faiblement holomorphe de (E, h) définit un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}(E)$, c'est-à-dire un sous-fibré holomorphe de E en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2. Ce résultat est un point technique essentiel dans la démonstration d'Uhlenbeck et Yau de la correspondance de Kobayashi-Hitchin au-dessus de variétés kählériennes compactes. Nous donnons une preuve beaucoup plus simple de ce résultat en utilisant des techniques L^2. L'idée est de construire des sections locales méromorphes de $\mathrm{Im}\,\pi$ qui engendrent localement les fibres. Nous faisons d'abord la construction sur toute sous-variété de dimension 1 de X et l'étendons ensuite à l'aide d'un théorème de type Hartogs dû à Shiffman.

2.0.8 Introduction

Soit (E, h) un fibré vectoriel holomorphe de rang r muni d'une métrique hermitienne C^∞ sur une variété kählériennne compacte X et soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(E)$ un sous-faisceau analytique cohérent du faisceau localement libre $\mathcal{O}(E)$ associé à E. Le faisceau $\mathcal{F}$ est sans torsion, comme sous-faisceau cohérent d'un faisceau sans torsion. Il est classique qu'un faisceau cohérent sans torsion est localement libre dans le complémentaire d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2 (voir, par exemple, [Kob87], V.5). Ceci permet de voir $\mathcal{F}$ comme un fibré avec singularités. Plus précisément, il existe un sous-ensemble analytique $S \subset X$, $\operatorname{codim} S \geq 2$, et un fibré holomorphe F sur $X \setminus S$, tels que :

$$\mathcal{F}_{X \setminus S} = \mathcal{O}(F).$$

Comme $\mathcal{F}_{X\setminus S} \hookrightarrow \mathcal{O}(E_{|X\setminus S})$ est un sous-faisceau analytique de $\mathcal{O}(E_{|X\setminus S})$, $F \hookrightarrow E_{|X\setminus S}$ est un sous-fibré vectoriel holomorphe de $E_{|X\setminus S}$. Munissons le sous-fibré F de la métrique hermitienne déduite de h et considérons la projection orthogonale $\pi : E_{|X\setminus S} \longrightarrow F$. Alors

π peut être vu comme une section C^∞ sur $X \setminus S$ du fibré vectoriel holomorphe $\operatorname{End} E$ satisfaisant les relations :

$$(0.1) \qquad \pi = \pi^\star = \pi^2, \qquad (\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0$$

sur $X \setminus S$, où D'' désigne la partie de type $(0,1)$ de la connexion de Chern sur $\operatorname{End} E$ associée à la métrique déduite de h. La dernière relation exprime le fait que la structure holomorphe de F est la restriction de la structure holomorphe de $E_{|X\setminus S}$. Soit Q le fibré quotient de $E_{|X\setminus S}$ par F et considérons la suite exacte de fibrés holomorphes sur $X \setminus S$:

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E_{|X\setminus S} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

On munit Q de la métrique quotient déduite de h, et on considère aussi le fibré en droites déterminant $\operatorname{dét} Q$ muni de la métrique induite par la métrique de Q. Sa forme de courbure $i\Theta(\operatorname{dét} Q) = \operatorname{Tr}_Q(i\Theta(Q)) = \operatorname{Tr}_E(i\Theta(Q))$ est une $(1,1)$-forme C^∞ semi-positive sur $X \setminus S$ donnée par la formule :

$$i\Theta(\operatorname{dét} Q) = \operatorname{Tr}_E(i\Theta_h(E)_{|Q}) + \operatorname{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi), \qquad \text{(voir (2.5))}.$$

Comme $\operatorname{codim} S \geq 2$, la $(1,1)$-forme C^∞ $\operatorname{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi)$ est de masse localement finie au voisinage de S. En d'autres termes, tout $x \in S$ admet un voisinage $U \subset X$ tel que :

$$\int_U \operatorname{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi) \wedge \omega^{n-1} < +\infty,$$

où ω est une métrique hermitienne quelconque sur X. Ceci résulte d'un résultat général de théorie des courants affirmant que si T est un courant positif fermé de bidegré (p,p) (ou de bidimension $(n-p, n-p)$) dans le complémentaire d'un sous-ensemble analytique A de codimension $\geq p+1$, alors la masse de T est localement finie au voisinage de A (voir [Sib85], p. 178, corollaire 3. 2).

Ceci montre en particulier que la $(1,1)$-forme $\operatorname{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi)$ prolongée par 0 sur S est L^1 sur X. Comme $|\operatorname{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi)|$ domine $|D'\pi|^2$ et $|D''\pi|^2$, les normes étant considérées dans les fibrés respectifs, on voit que $D'\pi$ et $D''\pi$ sont des 1-formes L^2 sur $X \setminus S$. Toute projection étant L^∞ et, par compacité de X, implicitement L^2, la projection π appartient à l'espace de Sobolev L^2_1 des sections L^2 de $\operatorname{End} E$ dont les dérivées premières au sens des distributions sont encore L^2.

Cette discussion est résumée par la

Remarque. *Tout sous-faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}(E)$ définit une section $\pi \in L^2_1(X, \operatorname{End} E)$ qui est C^∞ sur le complémentaire d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2 et qui vérifie les relations* (0.1).

L'objectif de ce travail est de redémontrer, par des méthodes relativement élémentaires, l'affirmation réciproque, énoncée et démontrée dans [UY 86, 89]. Plus précisément, nous démontrons le résultat suivant:

Théorème 2.0.8.1 *Soit (E,h) un fibré holomorphe de rang r muni d'une métrique hermitienne C^∞ au-dessus d'une variété complexe kählérienne compacte X et $\pi \in L_1^2(X, End\, E)$ tel que $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(Id_E - \pi) \circ D''_{\mathrm{End} E}\pi = 0$ presque partout.*

Alors il existe $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(E)$ sous-faisceau analytique cohérent de $\mathcal{O}(E)$ et $S \subset X$ sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 tels que:

1) $\pi_{|X\setminus S} \in C^\infty(X \setminus S, End\, E)$

2) $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(Id_E - \pi) \circ D''_{\mathrm{End}\, E}\pi = 0$, sur $X \setminus S$

3) $\mathcal{F}_{|X\setminus S} = \pi_{|X\setminus S}(E_{|X\setminus S}) \hookrightarrow E_{|X\setminus S}$ est un sous-fibré holomorphe de $E_{|X\setminus S}$.

Dans tout ce qui suit $L_1^2(X, \mathrm{End}\, E)$ désigne l'espace de Sobolev des sections L^2 du fibré holomorphe $\mathrm{End}\, E$ dont les dérivées d'ordre 1 sont aussi L^2. On considère sur $\mathrm{End}\, E$ la métrique déduite de h et on note $D''_{\mathrm{End}\, E}$ la partie de type (0,1) de la connexion de Chern associée.

Une section $\pi \in L_1^2(X, \mathrm{End}\, E)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1 sera appellée *sous-fibré faiblement holomorphe* de E.

Nous rappelons que si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sans torsion sur une variété kählérienne complexe compacte (X, ω) de dimension n, le *degré* de $\mathcal{F}$ est défini comme :

$$\deg(\mathcal{F}) = \int_X c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{n-1},$$

où $c_1(\mathcal{F})$ désigne la première classe de Chern de $\mathcal{F}$. Nous rappelons aussi que $c_1(\mathcal{F})$ est défini en toute généralité pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ comme $c_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathrm{dét}\, \mathcal{F})$, où $\mathrm{dét}\, \mathcal{F}$ est le fibré (en droites) déterminant associé à $\mathcal{F}$.
La *pente* de $\mathcal{F}$ est définie comme étant le rapport :

$$\mu(\mathcal{F}) = \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rang}\,(\mathcal{F})}.$$

Avec ces notations on dit, d'après Takemoto ([Tak73]), que $\mathcal{F}$ est *semi-stable* si pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}'$ avec $0 < \mathrm{rang}\, \mathcal{F}'$, on a :

$$\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F}).$$

Si de plus l'inégalité stricte :

$$\mu(\mathcal{F}') < \mu(\mathcal{F})$$

a lieu pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}'$ avec $0 < \text{rang}\mathcal{F}' < \text{rang}\mathcal{F}$, on dit que $\mathcal{F}$ est *stable*. Un fibré vectoriel holomorphe E sur X est dit semi-stable (resp. stable) si le faisceau des germes de sections holomorphes associé $\mathcal{O}(E)$ est semi-stable (resp. stable).

Nous rappelons aussi que si (E, h) est un fibré holomorphe hermitien de rang r sur une variété complexe hermitienne (X, ω), on dit que (E, h) est un *fibré d'Hermite-Einstein* s'il existe une constante réelle λ telle que :

$$\text{Tr}_\omega(i\Theta_h(E)) = \lambda \cdot \text{Id}_E,$$

où $\Theta(E)_h \wedge \cdot = D^2$ est la forme de courbure de (E, h) définie par la connexion de Chern D associée à la métrique hermitienne h.

Le théorème 2.0.8.1 est un point technique crucial dans la démonstration donnée par Uhlenbeck et Yau ([UY 86, 89]) du fait que tout fibré holomorphe stable au-dessus d'une variété kählérienne compacte porte une unique métrique d'Hermite-Einstein. Dans [UY 86, 89] les auteurs prouvent ainsi la correspondance de Kobayashi-Hitchin qui affirme grosso-modo l'équivalence entre les fibrés holomorphes d'Hermite-Einstein et les fibrés holomorphes semi-stables sur une variété kählérienne compacte. Que tout fibré d'Hermite-Einstein soit semi-stable et se scinde en une somme directe de fibrés stables avait déjà été démontré par Kobayashi et Lübke [Kob87, LT95].

La réciproque, beaucoup plus difficile, affirmant que tout fibré holomorphe stable sur une variété kählérienne compacte admet une unique métrique d'Hermite-Einstein, a été démontrée par Uhlenbeck et Yau [UY 86, 89]. L'idée de la démonstration est la suivante. La métrique h de E étant fixée, toute autre métrique h_1 de classe C^∞ sur E est de la forme :

$$h_1(s, t) = h(f(s), t),$$

pour toutes sections s et t de E, où $f \in C^\infty(X, \text{End}\, E)$ est un endomorphisme autoadjoint (par rapport à h) et défini positif de E. Alors h_1 est une métrique d'Hermite-Einstein si et seulement si f est solution d'une équation nonlinéaire aux dérivées partielles. Les auteurs considèrent une équation perturbée dépendant d'un paramètre ε qu'ils résolvent, obtenant une solution f_ε. Une des deux situations suivantes se produit. Ou bien f_ε converge vers un endomorphisme f_0 quand ε tend vers 0, auquel cas ils démontrent que f_0 définit en effet une métrique d'Hermite-Einstein, ou bien f_ε ne converge pas, auquel cas ils démontrent que l'hypothèse de stabilité sur E est violée en produisant un sous-faisceau déstabilisant de $\mathcal{O}(E)$. C'est dans la construction d'un tel sous-faisceau déstabilisant que le théorème 2.0.8.1 intervient de manière décisive.

La démonstration, extrêmement technique, n'est pas très instructive. C'est pourquoi on souhaite donner une démonstration plus naturelle du théorème 2.0.8.1, en construisant des sections locales méromorphes de $\text{Im}\,\pi$ qui engendrent localement les fibres. Le faisceau cohérent $\mathcal{F}$ que l'on cherche à construire sera défini par ses sections locales.

2.0.9 Rappels et préliminaires : cas C^∞

On commence par étudier le cas où π est une section C^∞ de $\operatorname{End} E$. Ceci est nécessaire pour fixer les idées et les notations, d'autant que c'est le cas auquel on sera amené a posteriori en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2.

Considérons donc la situation suivante. Soit (E, h) un fibré holomorphe hermitien et $\pi \in C^\infty(X, \operatorname{End} E)$ tel que $\pi = \pi^\star = \pi^2$. L'opérateur π est donc un morphisme C^∞ de fibrés de E dans lui-même. Soit D'' la connexion de type (0,1) qui représente la structure holomorphe de E. Ainsi D'' est une collection d'opérateurs

$$D'' : C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star X \otimes E) \to C^\infty(X, \Lambda^{p,q+1}T^\star X \otimes E),$$

pour tout (p, q).

Soit $F := \operatorname{Im} \pi \subset E$, sous-fibré C^∞ de E. Il est facile de voir que F est un sous-fibré holomorphe de E si et seulement si $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'' \circ \pi = 0$, ce qui équivaut à $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''_{\operatorname{End} E}\pi = 0$. Ceci exprime la condition que la restriction de D'' à $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T^\star X \otimes F)$ prend ses valeurs dans $C^\infty(X, \Lambda^{p,q+1}T^\star X \otimes F)$. Réciproquement, tout sous-fibré holomorphe F de E apparaît comme $\operatorname{Im} \pi$, pour une section $\pi \in C^\infty(X, \operatorname{End} E)$ satisfaisant les conditions $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''_{\operatorname{End} E}\pi = 0$. Ceci permet donc d'identifier un sous-fibré holomorphe d'un fibré holomorphe hermitien avec la projection orthogonale sur ce sous-fibré.

Supposons dorénavant que $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''_{\operatorname{End} E}\pi = 0$ et considérons le fibré holomorphe quotient $Q := E/F$ et la suite exacte de fibrés holomorphes :

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0,$$

où $j = \pi$ est l'inclusion de F dans E et $g = \mathrm{Id} - \pi$ est la projection de E sur Q. On munit F et Q des métriques induites par la métrique h de E et on considère $j^\star : E \longrightarrow F$ et $g^\star : Q \longrightarrow E$, les adjoints hilbertiens de j et de g par rapport à ces métriques. Ainsi $j^\star$ est donné par π et $g^\star$ est donné par $\mathrm{Id} - \pi$. Les morphismes j et g sont holomorphes, tandis que $j^\star$ et $g^\star$ sont C^∞. On a donc les relations suivantes:

$$D''_{\operatorname{Hom}(F,E)}j = 0 \Longleftrightarrow D''_{\operatorname{Hom}(F,E)}\pi = 0$$

$$D''_{\operatorname{Hom}(E,Q)}g = 0 \Longleftrightarrow D''_{\operatorname{Hom}(E,Q)}(\mathrm{Id} - \pi) = 0.$$

Il est bon de remarquer que $g^\star$ est un scindage C^∞ de la suite exacte, donc Q peut être vu comme un sous-fibré C^∞ de E. D'autre part, Q est muni d'une structure holomorphe (la structure holomorphe quotient) qui n'est pas, en général, la restriction de la structure holomorphe de E. En fait, la structure holomorphe de E se restreint à Q pour donner la structure holomorphe quotient de Q si et seulement si $\pi \circ D''\pi = 0$. Compte tenu de la propriété $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0$, ceci équivaut à $D''\pi = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Id} - \pi$ réalise un scindage holomorphe de la suite exate si et seulement si $D''\pi = 0$.

Dans le scindage C^∞, $E \simeq F \bigoplus Q$, la connexion de Chern de E se décompose en

$$(2.1) \qquad D_E = \begin{pmatrix} D_F & -\beta^\star \\ \beta & D_Q \end{pmatrix}$$

où D_F et D_Q sont les connexions de Chern de F et de Q et

$$\beta \in C^\infty(X, \Lambda^{1,0}T^\star X \otimes \mathrm{Hom}(F,Q)),\ \beta^\star \in C^\infty(X, \Lambda^{0,1}T^\star X \otimes \mathrm{Hom}(Q,F)).$$

La forme β est appelée la *deuxième forme fondamentale* de la suite exacte. Les formes β et $\beta^\star$ sont déterminées par les formules suivantes:

$$g^\star \circ \beta = D'_{\mathrm{Hom}(F,E)} j \Rightarrow \beta = g \circ D'_{\mathrm{Hom}(F,E)} j,$$

$$j \circ \beta^\star = -D''_{\mathrm{Hom}(Q,E)} g^\star \Rightarrow \beta^\star = -j^\star \circ D''_{\mathrm{Hom}(Q,E)} g^\star.$$

Notons dorénavant $D' = D'_{\mathrm{End}\,E}$ et $D'' = D''_{\mathrm{End}\,E}$. La remarque suivante nous sera utile dans les calculs.

Remarque 2.0.9.1 *Pour tout $\pi \in C^\infty(X, \mathrm{End}\,E)$ tel que $\pi = \pi^\star = \pi^2$, les égalités suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{array}{ll} (a)\ (\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0\,; & (b) \quad D'\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = 0 \\ (c)\ \pi \circ D'\pi = 0\,; & (d) \quad D''\pi \circ \pi = 0. \end{array}$$

Preuve. L'équivalence de (a) et de (b) s'obtient par passage aux adjoints, car $\pi = \pi^\star$. Par ailleurs, si on applique D' à l'égalité $\pi = \pi^2$ on obtient $D'\pi = D'\pi \circ \pi + \pi \circ D'\pi$, ce qui donne l'équivalence de (b) et de (c). L'égalité (d) est obtenue de (c) par passage aux adjoints. □

Ceci nous permet en particulier d'exprimer β et $\beta^\star$ en fonction de π. En fait, $g \circ D'_{\mathrm{Hom}(F,E)} j$ est égal en tout point de F à $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'\pi = D'\pi$, d'après la relation (c). De même, $-j^\star \circ D''_{\mathrm{Hom}(Q,E)} g^\star$ est égal en tout point de Q à $-\pi \circ D''(\mathrm{Id} - \pi) = \pi \circ D''\pi = D''\pi$, d'après la relation (a). Compte tenu des formules précédentes, on voit que les formes β et $\beta^\star$ sont déterminées par les égalités suivantes :

$$(2.2) \qquad D'\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad D''\pi = \begin{pmatrix} 0 & \beta^\star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, comme $D''\pi = 0$ est la condition pour que $\mathrm{Id} - \pi$ réalise un scindage holomorphe de la suite exacte, on retrouve ainsi le résultat classique affirmant que $\{\beta^\star\}$ dans $H^1(X, \mathcal{H}om(Q,F)) = H^{0,1}(X, \mathrm{Hom}(Q,F))$ est l'obstruction au scindage holomorphe de la suite exacte.

Il est connu que la courbure de E s'exprime par rapport au scindage C^∞ $E \simeq F \bigoplus Q$ comme :

$$(2.3) \qquad \Theta(E) = \begin{pmatrix} \Theta(F) - \beta^\star \wedge \beta & -D'_{\mathrm{Hom}(Q,F)}\beta^\star \\ D''_{\mathrm{Hom}(F,Q)}\beta & \Theta(Q) - \beta \wedge \beta^\star \end{pmatrix}$$

d'où les formes de courbure de F et de Q s'expriment par les formules:

$$(2.4) \qquad \Theta(F) = \Theta(E)_{|F} + \beta^\star \wedge \beta, \qquad \Theta(Q) = \Theta(E)_{|Q} + \beta \wedge \beta^\star,$$

où on a noté $\Theta(E)_{|F} = j^\star \circ \Theta(E) \circ j$ et $\Theta(E)_{|Q} = g \circ \Theta(E) \circ g^\star$.

Dans le cas particulier où $\Theta(E) = 0$, on voit que $\Theta(Q) = \beta \wedge \beta^\star$ et donc $i\Theta(\mathrm{dét} Q) = \mathrm{Tr}_Q(i\Theta(Q)) = \mathrm{Tr}_Q(i\beta \wedge \beta^\star)$. Les formules (2.2) entraînent :

$$(2.5) \qquad i\Theta(\mathrm{dét}\, Q) = \mathrm{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi),$$

car $i\beta \wedge \beta^\star$ est à valeurs dans End Q et donc $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star) = \mathrm{Tr}_Q(i\beta \wedge \beta^\star)$. De plus, la $(1,1)$-forme scalaire $\mathrm{Tr}_E(iD'\pi \wedge D''\pi)$ est d-fermée comme forme de courbure d'un fibré vectoriel holomorphe (identité de Bianchi).

Rappelons brièvement les notions de positivité de Griffiths [Gri66] et de Nakano [Nak55]. Pour un fibré holomorphe hermitien (E,h) sur une variété complexe X notons $\tilde{\Theta}(E)$ la forme hermitienne sur $TX \otimes E$ associée à la forme de courbure de Chern $\Theta(E)$.

Définition 2.0.9.2 *Le fibré vectoriel hermitien (E,h) est dit*

(a) positif (resp. semi-positif) au sens de Nakano si $\tilde{\Theta}(E)(\tau) > 0$ (resp. $\tilde{\Theta}(E)(\tau) \geq 0$) pour tout tenseur non nul $\tau \in TX \otimes E$.

(b) positif (resp. semi-positif) au sens de Griffiths si $\tilde{\Theta}(E)(\xi \otimes v) > 0$ (resp. $\tilde{\Theta}(E)(\xi \otimes v) \geq 0$) pour tout tenseur non nul décomposable $\xi \otimes v \in TX \otimes E$.

On écrit dans ce cas :

$\Theta >_{\mathrm{Griff}} (\geq_{\mathrm{Griff}})\, 0$, *et respectivement* $\Theta >_{\mathrm{Nak}} (\geq_{\mathrm{Nak}})\, 0$.

Les formes de courbure des fibrés F et Q satisfont alors les propriétés suivantes de positivité.

Proposition 2.0.9.3 *i)* $i\beta \wedge \beta^\star \geq_{\mathrm{Grif}} 0$;
ii) $i\beta^\star \wedge \beta \leq_{\mathrm{Nak}} 0$.

Preuve. Par rapport à des coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ sur X, les formes β et $\beta^\star$ s'écrivent:

$$\beta = \sum_j dz_j \otimes \beta_j, \text{ où } \beta_j \in \mathrm{Hom}(F, Q) \text{ et}$$

$$\beta^\star = \sum_j d\bar{z}_j \otimes \beta_j^\star, \text{ où } \beta_j^\star \in \mathrm{Hom}(Q, F) \text{ est l'adjoint hilbertien de } \beta_j.$$

On obtient $i\beta \wedge \beta^\star = i \sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes \beta_j \beta_k^\star$ et

$$i\beta^\star \wedge \beta = -\sum_j dz_j \wedge d\bar{z}_k \otimes \beta_k^\star \beta_j.$$

Pour les formes hermitiennes associées à $i\beta \wedge \beta^\star$ et à $i\beta^\star \wedge \beta$, notées de la même façon, on trouve:

$$i\beta \wedge \beta^\star(\xi \otimes s, \xi' \otimes s') = \sum_{j,k} \xi_j \bar{\xi}'_k \langle \beta_k^\star \cdot s, \beta_j^\star \cdot s' \rangle,$$

$$i\beta \wedge \beta^\star(\xi \otimes s, \xi \otimes s) = |\beta^\star \cdot (\xi \otimes s)|^2,$$

$$i\beta^\star \wedge \beta(\xi \otimes s, \xi' \otimes s') = -\sum_{j,k} \xi_j \bar{\xi}'_k \langle \beta_j \cdot s, \beta_k \cdot s' \rangle,$$

$$i\beta^\star \wedge \beta(u, u) = -|\beta \cdot u|^2,$$

ce qui prouve les inégalités i) et ii). □

2.0.10 Le cas général

La situation présente dans le théorème 2.0.8.1 est similaire à celle considérée au paragraphe précédent à ceci près que π n'est plus C^∞, mais seulement dans l'espace de Sobolev L_1^2 et que les propriétés que vérifie π, à savoir $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0$, ne sont satisfaites que presque partout. Comme π est une projection, elle est implicitement L^∞. On a donc :

$$\pi \in L_1^2(X, \mathrm{End}\, E) \cap L^\infty(X, \mathrm{End}\, E).$$

La dérivée $D''\pi$ est calculée au sens des distributions. Dans ce contexte $D''\pi$ est un (0,1)-courant sur X à valeurs dans $\mathrm{End}\, E$. Démontrer le théorème revient essentiellement à démontrer qu'en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension ≥ 2 on est ramené à la situation décrite précédemment.

Le fibré $F := \mathrm{Im}\, \pi$ est défini presque partout comme fibré L^2, à savoir la fibre F_x est définie comme $\mathrm{Im}\, \pi_x$ pour presque tous les points $x \in X$ et les matrices de transition dépendent de façon L^2 de x. De même, le fibré quotient Q est défini presque partout comme fibré L^2. Les formules mentionnées au paragraphe précédent pour β et $\beta^\star$ serviront de définitions cette fois-ci. Posons donc β et $\beta^\star$ le (1,0)-courant L^2 à valeurs dans $\mathrm{Hom}\,(F, Q)$, respectivement le (0,1)-courant L^2 à valeurs dans $\mathrm{Hom}\,(Q, F)$, déterminés de manière unique par les égalités :

$$D'\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad D''\pi = \begin{pmatrix} 0 & \beta^\star \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $D'\pi$ et $D''\pi$ sont calculés au sens des distributions. Le produit $\beta \wedge \beta^\star$ définit ainsi un $(1,1)$-courant L^1 à valeurs dans $\mathrm{End}\, E$.

On observe que les équivalences établies dans la remarque 2.0.9.1 restent valables dans ce contexte plus général, l'argument étant le même. On peut donc faire la

Remarque 2.0.10.1 *Pour tout $\pi \in L^2_1(X, \mathrm{End}\, E)$ tel que $\pi = \pi^\star = \pi^2$, les égalités suivantes au sens des courants sont équivalentes :*

$$\begin{array}{ll} (3.\,a)\ (\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0\,; & (3.\,b)\quad D'\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = 0 \\ (3.\,c)\ \pi \circ D'\pi = 0\,; & (3.\,d)\quad D''\pi \circ \pi = 0. \end{array}$$

Pour démontrer que le fibré $F = \mathrm{Im}\, \pi$ est holomorphe en dehors d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2, il suffit de construire des sections méromorphes locales de F qui engendrent F localement (car les sections méromorphes sont holomorphes dans le complémentaire d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2). Pour ce faire, l'idée est de construire des sections holomorphes locales de $F \otimes \mathrm{dét}\, Q$ qui engendrent $F \otimes \mathrm{dét}\, Q$ localement. Par ailleurs, nous construirons localement une section $\bar\partial$-fermée qui engendre $\mathrm{dét}\, Q$ localement. Une division des sections holomorphes locales de $F \otimes \mathrm{dét}\, Q$ par la section locale de $\mathrm{dét}\, Q$ produira les sections méromorphes voulues de F.

Dans la construction d'une section holomorphe locale de $\mathrm{dét}\, Q$ le (1,1)-courant $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + i\Theta(E)_{|Q})$, qui sera a posteriori le courant de courbure de $\mathrm{dét}\, Q$ dans la métrique déduite de la métrique quotient de Q, joue un rôle essentiel. On note, comme d'habitude, $i\Theta(E)_{|Q} = (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi)$.

Faisons maintenant l'observation suivante.

Remarque 2.0.10.2 *La restriction du courant $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi))$ à presque toute droite complexe contenue dans un domaine de carte de X définit un courant d-fermé.*

Démonstration. L'argument est presque trivial. L'existence d'une restriction d'une fonction L^1 à presque toute droite résulte du théorème de Fubini (avec une restriction qui est L^1 sur cette droite). Pour le voir, on commence par considérer un système de droites parallèles à une direction donnée. Maintenant, tout courant de bidegré maximal est fermé. En particulier, les courants de bidegré $(1,1)$ sont fermés sur les sous-variétés complexes de dimension 1. □

En vue du théorème 2.0.8.1, le problème étant local, on peut raisonner sur un ouvert $U \subset X$ tel que $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}^r$. Quitte à rétrécir U, la courbure de E peut être rendue positive sur U par un changement de métrique. Soit en effet :

$h_1(z) = h(z) \cdot e^{-m|z|^2}$

une nouvelle métrique sur $E_{|U}$, avec un scalaire m positif, où $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnées locales sur U. Comme :

$$i\Theta_{h_1}(E) = i\Theta_h(E) + mid'd''|z|^2 \otimes \mathrm{Id}_E,$$

on voit que $i\Theta_{h_1}(E) \geq \varepsilon\omega \otimes \mathrm{Id}_E$, pour un certain $\varepsilon > 0$, si m est suffisamment grand, car la (1,1)-forme $id'd''|z|^2$ est > 0. Par ailleurs on a : $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star) \geq 0$ au sens des courants, car la proposition 2.0.9.3 reste valable dans le cas des courants avec la même démonstration. Ainsi le courant :

$$\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta_{h_1}(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi))$$

est un (1,1)-courant positif sur U. De plus, ce changement scalaire de métrique préserve la propriété de π d'être auto-adjoint.

Convention. *On suppose dorénavant que, localement, la courbure de E est positive.*

Nous pouvons maintenant en déduire le

Corollaire 2.0.10.3 *Le* $(1,1)$*-courant* $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta_{h_1}(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi))$ *admet un potentiel local plurisousharmonique sur presque toute droite complexe incluse dans un domaine de carte de X.*

Ceci signifie que pour tout point $x \in X$ et presque toute droite complexe L par rapport à un système de coordonnées locales au voisinage de x, il existe une fonction sousharmonique φ_L telle que :

$$i\partial\bar{\partial}\varphi_L = \mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta_{h_1}(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi)),$$

localement sur L.

Démonstration. Par le lemme de Poincaré, tout courant d-fermé est localement d-exact et donc aussi $\partial\bar{\partial}$-exact par le lemme du $\partial\bar{\partial}$. Quitte à rétrécir l'ouvert trivialisant U, on peut supposer qu'il existe une fonction φ_L comme dans l'énoncé.
Le courant ci-dessus étant positif, le potentiel φ_L est sousharmonique. □

2.0.11 Un lemme sur les distributions

Une des principales difficultés de la démonstration du théorème 2.0.8.1 provient de l'insuffisante régularité des expressions qui contiennent π et des dérivées de π. Certains produits de courants correspondants ne sont pas définis car les distributions ne peuvent pas être multipliées. L'objectif de ce paragraphe est de donner un résultat élémentaire de théorie des distributions qui nous permettra de donner un sens aux calculs qui vont suivre.

Précisons quelques notations d'abord dans le contexte de l'espace $\mathbb{R}^n$. Comme notre problème se pose localement sur une variété, on sera amené à travailler sur des ouverts de l'espace euclidien. Pour tout réel s, on note :

$$L^2_s = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \hat{u} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \cdot \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Ceci est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ relatif à la mesure $(1+|\xi|^2)^s d\xi/(2\pi)^n$. Notons $||\cdot||_s$ sa norme. Pour un entier positif s, H^s désigne l'espace des fonctions L^2 sur $\mathbb{R}^n$ dont toutes les dérivées partielles au sens des distributions jusqu'à l'ordre s sont encore dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Il est classique que la transformée de Fourier réalise une isométrie de H^s dans L^2_s vus comme sous-espaces de l'espace des distributions tempérées $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

On considère aussi les espaces localisés $L^2_{s,\,\mathrm{loc}}$ des distributions u telles que $\varphi u \in L^2_s$, pour toute fonction test φ. On observe que l'on a la propriété suivante : si u est à support compact dans $L^2_{s,\,\mathrm{loc}}$, alors il existe une décomposition $u = \sum\limits_j D^j v_j + v$, où $v_j \in L^2_{s+1,\,\mathrm{loc}}$ pour tout j et $v \in L^2_{s+2,\,\mathrm{loc}}$ et les v_j et v sont à support compact. En effet, l'égalité précédente équivaut à :

$$\hat{u}(\xi) = \sum_j \xi_j \hat{v}_j(\xi) + \hat{v}(\xi), \quad \forall \xi.$$

Il suffit de prendre $\hat{v}_j(\xi) := \frac{\xi_j}{1+|\xi|^2}\hat{u}(\xi)$ et $\hat{v}(\xi) := \frac{1}{1+|\xi|^2}\hat{u}(\xi)$, pour $j = 1, \ldots, n$. On obtient alors :

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+1}{2}} \hat{v}_j(\xi) = \tfrac{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\xi_j}{1+|\xi|^2} \cdot (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in L^2 \text{ et}$$

$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}} \hat{v}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in L^2,$$

ce qui démontre la décomposition de u.

En particulier, si $u \in L^2_s$, alors pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a la décomposition :

$$\varphi u = \sum_j \psi_j D^j v_j + \psi v,$$

avec $v_j \in L^2_{s+1}$, $v \in L^2_{s+2}$ et ψ_j et ψ des fonctions test. Ainsi, pour $s = -1$, toute fonction L^2_{-1}s'écrit localement comme une somme de dérivées partielles d'ordre 1, au sens des distributions, de fonctions L^2, modulo une fonction L^2_1. On définit par analogie l'espace $(L^1)'$ des distributions tempérées qui apparaissent localement comme une somme de dérivées partielles d'ordre 1, au sens des distributions, de fonctions L^1. On a les inclusions :

$$L^1 \hookrightarrow (L^1)' \hookrightarrow \mathcal{D}'_1,$$

où $\mathcal{D}'_1$ désigne l'espace des distributions d'ordre 1. La topologie de $(L^1)'$ sera par définition la restriction de la topologie de $\mathcal{D}'_1$.

Lemme 2.0.11.1 *L'application*

$(f, g) \mapsto u_{fg}$ *de* $L^2_{1,\,\mathrm{loc}} \times L^2_{-1,\,\mathrm{loc}}$ *dans* $(L^1)'$

est bien définie, bilinéaire et continue, où u_{fg} désigne la distribution définie comme :

$$< u_{fg}, \varphi >= -\sum_j \int g_j D^j(\theta_j f\varphi) + \int f\psi h\varphi,$$

pour toute fonction test φ et toute décomposition locale $g = \sum\limits_j \theta_j \cdot D^j g_j + \psi h$, avec $g_j \in L^2, h \in L_1^2$ et θ_j, ψ des fonctions test.

Démonstration. Comme f est une fonction $L^2_{1,\mathrm{loc}}$, $\theta_j f\varphi$ est L_1^2 à support compact et donc $D^j(\theta_j f\varphi)$ est une fonction L^2 à support compact, quelle que soit la fonction test φ. Par conséquent, $g_j D^j(\theta_j f\varphi)$ est une fonction L^1 à support compact, comme produit de deux fonctions L^2. De plus, la fonction $f\psi h\varphi$ est L^1 à support compact, ce qui montre que l'expression de $< u_{fg}, \varphi >$ a bien un sens. On obtient :

$$\begin{aligned} |< u_{fg}, \varphi >| &= \left|\sum_j \int g_j D^j(\theta_j f\varphi)| + |\int f\psi h\varphi\right| \\ &\leq \sum_j \int |g_j| \cdot |D^j(\theta_j f\varphi)| \leq +\left|\int f\psi h\varphi\right| \\ &\leq \sum_j (\int |g_j|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int |D^j(\theta_j f\varphi)|^2)^{\frac{1}{2}} + (\int |h|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int |f\psi\varphi|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant l'inégalité de Hölder. Comme :

$$\begin{aligned} \int |D^j(\theta_j f\varphi)|^2 &\leq 2\int(|D^j f|^2|\theta_j\varphi|^2 + |f|^2|D^j(\theta_j\varphi)|^2) \leq \\ &\leq 2||f||_1^2 \cdot (\sup|\varphi|^2 + \sup|D^j\varphi|^2), \end{aligned}$$

on obtient :

$$|< u_{fg},\varphi >| \leq \sqrt{2}||f||_1 \cdot \left(\sum_j ||g_j||_0 + ||h||_1\right) \cdot (\sup|\varphi|^2 + \sup|D^j\varphi|^2)^{\frac{1}{2}},$$

pour toute fonction test φ. Ceci montre que u_{fg} est une distribution d'ordre 1 pour toutes fonctions $f \in L^2_{1,\mathrm{loc}}$ et $g \in L^2_{-1,\mathrm{loc}}$. De plus, cette formule garantit la continuité de u_{fg} en f et en g.

Il reste à justifier que $u_{fg} \in (L^1)'$. Comme $D^j(\theta_j f\varphi) = (D^j f) \cdot (\theta_j\varphi) + f \cdot D^j(\theta_j\varphi)$, la définition de u_{fg} entraîne :

$$\begin{aligned} < u_{fg}, \varphi > &= -\sum_j \int \theta_j g_j (D^j f)\varphi - \sum_j \int (fg_j) D^j(\theta_j\varphi) + \int f\psi h\varphi = \\ &= -\sum_j \int \theta_j g_j (D^j f)\varphi + \sum_j \int \theta_j D^j(fg_j)\varphi + \int f\psi h\varphi, \end{aligned}$$

pour toute fonction test φ. Donc :

$$u_{fg} = \sum_j \theta_j D^j(fg_j) - \sum_j \theta_j g_j D^j f + \psi fh$$

au sens des distributions. De plus, on a localement :

$$g_j D^j f \in L^1 \hookrightarrow (L^1)', \quad f g_j \in L^1, \quad fh \in L^1,$$

comme produits de deux fonctions L^2, et donc aussi $D^j(fg_j) \in (L^1)'$. Ces relations montrent que $u_{fg} \in (L^1)'$. □

2.0.12 Démonstration du théorème 2.0.8.1

Nous allons procéder en plusieurs étapes.

• **Première étape** : *réduction au cas de la courbure nulle*

Pour simplifier les calculs dans la suite, on montre que l'on peut se ramener localement au cas où la courbure de E est nulle. Le lemme élémentaire suivant nous sera utile.

Lemme 2.0.12.1 *Soit E un espace vectoriel complexe de dimension r et F un sous-espace vectoriel de dimension p. Considérons deux métriques hermitiennes h et h_0 sur E et π, π_0 les projections orthogonales pour h et respectivement h_0 de E sur F.*

Si $E = F \oplus F_h^\perp$ (respectivement $E = F \oplus F_{h_0}^\perp$) est la décomposition orthogonale de E pour h (respectivement h_0), alors il existe un automorphisme $v : E \longrightarrow E$ tel que $v(F) = F$, $v(F_h^\perp) = F_{h_0}^\perp$, et $h(s,t) = h_0(vs, vt)$, pour tous s,$t \in E$.

De plus, pour tout tel v les projections π et π_0 sont reliées par la relation : $\pi_0 = v\pi v^{-1}$.

Preuve. Soit $f_1, \ldots, f_r$ une base h-orthonormée de E telle que $f_1, \ldots, f_q$ soit une base de F. De même, soit $e_1, \ldots, e_r$ une base h_0-orthonormée de E telle que $e_1, \ldots, e_q$ soit une base de F. On définit $v : E \longrightarrow E$ par $v(f_k) = e_k$, pour $k = 1, \ldots, r$. On voit que $v(F) = F$ et $v(F_h^\perp) = F_{h_0}^\perp$ par construction. Comme $h_0(vf_j, vf_k) = h_0(e_j, e_k) = \delta_{jk} = h(f_j, f_k)$, pour tous $j, k = 1, \ldots, r$, on a aussi $h(s,t) = h_0(vs, vt)$, pour tous $s, t \in E$.

Il reste à vérifier l'égalité $\pi_0 = v\pi v^{-1}$. Il suffit de la vérifier sur F et sur $F_{h_0}^\perp$. Soit $\xi \in F$. Alors $\xi = \pi_0 \xi$ et $v^{-1}\xi \in F$. En particulier, $\pi v^{-1}\xi = v^{-1}\xi$. Ceci entraîne que $v\pi v^{-1}\xi = vv^{-1}\xi = \xi = \pi_0\xi$. L'égalité sur F est démontrée. Soit maintenant $\eta \in F_{h_0}^\perp$. On a : $\pi_0 \eta = 0$ et $v^{-1}\eta \in F_h^\perp$, donc $\pi v^{-1}\eta = 0$, ce qui démontre l'égalité sur $F_{h_0}^\perp$. □

Corollaire 2.0.12.2 *Soit (E, h) un fibré holomorphe de rang r muni d'une métrique hermitienne C^∞ au-dessus d'une variété complexe X et $\pi \in L_1^2(X, \mathrm{End}\, E)$ tel que $\pi = \pi^\star = \pi^2$ et $(\mathrm{Id}_E - \pi) \circ D''_{\mathrm{End}\, E}\pi = 0$ presque partout. Notons $F = \mathrm{Im}\, \pi$. Soit U un ouvert sur lequel le fibré E est trivial et h_0 la métrique triviale plate sur $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{C}^r$. Soit $\pi_0 \in L_1^2(U, \mathrm{End}\, E)$ la projection orthogonale pour la métrique h_0 de $E_{|U}$ sur $F_{|U}$.*

Alors il existe $v \in C^\infty(U, \mathrm{End}\, E)$ tel que $(\mathrm{Id} - \pi) \circ v \circ \pi = 0$ (ou de façon équivalente, $(\mathrm{Id} - \pi_0) \circ v \circ \pi_0 = 0$), $\pi_0 \circ v \circ (\mathrm{Id} - \pi) = 0$ presque partout sur U et $h(s,t) = h_0(vs, vt)$, pour tous $s, t \in E_{|U}$. De plus, $\pi_0 = v\pi v^{-1}$ presque partout sur U.

Lemme 2.0.12.3 *Sous les hypothèses du corollaire 2.0.12.2 la projection π_0 vérifie aussi : $(\mathrm{Id} - \pi_0) \circ D''\pi_0 = 0$ presque partout sur U.*

Ce résultat correspond a posteriori au fait que la structure holomorphe de F comme sous-fibré holomorphe de E sur le complémentaire d'un ensemble analytique ne dépend pas du choix de la métrique.

Preuve. Comme $\pi_0 = v\pi v^{-1}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}(\mathrm{Id}-\pi_0)\circ D''\pi_0 & = & (\mathrm{Id}-\pi_0)\circ D''v\circ\pi\circ v^{-1} \\ & + & (\mathrm{Id}-v\pi v^{-1})\circ v\circ D''\pi\circ v^{-1} \\ & + & (\mathrm{Id}-v\pi v^{-1})\circ v\circ\pi\circ D''(v^{-1}).\end{array}$$

Les expressions ci-dessus sont bien définies au sens des distributions car v est C^∞. Le deuxième terme de la somme précédente est égal à :

$$v\circ D''\pi\circ v^{-1} - v\circ\pi\circ D''\pi\circ v^{-1} = 0,$$

car $D''\pi = \pi\circ D''\pi$ et la soustraction de deux expressions L^2 est bien définie. Le troisième terme de la somme est égal à :

$$v\circ\pi\circ D''(v^{-1}) - v\circ\pi\circ v^{-1}\circ v\circ\pi\circ D''(v^{-1}) = 0,$$

car $\pi\circ v^{-1}\circ v\circ\pi = \pi^2 = \pi$ et la soustraction de deux expressions L^2 est bien définie. La somme est donc réduite à son premier terme, d'où :

$$(a) \qquad (\mathrm{Id}-\pi_0)\circ D''\pi_0 = (\mathrm{Id}-\pi_0)\circ D''v\circ\pi\circ v^{-1}.$$

Appliquons l'opérateur D'' à l'égalité $(\mathrm{Id}-\pi)\circ v\circ\pi = 0$. On obtient :

$$(b) \qquad -D''\pi\circ v\circ\pi + (\mathrm{Id}-\pi)\circ D''v\circ\pi + (\mathrm{Id}-\pi)\circ v\circ D''\pi = 0.$$

Comme $D''\pi = \pi\circ D''\pi$, on voit que :

$$(\mathrm{Id}-\pi)\circ v\circ D''\pi = \Big((\mathrm{Id}-\pi)\circ v\circ\pi\Big)\circ D''\pi = 0,$$

car l'expression entre parathèses est nulle. L'égalité (b) devient :

$$(c) \qquad D''\pi\circ v\circ\pi = (\mathrm{Id}-\pi)\circ D''v\circ\pi.$$

Par ailleurs, pour tout $\xi\in E$ il existe $\eta\in E$ tel que $v(\pi\xi) = \pi\eta$, car v conserve $\mathrm{Im}\,\pi$. Comme $D''\pi\circ\pi = 0$ d'après la relation $(3.\,d)$, on obtient :

$$(D''\pi\circ v\circ\pi)(\xi) = D''\pi(v(\pi\xi)) = (D''\pi\circ\pi)(\eta) = 0,$$

pour tout $\xi\in E$. Par conséquent, $D''\pi\circ v\circ\pi = 0$ et donc on voit via (c) que : $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''v\circ\pi = 0$. Ceci équivaut à : $D''v\circ\pi = \pi\circ D''v\circ\pi$. En appliquant l'opérateur $\mathrm{Id}-\pi_0$ à cette dernière égalité on obtient :

$$(\mathrm{Id} - \pi_0) \circ D''v \circ \pi = (\mathrm{Id} - \pi_0) \circ \pi \circ D''v \circ \pi = 0,$$

car $(\mathrm{Id} - \pi_0) \circ \pi = 0$ ($\mathrm{Im}\,\pi = \mathrm{Im}\,\pi_0$ et $(\mathrm{Id} - \pi_0) \circ \pi_0 = 0$). Finalement, l'égalité (a) donne : $(\mathrm{Id} - \pi_0) \circ D''\pi_0 = 0$, ce que l'on cherchait à démontrer. □

Le lemme 2.0.12.3 nous permet de nous ramener localement au cas d'un fibré plat. En fait, le problème étant local, on peut supposer dorénavant, quitte à remplacer localement la métrique initiale h de E par la métrique plate h_0, que $i\Theta(E)_h = 0$ sur l'ouvert trivialisant U.

• **Deuxième étape** : *réinterprétation de* $\mathrm{Im}\,\pi$

Pour démontrer le théorème 2.0.8.1 nous allons montrer que le fibré L^2 $F = \mathrm{Im}\,\pi$ est localement engendré par ses sections méromorphes locales. Comme précédemment, nous allons nous inspirer de la situation C^∞ considérée dans le lemme très simple suivant.

Lemme 2.0.12.4 *Soit* (E, h) *un fibré holomorphe hermitien de rang* r *et* $\pi \in C^\infty(X, \mathrm{End}\,E)$ *tel que* $\pi = \pi^\star = \pi^2$ *et* $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D''\pi = 0$. *On fait l'hypothèse que la courbure de* (E, h) *est nulle. Soit* p *le rang de* π *et* $q = r - p$. *On considère le sous-fibré holomorphe* $F = \mathrm{Im}\,\pi$ *de* E *et la suite exacte de fibrés holomorphes :*

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0,$$

où j *est l'inclusion et* $g = \mathrm{Id} - \pi$ *est la projection sur le fibré quotient* Q. *Alors il existe un morphisme holomorphe de fibrés :*

$$\Lambda^{q+1}E \otimes \Lambda^q Q^\star \xrightarrow{\sigma} E,$$

qui a pour image F. *Plus précisément, si* $e_1, \ldots, e_r$ *est un repère local holomorphe et orthonormé de* E *et* $K = (k_1 < \ldots < k_q)$ *est un multi-indice, on considère la section locale holomorphe de* $\det Q = \Lambda^q Q$ *définie comme :*

$$v_K = (\mathrm{Id} - \pi)e_{k_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{Id} - \pi)e_{k_q} = \sum_{|J|=q} D_{JK} \cdot e_J$$

où D_{JK} *est le mineur correspondant aux lignes* $J = (j_1, \ldots, j_q)$ *et aux colonnes* $K = (k_1 < \ldots < k_q)$ *de la matrice qui représente* $\mathrm{Id} - \pi$ *dans le repère considéré et* $e_J := e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}$, *pour tout* $J = (j_1, \ldots, j_q)$. *On lui associe la section locale holomorphe de* $\Lambda^q Q^\star$ *définie comme :*

$$v_K^{-1} = \frac{\sum_{|J|=q} \bar{D}_{JK} \cdot e_J^\star}{\sum_{|J|=q} |D_{JK}|^2}.$$

Alors pour tous multi-indices $I = (i_1 < \ldots < i_{q+1})$ *et* $K = (k_1 < \ldots < k_q)$, *le morphisme* σ *est défini localement par la relation :*

$$\sigma(e_I \otimes v_K^{-1}) = \sum_{l=1}^{q+1} (-1)^l \cdot \frac{\sum\limits_{|J|=q} \bar{D}_{JK} \cdot e_J^\star(e_{I\setminus\{i_l\}})}{\sum\limits_{|J|=q} |D_{JK}|^2} \cdot e_{i_l}. \tag{6.1}$$

En particulier, il existe un morphisme holomorphe de fibrés :

$$\Lambda^{q+1}E \xrightarrow{u} E \otimes \text{dét}Q$$

qui a pour image $F \otimes \text{dét}Q$, *déduit de* σ *en tensorisant à droite par* $\text{dét}Q = \Lambda^q Q$. *Les morphismes* σ *et* u *sont reliés localement par la relation :*

$$\sigma(e_I \otimes v_K^{-1}) = \frac{u(e_I)}{v_K},$$

la division étant effectuée dans le fibré en droites $\text{dét}Q$.

Ce lemme montre que le fibré $F \otimes \text{dét}\, Q$ peut être obtenu comme l'image d'une projection holomorphe de $\Lambda^{q+1}E$. Il nous sera utile par la suite parce que la projection de E sur F n'est pas, en général, holomorphe.

Preuve. Le fibré quotient Q peut être vu comme sous-fibré C^∞ de E via l'inclusion C^∞ $Q \overset{\text{Id}-\pi}{\hookrightarrow} E$. Ceci définit l'inclusion C^∞ $\text{dét}\, Q = \Lambda^q Q \hookrightarrow \Lambda^q E$ et la décomposition orthogonale $\Lambda^q E = \Lambda^q Q \oplus (\Lambda^q Q)^\perp$. L'élément v_K^{-1} de $\Lambda^q E^\star$ vérifie les égalités :

$$v_K^{-1}(v_K) = 1 \quad \text{ et } \quad v_K^{-1}(\xi) = 0, \; \text{ pour tout } \xi \in (\Lambda^q Q)^\perp.$$

Ceci justifie la notation v_K^{-1} et montre que $v_K^{-1} \in \Lambda^q Q^\star = (\text{dét}\, Q)^{-1}$. Nous devons montrer que $\text{Im}\, \sigma = F$. L'inclusion $F \subset \text{Im}\, \sigma$ est évidente. En fait, pour tout $s \in F$, $\sigma(s \wedge v_K \otimes v_K^{-1}) = v_K^{-1}(v_K) \cdot s = s$. Démontrons maintenant l'inclusion $\text{Im}\, \sigma \subset F$. On a : $v_K^{-1} \in \Lambda^q Q^\star \hookrightarrow \Lambda^q E^\star$, l'inclusion étant holomorphe. Vu comme élément de $\Lambda^q E^\star$, v_K^{-1} est défini par :

$$v_K^{-1}(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_q}) = v_K^{-1}((\text{Id} - \pi)e_{j_1} \wedge \cdots \wedge (\text{Id} - \pi)e_{j_q}),$$

pour tous $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq r$. Par conséquent, pour tout multi-indice $I = (i_1 < \ldots < i_{q+1})$ on a :

$$\begin{aligned}
\sigma(e_I \otimes v_K^{-1}) &= \sum_{l=1}^{q+1}(-1)^l\, v_K^{-1}(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{e}_{i_l}\wedge\cdots\wedge e_{i_{q+1}})\, e_{i_l}\\
&= \sum_{l=1}^{q+1}(-1)^l\, v_K^{-1}\Big((\mathrm{Id}-\pi)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{(\mathrm{Id}-\pi)e_{i_l}}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{i_{q+1}}\Big)\, e_{i_l}\\
&= \sum_{l=1}^{q+1}(-1)^l\, \sigma\Big((\mathrm{Id}-\pi)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_l}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{i_{q+1}}\otimes v_K^{-1}\Big)\\
&= \sum_{l=1}^{q+1}(-1)^l\, \sigma\Big((\mathrm{Id}-\pi)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge \pi e_{i_l}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{i_{q+1}}\otimes v_K^{-1}\Big)\\
&= \sum_{l=1}^{q+1}(-1)^l\, v_K^{-1}\Big((\mathrm{Id}-\pi)e_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{(\mathrm{Id}-\pi)e_{i_l}}\wedge\cdots\wedge \mathrm{Id}-\pi)e_{i_{q+1}}\Big)\, \pi e_{i_l}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\sigma(e_I\otimes v_K^{-1})\in F$, pour tous multi-indices I et K, car $\pi e_{i_l}\in F$ pour tout i_l. On a, par conséquent, $\mathrm{Im}\,\sigma\subset F$. □

Revenons à la situation du théorème 2.0.8.1. La section π considérée est L^2_1. Fixons un repère holomorphe local $e_1,\ldots,e_r$ de E sur un ouvert U et notons, comme précédemment, p le rang presque partout de $F=\mathrm{Im}\,\pi$ et $q=r-p$. Pour un point fixé $x_0\in U$ on peut supposer que $e_1(x_0),\ldots,e_q(x_0)$ est une base de Q_{x_0} et $e_{q+1}(x_0),\ldots,e_r(x_0)$ est une base de F_{x_0}. Il est évident alors que $(\mathrm{Id}-\pi)e_j(x_0)=e_j(x_0)$, si $j\in\{1,\ldots,q\}$ et $(\mathrm{Id}-\pi)e_j(x_0)=0$, si $j\in\{q+1,\ldots,r\}$. Pour toute matrice $a=(a_{k,j})_{\substack{1\le k\le q\\1\le j\le r}}$ avec $a_{k,j}\in\mathbb{C}$ et $(a_{k,j})_{\substack{1\le k\le q\\1\le j\le q}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^q}$, définissons les sections locales holomorphes de E sur U :

$$s_k=\sum_{j=1}^{r}a_{k,j}e_j,\quad \text{pour } k=1,\ldots,r,$$

et la section locale de $\Lambda^q E$ sur U :

$$\tau_a=(\mathrm{Id}-\pi)s_1\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)s_q\in L^2_1\cap L^\infty.$$

La section τ_a est une combinaison linéaire des sections v_K de $\mathrm{d\acute{e}t}\,Q$ considérées dans le lemme 2.0.12.4. A posteriori, τ_a sera une section holomorphe locale de $\mathrm{d\acute{e}t}\,Q$. De plus, $\tau_a(x_0)=e_1(x_0)\wedge\cdots\wedge e_q(x_0)$, donc $|\tau_a(x_0)|\neq 0$. En nous inspirant de la formule (6.1) du lemme 2.0.12.4, nous obtenons

Corollaire 2.0.12.5 *Pour un fibré hermitien (E,h) et une section $\pi\in L^2_1(X,\mathrm{End}\,E)$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.0.8.1, le morphisme local de fibrés $\Lambda^{q+1}E_{|U}\xrightarrow{v}E_{|U}$ défini par la formule :*

$$(6.2)\qquad e_I:=e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{q+1}}\overset{v}{\longmapsto}\sigma(e_I\otimes\tau_a^{-1})=\frac{u(e_I)}{\tau_a},$$

pour tout $I=(1\le i_1<\ldots<i_{q+1}\le r)$, vérifie $\mathrm{Im}\,\pi_{|U}=\mathrm{Im}\,v$. Ici σ et u sont définis par les mêmes formules que dans le lemme 2.0.12.4.

• **Troisième étape** : *un lemme de type Lelong-Poincaré*

Comme $\operatorname{Im}\pi = \operatorname{Im} v$ localement, il suffit de démontrer que pour tout multi-indice I tel que $|I| = q+1$, on a : $D''(v(e_I)) = 0$ au sens des courants pour conclure que $\operatorname{Im}\pi$ définit un fibré holomorphe en dehors d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2. Bien que la formule $D''(v(e_I)) = 0$ soit formellement vraie, ceci n'est pas défini a priori car $\frac{1}{\tau_a}$ ne définit pas nécessairement une distribution. (Les coefficients de τ_a sont des fonctions L^2_1 et leurs inverses ne sont que des fonctions mesurables.)

Pour surmonter cet obstacle, commençons par observer qu'a posteriori la formule de Lelong-Poincaré appliquée à la section holomorphe τ_a du fibré (a posteriori) holomorphe $\det Q$ entraîne :

$$\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log|\tau_a| = [Z_a] - \frac{i}{2\pi}\Theta(\text{dét}\, Q) = [Z_a] - \frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star),$$

où on a noté $[Z_a]$ le courant d'intégration le long du diviseur Z_a des zéros de τ_a et $|\tau_a|$ la norme quotient dans $\text{dét}\, Q$ de τ_a (égale d'ailleurs à la norme de τ_a dans $\Lambda^q E$). La courbure de E étant supposée nulle, $i\Theta(\text{dét}\, Q) = \mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star)$. Comme $[Z_a]$ est un $(1,1)$-courant positif, il vient :

$$i\partial\bar{\partial}\log|\tau_a|^2 \geq -\mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star).$$

Cette situation, qui a lieu a posteriori, peut être retrouvée en calculant $i\partial\bar{\partial}\log|\tau_a|^2$ (la norme étant considérée dans $\Lambda^q E$). Nous allons donc démontrer par calcul direct la dernière inégalité.

Rappelons que l'on a noté $D_E = D'_E + D''_E$ la décomposition de la connexion de Chern D_E associée à la métrique hermitienne C^∞ de E en sa partie (1,0) et sa partie (0,1). Considérons les opérateurs suivants :

$$D'_Q := (\mathrm{Id} - \pi)\circ D'_E\,;$$

$$D''_Q := (\mathrm{Id} - \pi)\circ D'_E,$$

qui représentent les projections de D'_E et respectivement D''_E. A posteriori, D'_Q et D''_Q seront la partie (1,0) et respectivement (0,1) de la connexion de Chern associée à la métrique quotient sur le fibré Q que l'on construira.

Pour ne pas avoir de problèmes de dénominateurs, nous allons calculer $i\partial\bar{\partial}\log(|\tau_a|^2 + \delta^2)$, pour des réels $\delta > 0$ que nous ferons finalement tendre vers 0. Le lemme suivant fournit l'argument essentiel de notre démonstration.

Lemme 2.0.12.6 *Si (E,h) est un fibré holomorphe de rang r muni d'une métrique hermitienne C^∞ de courbure nulle, alors pour tout $\delta > 0$ on a :*

$$
\begin{aligned}
i\partial\bar\partial \log(|\tau_a|^2+\delta^2) &= i\tfrac{\{D'_{d\acute{e}t_Q}\tau_a, D'_{d\acute{e}t_Q}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} - i\tfrac{\{D'_{d\acute{e}t_Q}\tau_a,\tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'_{d\acute{e}t_Q}\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2}\\
&- i\tfrac{\{D''_{d\acute{e}t_Q}D'_{d\acute{e}t_Q}\tau_a,\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2}\\
&\geq -\tfrac{|\tau_a|^2}{|\tau_a|^2+\delta^2}\cdot \mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star),
\end{aligned}
$$

où

$$
\begin{aligned}
D'_{d\acute{e}t_Q}\tau_a &:= \sum_{k=1}^{q}(\mathrm{Id}-\pi)s_1\wedge\cdots\wedge D'_Q\Big((\mathrm{Id}-\pi)s_k\Big)\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)s_q \ \textit{et}\\
D''_{d\acute{e}t_Q}\tau_a &:= \sum_{k=1}^{q}(\mathrm{Id}-\pi)s_1\wedge\cdots\wedge D''_Q\Big((\mathrm{Id}-\pi)s_k\Big)\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)s_q.
\end{aligned}
$$

Un mot d'explication est nécessaire pour justifier les expressions écrites ci-dessus. Rappelons que $\pi \in L^\infty(X,\mathrm{End}\,E)\cap L^2_1(X,\mathrm{End}\,E)$. Comme les coefficients de $D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a$ sont des fontions L^2 (comme produits d'une fonction L^2 par $q-1$ fonctions L^∞), le courant $\{D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a, D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a\}$ est bien défini comme (1,1)-courant à coefficients L^1 (produits de deux fonctions L^2). Il en est de même pour le (1,1)-courant $\{D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a,\tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a\}$. Par ailleurs, $\frac{\tau_a}{|\tau_a|^2+\delta^2}$ est une section L^2_1 de $\Lambda^q E$. En fait, c'est une section L^2 comme produit de la section L^2 τ_a par la fonction L^∞ $\frac{1}{|\tau_a|^2+\delta^2}$. De plus, ses dérivées premières :

$$
D(\tfrac{\tau_a}{|\tau_a|^2+\delta^2}) = \tfrac{1}{|\tau_a|^2+\delta^2}D\tau_a - \tfrac{\tau_a}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2}D\{\tau_a,\tau_a\}
$$

sont encore L^2, car $\frac{1}{|\tau_a|^2+\delta^2}$ et $\frac{\tau_a}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2}$ sont L^∞ et $D\tau_a$ et $D\{\tau_a,\tau_a\}$ sont L^2.
Le lemme 2.0.11.1 implique alors que le (1,1)-courant :

$$
i\tfrac{\{D''_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a,\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} = i\{D''_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}\tau_a, \tfrac{\tau_a}{|\tau_a|^2+\delta^2}\}
$$

est bien défini, ayant pour coefficients des distributions $(L^1)'$ obtenues comme produits d'une distribution L^2_{-1} par une fonction L^2_1.

Démonstration du lemme 2.0.12.6. La courbure de E étant supposée nulle, le repère local $e_1,\ldots,e_r$ peut être choisi parallèle pour la connexion de Chern de (E,h). Ceci signifie que $D'_E e_j = 0$ et $D''_E e_j = 0$, pour tout $j=1,\ldots,r$. La section τ_a de $\Lambda^q E$ s'écrit localement dans ce repère comme :

$$
\tau_a = \sum_{j_1,\ldots,j_q} a_{1j_1}\ldots a_{qj_q}(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}.
$$

Les opérateurs $D'_{\Lambda^q E}$ et $D'_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}$, ainsi que les opérateurs $D''_{\Lambda^q E}$ et $D''_{\mathrm{d\acute{e}t}\,Q}$, peuvent être appliqués à τ_a et donnent :

$$
D'_{\Lambda^q E}\tau_a = -\sum_{j_1,\ldots,j_q} a_{1j_1}\ldots a_{qj_q}\cdot\sum_k(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge D'\pi(e_{j_k})\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q};
$$

$$D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a = -\sum_{j_1,\dots,j_q} a_{1j_1}\dots a_{qj_q}\cdot\sum_k (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)\circ D'\pi(e_{j_k})\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q};$$
$$D''_{\Lambda^q E}\tau_a = -\sum_{j_1,\dots,j_q} a_{1j_1}\dots a_{qj_q}\cdot\sum_k (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge D''\pi(e_{j_k})\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q};$$
$$D''_{\text{dét}\,Q}\tau_a = -\sum_{j_1,\dots,j_q} a_{1j_1}\dots a_{qj_q}\cdot\sum_k (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi(e_{j_k})\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}.$$
Les courants $D'_{\Lambda^q E}\tau_a$ et $D''_{\Lambda^q E}\tau_a$ sont bien définis comme courants à coefficients L^2. En fait, leurs coefficients apparaissent comme produits d'un coefficient L^2 de $D'\pi(e_{j_k})$ (respectivement $D''\pi(e_{j_k})$) par des coefficients L^∞ de $(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_k}$. Les courants $D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a$ et $D''_{\text{dét}\,Q}\tau_a$ sont à coefficients L^2, car $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D'\pi$ et $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi$ le sont. Comme :

$$(\mathrm{Id}-\pi)\circ D'\pi = D'\pi$$

grâce à la relation $(3.\,c)$, on voit que $D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a = D'_{\Lambda^q E}\tau_a$. Notons dorénavant cette valeur commune par $D'\tau_a$. La relation $(3.\,a)$ montre que $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi = 0$, ce qui entraîne que $D''_{\text{dét}\,Q}\tau_a = 0$.

Commençons par démontrer l'inégalité qui figure dans la conclusion du lemme 2.0.12.6. Le $(1,1)$-courant $i\{D'\tau_a, D'\tau_a\}$ est positif et l'inégalité de Lagrange montre que l'on a :

$$i\{D'\tau_a,\tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'\tau_a\} \le |\tau_a|^2\cdot i\{D'\tau_a, D'\tau_a\},$$

au sens des courants. Par conséquent, $i\frac{\{D'\tau_a, D'\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} - i\frac{\{D'\tau_a,\tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2} \ge 0$, au sens des courants. Nous allons montrer maintenant l'égalité suivante :

$$(\star)\qquad \{D''_{\text{dét}\,Q}D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a,\tau_a\} = |\tau_a|^2\cdot \mathrm{Tr}_E(\beta\wedge\beta^\star),$$

ce qui démontrera l'inégalité du lemme. Comme :

$$D''_{\text{dét}\,Q}((\mathrm{Id}-\pi)e_j) = -(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi(e_j) = 0,$$

pour tout j, on obtient :

$$D''_{\text{dét}\,Q}D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a = -\sum_{j_1,\dots,j_q} a_{1j_1}\dots a_{qj_q}\cdot\sum_k (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''D'\pi(e_{j_k})\wedge \dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}.$$

Par ailleurs, l'opérateur D' appliqué à l'identité $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi = 0$ donne :

$$-D'\pi\wedge D''\pi + (\mathrm{Id}-\pi)\circ D'D''\pi = 0,$$

au sens des courants. Une explication est nécessaire ici pour justifier l'existence des courants qui apparaissent dans la formule ci-dessus. Les courants $D'\pi$ et $D''\pi$ sont à coefficients L^2, donc $D'\pi\wedge D''\pi$ est un courant de bidegré (1,1) à coefficients L^1. Le courant $D'D''\pi$ est à coefficients L^2_{-1} (comme dérivées secondes des coefficients L^2_1 de π)

et le lemme 2.0.11.1 autorise sa multiplication par le courant $\mathrm{Id}-\pi$ à coefficients L_1^2. De plus, comme la courbure de E est supposée plate, la courbure de $\mathrm{End}\,E$ muni de la métrique déduite de la métrique de E est aussi plate. Par conséquent, $D'D''\pi = -D''D'\pi$, et l'égalité précédente entraîne que :

$$(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''D'\pi = -D'\pi \wedge D''\pi = -D'\pi \wedge D''\pi \circ (\mathrm{Id}-\pi),$$

au sens des courants. La deuxième égalité ci-dessus résulte du fait que $D''\pi\circ(\mathrm{Id}-\pi) = D''\pi$, car $D''\pi\circ\pi = 0$, d'après la relation $(3.\,d)$. Ceci donne finalement la formule suivante :

$$D''_{\text{dét}\,Q}D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a = \sum_{j_1,\dots,j_q} a_{1j_1}\dots a_{qj_q}\cdot\sum_k(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge(D'\pi\wedge D''\pi)\circ(\mathrm{Id}-\pi)(e_{j_k})\wedge \cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}.$$

Or $\sum_k(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge(D'\pi\wedge D''\pi)\circ(\mathrm{Id}-\pi)(e_{j_k})\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q} = \mathrm{Tr}_E(D'\pi\wedge D''\pi)\cdot(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}$,

et comme $\mathrm{Tr}_E(D'\pi\wedge D''\pi) = \mathrm{Tr}_E(\beta\wedge\beta^\star)$, on obtient :

$$(6.3)\qquad D''_{\text{dét}\,Q}D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a = \mathrm{Tr}_E(\beta\wedge\beta^\star)\cdot\tau_a,$$

compte tenu de la formule de τ_a. Ceci implique trivialement l'identité $(\star)$. L'inégalité du lemme 2.0.12.6 est ainsi démontrée.

Nous allons démontrer maintenant l'égalité du lemme 2.0.12.6. Pour τ_a vu comme section L_1^2 du fibré $\Lambda^q E$ nous obtenons en dérivant :

$$\begin{aligned} i\partial\bar\partial\log(|\tau_a|^2+\delta^2) &= i\frac{\{D'_{\Lambda^qE}\tau_a, D'_{\Lambda^qE}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} - i\frac{\{D'_{\Lambda^qE}\tau_a,\tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'_{\Lambda^qE}\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2}\\ &- i\frac{\{D''_{\Lambda^qE}\tau_a, D''_{\Lambda^qE}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} - i\frac{\{\tau_a, D''_{\Lambda^qE}\tau_a\}\wedge\{D''_{\Lambda^qE}\tau_a,\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2}\\ &+ i\frac{\{D'_{\Lambda^qE}D''_{\Lambda^qE}\tau_a,\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} + i\frac{\{\tau_a, D''_{\Lambda^qE}D'_{\Lambda^qE}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2}\\ &- i\frac{\{D'_{\Lambda^qE}\tau_a,\tau_a\}\wedge\{D''_{\Lambda^qE}\tau_a,\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2} - i\frac{\{\tau_a, D''_{\Lambda^qE}\tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'_{\Lambda^qE}\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2}. \end{aligned}$$

L'expression de $D''_{\Lambda^qE}\tau_a$ obtenue précédemment est une combinaison linéaire de termes :

$$\sum_k(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\dots\wedge D''\pi(e_{j_k})\wedge\dots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q},$$

dans lesquels $D''\pi(e_{j_k}) = \beta^\star(e_{j_k})$ est une section L^2 à valeurs dans $\mathrm{Im}\,\pi$, car $D''\pi = \pi\circ D''\pi$. (A posteriori, $\beta^\star$ sera une section de $\mathrm{Hom}\,(Q,F)$). Par conséquent,

$$\{D''\pi(e_{j_k}),(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_l}\} = 0,$$

pour tous k,l, car $\mathrm{Im}\,\pi$ et $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id}-\pi)$ sont orthogonaux. Ceci entraîne :

$$\{D''_{\Lambda^q E}\tau_a, \tau_a\} = 0,$$

car il s'agit d'une combinaison linéaire d'expressions du type :

$$\{(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1} \wedge \cdots \wedge D''\pi(e_{j_k}) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}, (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1} \wedge \cdots \wedge (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}\},$$

Toutes ces expressions sont nulles, car égales à des déterminants ayant chacun une ligne nulle. De même a-t-on :

$$\{\tau_a, D''_{\Lambda^q E}\tau_a\} = 0.$$

La formule de $i\partial\bar\partial \log(|\tau_a|^2 + \delta^2)$ se réduit alors à :

$$\begin{array}{rcl} i\partial\bar\partial \log(|\tau_a|^2+\delta^2) & = & i\frac{\{D'_{\Lambda^q E}\tau_a, D'_{\Lambda^q E}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} - i\frac{\{D'_{\Lambda^q E}\tau_a, \tau_a\}\wedge\{\tau_a, D'_{\Lambda^q E}\tau_a\}}{(|\tau_a|^2+\delta^2)^2} \\ & - & i\frac{\{D''_{\Lambda^q E}\tau_a, D''_{\Lambda^q E}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} \\ & + & i\frac{\{D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a, \tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2} + i\frac{\{\tau_a, D''_{\Lambda^q E}D'_{\Lambda^q E}\tau_a\}}{|\tau_a|^2+\delta^2}. \end{array}$$

Nous allons démontrer les égalités suivantes :

$$(\star\star) \qquad i\{D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a, \tau_a\} = -|\tau_a|^2 \cdot \mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star);$$

$$(\star\star\star) \qquad i\{\tau_a, D''_{\Lambda^q E}D'_{\Lambda^q E}\tau_a\} = -|\tau_a|^2 \cdot \mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star);$$

$$(\star\star\star\star) \qquad i\{D''_{\Lambda^q E}\tau_a, D''_{\Lambda^q E}\tau_a\} = -|\tau_a|^2 \cdot \mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star),$$

ce qui démontrera l'égalité du lemme. Commençons par démontrer $(\star\star)$. En appliquant l'opérateur $D'_{\Lambda^q E}$ à la formule obtenue précédemment pour $D''_{\Lambda^q E}\tau_a$ nous obtenons :

$$D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a = \sum_{j_1,\dots,j_q} A_{j_1,\dots,j_q}, \text{ où}$$

$$\begin{array}{rcl} A_{j_1,\dots,j_q} & = & \sum\limits_{l<k}(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge D'\pi(e_{j_l})\wedge\cdots\wedge D''\pi(e_{j_k})\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q} \\ & - & \sum\limits_{k}(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge D'D''\pi(e_{j_k})\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q} \\ & - & \sum\limits_{k<l}(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge D''\pi(e_{j_k})\wedge\cdots\wedge D'\pi(e_{j_l})\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}. \end{array}$$

La première et la troisième somme ci-dessus définissent des $(1,1)$-courants à valeurs dans E et à coefficients L^1 (comme produits de deux fonctions L^2 par des fonctions L^∞). La deuxième somme définit un $(1,1)$-courant à valeurs dans E et à coefficients distributions obtenues comme produits des coefficients L^2_{-1} de $D'D''\pi$ par des coefficients L^2_1 de $(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_k}$ (cf. lemme 2.0.11.1). Ainsi $A_{j_1,\dots,j_q}$ est bien défini comme courant de bidegré $(1,1)$ à valeurs dans E.

La première et la troisième somme de l'expression de $A_{j_1,\dots,j_q}$ contiennent des facteurs $D''\pi(e_{j_k})$ qui sont des courants à valeurs dans $\operatorname{Im}\pi$, et donc orthogonaux à tout facteur $(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_l}$ qui intervient dans l'expression de τ_a. Ces deux sommes n'ont donc aucune contribution dans l'expression de $i\{D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a,\tau_a\}$. Quant à la deuxième somme, pour les mêmes raisons d'orthogonalité, seule la composante $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D'D''\pi = D'\pi\wedge D''\pi$ de $D'D''\pi$ aura une contribution non nulle. Cette partie intéressante de la deuxième somme devient alors :

$$-\sum_k (\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge D'\pi\wedge D''\pi(e_{j_k})\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q} =$$
$$= -\mathrm{Tr}_E(D'\pi\wedge D''\pi)\cdot(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_1}\wedge\cdots\wedge(\mathrm{Id}-\pi)e_{j_q}.$$

La formule antérieure de τ_a entraîne finalement :

$$i\{D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a,\tau_a\} = -i\{\mathrm{Tr}_E(D'\pi\wedge D''\pi)\cdot\tau_a,\tau_a\} = -|\tau_a|^2\cdot\mathrm{Tr}_E(iD'\pi\wedge D''\pi),$$

ce qui démontre $(\star\star)$.

Démontrons maintenant $(\star\star\star)$. Les calculs et les arguments sont très similaires à ceux du cas précédent. Ces calculs montrent que $D''_{\Lambda^q E}D'_{\Lambda^q E}\tau_a$ est égal en tant que courant de type $(1,1)$ à $D''_{\text{dét}\,Q}D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a$ plus des termes qui n'ont aucune contribution dans le calcul de $i\{\tau_a, D''_{\Lambda^q E}D'_{\Lambda^q E}\tau_a\}$. Nous obtenons donc, en tenant aussi compte de (6.3) :

$$\begin{aligned} i\{\tau_a, D''_{\Lambda^q E}D'_{\Lambda^q E}\tau_a\} &= i\{\tau_a, D''_{\text{dét}\,Q}D'_{\text{dét}\,Q}\tau_a\} = i\{\tau_a, \mathrm{Tr}_E(\beta\wedge\beta^\star)\cdot\tau_a\} \\ &= -\{\tau_a, \mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star)\cdot\tau_a\} = -|\tau_a|^2\cdot\mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star). \end{aligned}$$

Ceci démontre $(\star\star\star)$. Il reste à démontrer $(\star\star\star\star)$. Nous avons démontré plus haut que $\{D''_{\Lambda^q E}\tau_a,\tau_a\} = 0$ comme $(0,1)$-courant à valeurs scalaires. Si on applique l'opérateur ∂ on obtient :

$$0 = \partial\{D''_{\Lambda^q E}\tau_a,\tau_a\} = \{D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a,\tau_a\} - \{D''_{\Lambda^q E}\tau_a, D''_{\Lambda^q E}\tau_a\},$$

ce qui entraîne, compte tenu de $(\star\star)$:

$$i\{D''_{\Lambda^q E}\tau_a, D''_{\Lambda^q E}\tau_a\} = i\{D'_{\Lambda^q E}D''_{\Lambda^q E}\tau_a,\tau_a\} = -|\tau_a|^2\cdot\mathrm{Tr}_E(i\beta\wedge\beta^\star).$$

Ceci démontre $(\star\star\star\star)$. Les relations $(\star)$, $(\star\star)$, $(\star\star\star)$ et $(\star\star\star\star)$ impliquent l'égalité du lemme 2.0.12.6. Le lemme 2.0.12.6 est ainsi complètement démontré. $\square$

• **Quatrième étape** : *Construction du fibré en dimension 1*

Nous pouvons démontrer maintenant que $\operatorname{Im}\pi$ définit presque partout un sous-fibré holomorphe de E en restriction à presque toute droite complexe considérée localement dans un domaine de carte. Fixons un point arbitraire $x_0\in X$ et un ouvert trivialisant $U\ni x_0$ de E inclus dans un domaine de carte avec des coordonnées locales $z=(z_1,\dots,z_n)$. Fixons aussi une droite complexe L dans ce domaine de carte telle que la restriction de

$\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star)$ à L soit définie comme $(1,1)$-courant. C'est le cas pour presque tout choix de L. Grâce au corollaire 2.0.10.3, il existe une fonction sousharmonique $\varphi = \varphi_L$ sur $U \cap L$ telle que $i\partial\bar{\partial}\varphi = \mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star)_{|U\cap L}$ (la courbure de E est supposée nulle). Le lemme 2.0.12.6 entraîne alors :

$$i\partial\bar{\partial}\log(|\tau_a|^2 + \delta^2) \geq -\frac{|\tau_a|^2}{|\tau_a|^2 + \delta^2}\,(i\partial\bar{\partial}\varphi) \geq -i\partial\bar{\partial}\varphi, \qquad \text{pour tout } \delta > 0,$$

sur $U \cap L$, car $i\partial\bar{\partial}\varphi \geq 0$. Ceci montre que la fonction :

$$\log(|\tau_a|^2\, e^{\varphi} + \delta^2\, e^{\varphi})$$

est sousharmonique sur $U \cap L$, pour tout $\delta > 0$. Comme une limite décroissante de fonctions sousharmoniques est une fonction sousharmonique, la fonction $\log(|\tau_a|^2\, e^{\varphi})$ est sousharmonique sur $U \cap L$. En particulier, la fonction :

$$\psi := \log(|\tau_a|\, e^{\frac{\varphi}{2}})$$

est sousharmonique sur $U \cap L$. De plus, ψ n'est pas $\equiv -\infty$, car on s'était assuré que $|\tau_a(x_0)| \neq 0$, ce qui implique que $\psi(x_0) \neq -\infty$.

Soit maintenant $f \in \Gamma(U \cap L, \mathcal{I}(\psi))$ une section sur l'ouvert $U \cap L$ du faisceau d'idéaux multiplicateurs associé à la fonction sousharmonique ψ, à savoir une fonction holomorphe $f : U \cap L \to \mathbb{C}$, telle que $\int_{U\cap L} |f|^2 e^{-2\psi}\, d\lambda < +\infty$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Ceci signifie que la fonction :

$$|f|\, e^{-\psi} = \frac{|f|}{|\tau_a|\, e^{\frac{\varphi}{2}}}$$

est L^2 sur $U \cap L$. En particulier, $\dfrac{f}{\tau_a\, e^{\frac{\varphi}{2}}}$ est une section L^2 sur $U \cap L$ de $(\text{dét}\, Q)^{-1}$. Par ailleurs, φ est une fonction sousharmonique. La fonction $e^{\frac{\varphi}{2}}$ est donc également sousharmonique et, de plus, L^∞ sur $U \cap L$. Il en résulte que :

$$\frac{f}{\tau_a} = e^{\frac{\varphi}{2}}\, \frac{f}{\tau_a\, e^{\frac{\varphi}{2}}}$$

est une section L^2 sur $U \cap L$ de $(\text{dét}\, Q)^{-1}$. En particulier, elle définit une distribution et l'expression $D''\left(\frac{f}{\tau_a}\right)$ est bien définie au sens des distributions. De plus, $D''\left(\frac{f}{\tau_a}\right) = 0$ en tous les points où ceci est défini. Le morphisme v de fibrés défini par (6.2) peut être alors redéfini sur $U \cap L$ comme :

$$\Lambda^{q+1}E \xrightarrow{v} E, \qquad e_I \mapsto \tfrac{f\, u(e_I)}{\tau_a},$$

pour tout multi-indice I tel que $|I| = q+1$. Comme $u(e_I)$ est une section L^2 et D''-fermée sur $U \cap L$ de $E \otimes \text{dét}\, Q$, il vient que $\frac{f \cdot u(e_I)}{\tau_a} \in L^1(U \cap L, E)$ et

$$D''\left(\frac{f\,u(e_I)}{\tau_a}\right) = D''\left(\frac{f}{\tau_a}\right)u(e_I) + \frac{f}{\tau_a}\,D''u(e_I) = 0,$$

pour tout I. Par conséquent, le fibré L^2 défini par $F = \operatorname{Im} v = \operatorname{Im} \pi$ est localement engendré par ses setions méromorphes locales $\dfrac{f\,s_w}{\tau_a}$ sur presque toute droite complexe L contenue dans un domaine de carte.

• **Cinquième étape** : *application d'un théorème de Shiffman*

Rappelons que p désigne le rang presque partout de π. Pour l'ouvert trivialisant U de E considérons maintenant l'application :

$$U \ni x \overset{\Phi}{\longmapsto} G(p,r)$$

définie presque partout par $\Phi(x) = \operatorname{Im} \pi_x$. Ceci est un sous-espace vectoriel de dimension p de E_x, donc il peut être vu comme un élément de la grassmanienne $G(p,r)$ des sous-espaces vectoriels de dimension p de $\mathbb{C}^r$. La grassmanienne étant une variété projective, il existe un plongement isométrique de $G(p,r)$ dans un espace projectif complexe $\mathbb{P}^K$ qui est plongé à son tour dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$. L'application :

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_N) : U \to G(p,r) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$

est donc à valeurs vectorielles et elle est L^2_1 car elle est définie par π qui est supposé L^2_1. Ce que nous avons démontré plus haut équivaut au fait que pour presque toute droite complexe L et pour tout $j = 1, \ldots, N$, la composante $\Phi_j : U \cap L \to \mathbb{R}$ de Φ est méromorphe presque partout. Le théorème suivant de type Hartogs dû à B. Shiffman ([Shi86], corollaire 2, page 240) affirme qu'une fonction mesurable qui est séparément méromorphe presque partout est méromorphe presque partout.

Théorème (Shiffman, 1986). *Soit Δ le disque unité de $\mathbb{C}$ et $f : \Delta^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable telle que pour tout $1 \leq j \leq n$ et pour presque tout $(z_1, \ldots, \hat{z}_j, \ldots, z_n) \in \Delta^{n-1}$, l'application $\Delta \ni z_j \mapsto f(z_1, \ldots, z_n)$ est égale presque partout à une fonction méromorphe sur Δ. Alors f est égale presque partout à une fonction méromorphe.*

Ce qui est remarquable dans ce résultat de Shiffman est que les hypothèses sont très larges. Seules la mesurabilité de f et la méromorphie presque partout dans les directions parallèles aux axes de coordonnées sont supposées. Les fonctions Φ_j définies ci-dessus vérifient des hypothèses beaucoup plus fortes. Elles sont non seulement mesurables, mais aussi L^2_1. Elle sont également méromorphes presque partout dans presque toutes les directions.

Ce résultat implique que les composantes Φ_j de Φ sont méromorphes presque partout. L'application Φ est ainsi méromorphe presque partout. Comme toute application méromorphe est holomorphe en dehors d'un ensemble analytique de codimension ≥ 2, on obtient que $F = \operatorname{Im} \pi$ est un sous-fibré holomorphe de E en dehors d'un sous-ensemble analytique $S \subset X$ de codimension ≥ 2.

Annexe : Construction d'un potentiel plurisousharmonique

L'argument utilisé pour démontrer le théorème 2.0.8.1 a été celui de se restreindre en dimension 1 où le courant $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi))$ est trivialement fermé pour des raisons de bidegré. Il serait souhaitable tout de même que l'on puisse démontrer directement que ce courant est d-fermé. A postériori ceci est vrai car c'est le courant de courbure du fibré dét Q. La démonstration du théorème 2.0.8.1 serait ainsi obtenue sans avoir recours au théorème de Shiffman. La principale difficulté provient de l'insuffisante régularité de $D'D''\pi$ qui nous empêche de donner un sens au produit de courants $D'D''\pi \wedge D''\pi$ qui intervient dans le calcul formel de $d(\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star))$. Nous montrons dans cette annexe que $D'D''\pi$ est tout de même L^1. Cette régularité n'est pas encore suffisante. Nous présentons ensuite le calcul formel, qui a un sens si π est supposé C^∞, de $d(\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star))$. Nous espérons pouvoir trouver dans un futur proche un argument pour justifier ce calcul formel dans le cas général.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où le fibré E est plat. Nous commençons par établir le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 2.0.12.7 *Si $\Theta(E) = 0$, alors pour tout $\pi \in L^2_1(X, \mathrm{End}\, E)$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.0.8.1, on a l'égalité :*

$$D'D''\pi = D''\pi \wedge D'\pi + D'\pi \wedge D''\pi,$$

au sens des courants. En particulier, le courant $D'D''\pi$ est L^1.

Démonstration. En appliquant l'opérateur D' à la relation $(5.\,a)$ on obtient :

$$-D'\pi \wedge D''\pi + (\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi = 0.$$

Le courant $D'\pi \wedge D''\pi$ est bien défini comme courant à coefficients L^1 obtenus comme produits des coefficients L^2 de $D'\pi$ par les coefficients L^2 de $D''\pi$. Le courant $D'D''\pi$ est bien défini comme courant à coefficients L^2_{-1} (dérivées secondes des coefficients L^2_1 de π). Le lemme 2.0.11.1 permet de multiplier les coefficients L^2_{-1} de $D'D''\pi$ par les coefficients L^2_1 de $\mathrm{Id} - \pi$. Ceci assure que le courant $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi$ est bien défini et que ses coefficients sont $(L^1)'$. L'égalité ci-dessus a lieu au sens des distributions. Elle est équivalente à :

$$(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi = D'\pi \wedge D''\pi.$$

Ceci montre en particulier que le courant $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi$ est L^1 car égal au courant L^1 $D'\pi \wedge D''\pi$. Comme π est C^∞, les courants $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi)$ et $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi \circ \pi$ sont bien définis comme courants L^1. De plus, la dernière égalité montre que l'on a :

$$(A.1) \qquad (\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = D'\pi \wedge D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = D'\pi \wedge D''\pi,$$

car $D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = D''\pi$, grâce à l'identité $(3.\,d)$, et :

$$(A.2) \qquad (\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi \circ \pi = D'\pi \wedge D''\pi \circ \pi = 0,$$

grâce à l'identité $(3.\,d)$. Nous obtenons, par passage aux adjoints dans l'identité $(A.2)$,

$$\pi \circ D''D'\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = 0.$$

La courbure de E étant supposée nulle, la courbure de $\mathrm{End}\, E$ est également nulle. Par conséquent, $D'D''\pi = -D''D'\pi$. La dernière identité équivaut donc à :

$$(A.3) \qquad \pi \circ D'D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = 0.$$

Par ailleurs, si on applique l'opérateur D' à l'identité $(3.\,d)$ on obtient :

$$D'D''\pi \circ \pi = D''\pi \wedge D'\pi.$$

Par un argument similaire à celui exposé plus haut, le courant $D'D''\pi \circ \pi$ est bien défini comme courant $(L^1)'$ et $D''\pi \wedge D'\pi$ est bien défini comme courant L^1. L'égalité ci-dessus montre en outre que le courant $D'D''\pi \circ \pi$ est même L^1. Ainsi le courant $\pi \circ D'D''\pi \circ \pi$ est bien défini comme courant L^1, car π est L^∞. La dernière égalité entraîne :

$$(A.4) \qquad \pi \circ D'D''\pi \circ \pi = \pi \circ D''\pi \wedge D'\pi = D''\pi \wedge D'\pi,$$

car $\pi \circ D''\pi = D''\pi$ par l'identité $(3.\,a)$.
Enfin les identités $(A.1)$, $(A.2)$, $(A.3)$, et $(A.4)$, entraînent :

$$D'D''\pi = \pi \circ D'D''\pi \circ \pi + (\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = D''\pi \wedge D'\pi + D'\pi \wedge D''\pi.$$

Le lemme est démontré. □

Nous présentons maintenant le calcul de $d(\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id} - \pi) \circ i\Theta(E) \circ (\mathrm{Id} - \pi))$ dans le cas où π est supposé C^∞. Aucun problème de régularité ne se pose dans cette situation. Commençons par le cas où la courbure de E est nulle.

Lemme 2.0.12.8 *(***Cas de la courbure nulle.***) Si (E, h) est un fibré holomorphe hermitien tel que $i\Theta(E) = 0$ et π est une section C^∞ de* $\mathrm{End}\, E$ *satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.0.8.1, alors la* (1,1)*-forme* $\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star)$ *vérifie la relation:* $d(\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star) = 0$.

Démonstration. Compte tenu des définitions de β et $\beta^\star$, on voit que :

$$(A.5) \quad \mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star) = \mathrm{Tr}_E(-i\beta^\star \wedge \beta) = -i\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi).$$

Commençons par démontrer que $d'(\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi)) = 0$. On a les égalités :

$$(A.6) \quad \begin{array}{rcl} d'(\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi)) & = & \mathrm{Tr}_E(D'D''\pi \wedge D'\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E(D'D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) \circ D'\pi). \end{array}$$

Comme on l'a déjà remarqué dans la démonstration du lemme 2.0.12.7, si on applique l'opérateur D'' à $(3.\,b)$ on obtient :

$$(A.7) \quad D''D'\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) + D'\pi \wedge D''\pi = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$(A.8) \quad D'D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = D'\pi \wedge D''\pi,$$

car $D'D'' = -D''D'$, la courbure de E étant supposée nulle. On obtient ensuite :

$$(A.9) \quad \begin{array}{rcl} d'(\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi)) & = & \mathrm{Tr}_E(D'\pi \wedge D''\pi \wedge D'\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E((\mathrm{Id} - \pi) \circ D'\pi \wedge D''\pi \wedge D'\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E(D'\pi \wedge D''\pi \wedge D'\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi)). \end{array}$$

En fait, la première égalité est une conséquence des relations $(A.6)$ et $(A.8)$, la deuxième égalité découle de $(3.\,c)$, et la troisième égalité résulte du fait que la trace est invariante par permutations circulaires. En effet, pour des matrices $A = (a_{jk})$,$B = (b_{jk})$,$C = (c_{jk})$,$D = (d_{jk})$, on a les égalités évidentes :

$$\mathrm{Tr}(ABCD) = \sum_{i,j,k,l} a_{i,j} b_{jk} c_{kl} d_{li} = \sum_{i,j,k,l} b_{jk} c_{kl} d_{li} a_{ij} = \mathrm{Tr}(BCDA).$$

Par la relation $(3.\,b)$, $D'\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) = 0$, donc le dernier terme de $(A.9)$ est nul. On obtient alors : $d'(\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi)) = 0$, ce que l'on cherchait à démontrer.

Un calcul analogue montre que $d''(\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi)) = 0$. En fait, on a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} d''(\mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi)) & = & \mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'D''\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E(D''\pi \circ (\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi \wedge D''\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E(\pi \circ D''\pi \wedge D'\pi \wedge D''\pi) \\ & = & \mathrm{Tr}_E(D''\pi \wedge D'\pi \wedge D''\pi \circ \pi) \\ & = & 0. \end{array}$$

La première égalité découle de la commutation de Tr_E avec d'', la deuxième de la relation $(3.\,d)$. Pour avoir la troisième, on applique l'opérateur D' dans $(3.\,a)$ et on obtient : $(\mathrm{Id} - \pi) \circ D'D''\pi = D'\pi \wedge D''\pi$. La quatrième égalité résulte du fait que $D''\pi = \pi \circ D''\pi$ grâce à l'identité $(3.\,a)$. La cinquième égalité est une conséquence de la propriété de la trace d'être invariante par permutations circulaires. Par l'identité $(3.\,d)$ on a : $D''\pi \circ \pi = 0$, donc la dernière égalité. Le lemme est démontré. □

Lemme 2.0.12.9 **(cas d'une courbure quelconque.**) *Pour un fibré holomorphe hermitien (E,h), non nécessairement plat, et une section $\pi \in C^\infty(X, \mathrm{End}E)$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.0.8.1, la* (1,1)*-forme :*

$$\mathrm{Tr}_E(i\beta \wedge \beta^\star + (\mathrm{Id}-\pi)\circ i\Theta(E)\circ(\mathrm{Id}-\pi))$$

est d-fermée.

Démonstration du lemme 2.0.12.8. La preuve est similaire à celle du lemme 2.0.12.8 à quelques détails de calcul près. Démontrons, par exemple, que $d''S = 0$, où S est le courant de l'énoncé. On a :

$$d''S = i\mathrm{Tr}_E\Big(D''D'\pi \wedge D''\pi - D''\pi\circ\Theta(E)\circ(\mathrm{Id}-\pi) - (\mathrm{Id}-\pi)\circ\Theta(E)\circ D''\pi\Big).$$

Comme $\Theta(E) = D'D'' + D''D'$, il vient : $D''D'\pi = \Theta(E)\circ\pi - D'D''\pi$. La formule de $d''S$ devient :

$$\begin{aligned}
d''S &= i\mathrm{Tr}_E\Big(\Theta(E)\circ\pi\circ D''\pi - D'D''\pi\wedge D''\pi - D''\pi\circ\Theta(E)\circ(\mathrm{Id}-\pi)\\
&- \Theta(E)\circ D''\pi + \pi\circ\Theta(E)\circ D''\pi\Big)\\
&= -i\mathrm{Tr}_E(D'D''\pi\wedge D''\pi) + i\Big(\Theta(E)\circ\pi\circ D''\pi - \Theta(E)\circ D''\pi\Big)\\
&- i\mathrm{Tr}_E\Big(D''\pi\circ\Theta(E)\circ(\mathrm{Id}-\pi)\Big) + i\mathrm{Tr}_E\Big(\pi\circ\Theta(E)\circ D''\pi\Big).
\end{aligned}$$

Par la formule $(3.\,a)$ on a : $\pi\circ D''\pi = D''\pi$ et donc $\Theta(E)\circ\pi\circ D''\pi = \Theta(E)\circ D''\pi$. Ainsi, la deuxième parenthèse dans la formule de $d''S$ est nulle. Par ailleurs, la propriété de la trace d'être invariante par permutations circulaires entraîne :

$$i\mathrm{Tr}_E\Big(D''\pi\circ\Theta(E)\circ(\mathrm{Id}-\pi)\Big) = i\mathrm{Tr}_E\Big(\Theta(E)\circ(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi\Big) = 0,$$

car $(\mathrm{Id}-\pi)\circ D''\pi = 0$ d'après la propriété $(5.\,a)$, et :

$$i\mathrm{Tr}_E\Big(\pi\circ\Theta(E)\circ D''\pi\Big) = i\mathrm{Tr}_E\Big(\Theta(E)\circ D''\pi\circ\pi\Big) = 0,$$

car $D''\pi\circ\pi = 0$ d'après la propriété $(3.\,d)$. La formule de $d''S$ se réduit ainsi à :

$$d''S = -i\mathrm{Tr}_E(D'D''\pi\wedge D''\pi) = -i\mathrm{Tr}_E(D''\pi\wedge D'D''\pi) = 0,$$

formule qui a déjà été démontrée dans le cas d'un fibré plat (lemme 2.0.12.8).

L'identité $d'S = 0$ se démontre de la même manière. □

Chapitre 3

Vers une régularisation des courants avec contrôle des masses de Monge-Ampère

Soit (X, ω) une variété complexe compacte munie d'une métrique hermitienne C^∞, et $T \geq \gamma$, un courant quasi-positif, d-fermé, de bidegré $(1,1)$, sur X. Une variante du théorème de régularisation de Demailly affirme que T est la limite faible d'une suite de courants (T_m), à singularités analytiques, dans la même classe de cohomologie que T, avec des nombres de Lelong qui convergent vers ceux de T, et avec une perte au plus négligeable de positivité. Nous étudions la conjecture selon laquelle les courants régularisants T_m peuvent être choisis en sorte que les masses de Monge-Ampère des puissances T_m^p aient une croissance d'au plus $O((\log m)^c)$, pour $m >> 0$ et une constante $c > 0$. Ceci permettrait de déduire des inégalités de Morse singulières pour des métriques à singularités quelconques, et de donner une nouvelle caractérisation des fibrés en droites gros sur une variété compacte, qui généraliserait des critères comme ceux de Siu, de Demailly, ou de Ji-Shiffman, issus des démonstrations et des généralisations de la conjecture de Grauert-Riemenschneider. Nous donnons une estimation effective de la perte de positivité dans les courants régularisants T_m, et obtenons ensuite une version effective de la génération globale des faisceaux d'idéaux multiplicateurs sur un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. Nous indiquons aussi, dans deux annexes, d'éventuelles pistes pour continuer en direction de la conjecture.

3.0.13 Introduction

Position du problème

Soit T un courant d-fermé de bidegré (1,1) sur une variété complexe compacte X de dimension n. Fixons ω une métrique hermitienne C^∞ sur X. Il est connu que si T est un courant réel (i. e. $T = \overline{T}$), alors il admet une écriture globale sur X sous la forme $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$, où α est une (1,1)-forme C^∞ et φ est une distribution réelle sur X. En effet, T est localement exact et si on considère un recouvrement localement fini $(\Omega_j)_{j\in J}$ de X par des ouverts de Stein inclus dans des domaines de cartes, on a $T = i\partial\bar{\partial}\varphi_j$ sur chaque Ω_j. Les potentiels locaux φ_j sont recollés ensuite à l'aide d'une partition de l'unité. Les singularités de T sont donc concentrées dans le potentiel φ. Le courant T est dit **quasi-positif** si $T \geq -C\omega$ localement sur X, avec une constante $C > 0$. Ceci assure que les coefficients de T sont des mesures et que l'éventuelle partie négative de T est bornée. De même, une fonction $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite **quasi-psh** si le courant associé $i\partial\bar{\partial}\varphi$ est quasi-positif. Ceci équivaut au fait que φ s'écrit localement comme la somme d'une fonction psh et d'une fonction C^∞.

Supposons maintenant que T vérifie de plus : $T \geq \gamma$ sur X, avec une (1,1)-forme réelle continue γ. Une question essentielle est de savoir sous quelles hypothèses on peut régulariser T dans la même classe de cohomologie, ce qui revient à lissifier le potentiel φ, sans perte de positivité. Si le potentiel φ est continu il n'y a pas d'obstruction à la régularisation de T tel que le montre la

Proposition 3.0.13.1 (Richberg, 1967.) *Si $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi \geq \gamma$ et si φ est une fonction continue sur X, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un courant $T_\varepsilon = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$ dans la classe de cohomologie de T tel que :*

(i) T_ε est une (1,1)-forme C^∞ (ou, de façon équivalente, φ_ε est une fonction C^∞ sur X) ;

(ii) $T_\varepsilon \geq \gamma - \varepsilon\,\omega$;

(iii) $|\varphi - \varphi_\varepsilon| \leq \varepsilon$ uniformément sur X.

La perte de positivité est égale ici à $\varepsilon\,\omega$; elle est donc négligeable. La démonstration de ce résultat s'obtient facilement par une régularisation locale de φ à l'aide d'une convolution avec des noyaux régularisants, suivie d'un recollement des régularisations locales, légèrement modifiées au préalable, à l'aide d'une partition de l'unité.

Néanmoins, dans le cas général d'un potentiel φ non nécessairement continu il n'est pas possible de régulariser le courant T sans perte de positivité, l'obstruction étant les nombres de Lelong de T et la géométrie de la variété ambiante X. L'exemple suivant en témoigne.

Exemple. Soit X une surface compacte et $\pi : \hat{X} \to X$ l'éclatement de X en un point. Soit E le diviseur exceptionnel et $T \doteq [E]$ le courant d'intégration le long de E. Il est bien connu que T est un courant positif et $E^2 = -1$, ce qui signifie que si $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$, alors $\int_{\hat{X}} \alpha^2 = -1$. Ceci montre que T ne peut pas être régularisé sans perte de positivité, car si tel était le cas, il existerait des courants positifs $T_\varepsilon = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_\varepsilon$, avec φ_ε fonction C^∞ et $T_\varepsilon \to T$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Comme $\int_{\hat{X}} T_\varepsilon^2 \geq 0$, ceci est impossible. $\square$

Rappelons qu'une fonction plurisousharmonique (psh) φ est dite **à singularités analytiques** si elle s'écrit localement sous la forme :

$$\varphi = \tfrac{c}{2}\log(|f_1|^2 + \cdots + |f_N|^2) + v,$$

où $f_1,\ldots,f_N$ sont des fonctions holomorphes, v est une fonction localement bornée et c est un réel positif. Ceci signifie que les singularités de φ sont concentrées sur des ensembles analytiques définies localement par les équations $f_1 = \cdots = f_N = 0$. Les singularités analytiques sont plus facilement maniables que les singularités quelconques et il est souvent souhaitable de trouver des approximations de fonctions psh par des fonctions psh à singularités analytiques. De plus, les nombres de Lelong d'un courant mesurent en un certain sens la "taille" des singularités analytiques. Par conséquent, un processus de régularisation d'un courant peut envisager d'améliorer qualitativement les singularités (i.e. les rendre analytiques) où de les diminuer quantitativement (i. e. réduire les nombres de Lelong). Le théorème de régularisation des courants de J.-P. Demailly traite les deux aspects. Nous l'énonçons dans la forme sous laquelle il a été démontré dans [Dem92].

Théorème 3.0.13.2 (Demailly, 1992.) *Soit $T = \alpha + i\partial\bar\partial\varphi$ un courant quasi-positif, d-fermé, de bidegré (1,1) sur la variété complexe compacte X, où α est une (1,1)-forme réelle C^∞ et φ est une fonction quasi-psh. Soit γ une (1,1)-forme réelle continue telle que $T \geq \gamma$. Supposons également que le fibré $\mathcal{O}_{TX}(1)$ est muni d'une métrique C^∞ telle que sa forme de courbure de Chern vérifie :*

$$\tfrac{i}{\pi}\Theta(\mathcal{O}_{TX}(1)) + \pi_X^\star u \geq 0,$$

où $\pi_X : P(T^\star X) \to X$ est la projection du fibré projectivisé des droites associé à $T^\star X$ sur X et u est une (1,1)-forme C^∞ semi-positive sur X.

Alors pour tout $c > 0$ il existe une suite de (1,1)-courants fermés quasi-positifs $T_{c,m} = \alpha + \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial\varphi_{c,m}$ tels que $\varphi_{c,m}$ est C^∞ sur $X \setminus E_c(T)$ et décroît ponctuellement vers φ lorsque m tend vers $+\infty$ (donc implicitement le courant $T_{c,m}$ est lisse sur $X \setminus E_c(T)$ et converge vers T dans la topologie faible des courants), et tels que :

(i) $T_{c,m} \geq \gamma - \min\{\lambda_m, c\} \cdot u - \varepsilon_k\,\omega$, *où :*

(ii) $\lambda_m(x)$ *est une suite décroissante de fonctions continues sur X telle que* $\lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m(x) = \nu(T, x)$, *pour tout point $x \in X$;*

(iii) $(\varepsilon_k)_k$ *est une suite décroissante de réels positifs avec* $\lim\limits_{m\to+\infty} \varepsilon_k = 0$ *;*

(iv) $\nu(T_{c,m}, x) = (\nu(T, x) - c)_+$, *pour tout point $x \in X$.*

La condition (i) donne une estimation de la perte de positivité de $T_{c,m}$ par rapport à T. La perte $\varepsilon_k\,\omega$ est négligeable car $\varepsilon_k \to 0$. Cette perte apparaît dans le cas où on veut rendre analytiques les singularités sans modifier de manière significative les nombres de Lelong. Par conséquent, si on veut seulement améliorer la "qualité" des singularités en gardant la même "quantité" (les mêmes nombres de Lelong), la perte de positivité est négligeable. En revanche, si on veut réduire les nombres de Lelong de $c > 0$ (relation (iv)), la perte de positivité est de $\min\{\lambda_m, c\} \cdot u$, avec $\lim\limits_{m\to+\infty} \lambda_m(x) = \nu(T, x)$, donc il s'agit d'une quantité fixe dépendant des nombres de Lelong du courant T (par l'intermédiaire de λ_m) et de la géométrie de la variété ambiante (par l'intermédiaire de u). On voit, en particulier, que si la courbure du fibré tautologique $\mathcal{O}_{TX}(1)$ est positive, u peut être choisi nul et il n'y a donc pas de perte non négligeable de positivité. De plus, comme la variété X est compacte et la fonction $x \mapsto \nu(T, x)$ est semi-continue supérieurement, $\sup\limits_{x\in X} \nu(T, x) < +\infty$.

Par conséquent, si on choisit $c > \max_{x \in X} \nu(T, x)$, on obtient des approximations $T_{c,m}$ de T qui sont C^∞ sur X tout entier, mais le prix à payer est une perte inévitable de positivité.

Cependant, ce théorème ne donne pas d'estimations pour les masses de Monge-Ampère des courants $T_{c,m}$ qui approchent T. Plaçons-nous dorénavant dans le cas de l'amélioration "qualitative" des singularités du courant, à savoir le cas où l'on obtient des approximations ayant des singularités analytiques sans que les nombres de Lelong varient de manière significative. Le théorème d'approximation de J. -P. Demailly prend la forme moins générale suivante :

Théorème 3.0.13.3 (Demailly, 1992.) *Soit $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$ un courant quasi-positif, d-fermé, de bidegré (1,1) sur la variété complexe compacte X, où α est une (1,1)-forme réelle C^∞ et φ est une fonction quasi-psh. Soit γ une (1,1)-forme réelle continue telle que $T \geq \gamma$ et ω une métrique hermitienne C^∞ sur X.*

Alors, il existe une suite de fonctions quasi-psh φ_m telle que chaque φ_m est à singularités analytiques et :

(i) $\varphi(x) < \varphi_m(x) < \sup_{|\zeta - x| < r} \varphi(\zeta) + C\left(\frac{|\log r|}{m} + r + \frac{1}{\sqrt{m}}\right),$

par rapport à des ouverts de coordonnées qui recouvrent X, pour tout $r > 0$ tel que la boule $B(x, r)$ est incluse dans un tel domaine de carte. En particulier, (φ_m) converge ponctuellement et en norme $L^1(X)$ vers φ (et donc les courants $T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_m$ convergent faiblement vers T lorsque m tend vers $+\infty$), et :

(ii) $\nu(\varphi, x) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, x) \leq \nu(\varphi, x)$, *pour tout $x \in X$;*

(iii) $T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi_m \geq \gamma - \varepsilon_m \omega$, *avec $\varepsilon_m > 0$ qui décroît vers 0.*

Par la condition *(iii)*, les courants régularisants vérifient : $T_m + \varepsilon_m \omega \geq \gamma$. Nous nous proposons d'obtenir un contrôle des masses de Monge-Ampère des courants $T_m + \varepsilon_m \omega$ quand $m \to +\infty$, à savoir un contrôle asymptotique des expressions :

$$\int_X (T_m + \varepsilon_m \omega)^k \wedge \omega^{n-k}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

les intégrales étant calculées sur les ensembles des points lisses des courants. Plus précisément, l'objectif principal de ce travail est d'étudier la

Conjecture 3.0.13.4 *Sous les hypothèses du théorème 3.0.13.3, on peut choisir la suite $(T_m)_m$ en sorte que :*

$$\lim_{m \to +\infty} \varepsilon_m \int_X (T_m + \varepsilon_m \omega)^k \wedge \omega^{n-k} = 0,$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$.

Ce résultat est à mettre en rapport avec les problèmes soulevés par la conjecture de Grauert-Riemenscheider [GR70], résolue sous une forme renforcée par Y. T. Siu [Siu84], et renforcée encore davantage par J. -P. Demailly [Dem85]. En particulier, nous envisageons une version singulière des inégalités de Morse holomorphes de J. -P. Demailly pour des fibrés munis de métriques singulières à singularités quelconques. Le cas des singularités analytiques a été résolu par L. Bonavero dans [Bon93]. Ceci permettra de donner un critère nécessaire et suffisant pour qu'une variété complexe compacte soit de Moishezon qui généralise aussi bien les critères suffisants de Y. T. Siu [Siu84] et de J. -P. Demailly [Dem85], que les critères nécessaires et suffisants de S. Ji et B. Shiffman [JS93] et celui plus général de L. Bonavero [Bon93]. Nous donnons ci-dessous un bref aperçu de ces questions.

Caractérisations des variétés de Moishezon

Nous commençons par rappeler quelques notions et résultats concernant les variétés de Moishezon et les fibrés en droites gros. Soit L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X de dimension n. La **dimension de Kodaira-Iitaka** de L est le plus petit entier $k(L)$ tel que

$$h^0(X, mL) \leq O(m^{k(L)}), \qquad \text{pour } m \geq 1.$$

Si $h^0(X, m\,L) = \emptyset$, pour $m >> 1$, on pose $k(L) = -\infty$. On a toujours $k(L) \leq n$. Le fibré en droites L est appelé **gros** si $k(L) = n$. Ceci équivaut au fait que $h^0(X, mL) \geq c\,m^n$, pour $m \geq m_0$ et $c > 0$.

La variété compacte X est dite **de Moishezon** si le corps $K(X)$ des fonctions méromorphes sur X est de degré de transcendance égal à $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Ceci équivaut au fait que X possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Cette définition est motivée par un théorème de Siegel affirmant qu'une variété compacte de dimension n possède au plus n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.

Ces deux notions sont reliées par un théorème bien connu affirmant qu'une variété complexe compacte X est de Moishezon si et seulement si il existe un fibré en droites gros $L \to X$.

Le théorème suivant, dû à Siu ([Siu85]), résout et généralise la conjecture de Grauert-Riemenschneider ([GR70]). Demailly ([Dem85]) en a donné une version plus forte, fondée sur les inégalités de Morse holomorphes, en affaiblissant l'hypothèse de positivité sur la courbure du fibré L.

Théorème 3.0.13.5 *(Siu, 1985) Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte de dimension n. Alors L est gros dès qu'il existe une métrique hermitienne h C^∞ sur L telle que*

$$i\Theta_h(L) \geq 0 \text{ sur } X \qquad \text{et} \qquad \int_X (i\Theta_h(L))^n > 0.$$

Ce critère, caractérisant les fibrés en droites gros, n'est pas nécessaire (voir [Bon93, Bon98] pour des détails). Le résultat suivant est complémentaire au précédent, au sens où il s'affranchit de l'hypothèse de régularité sur la métrique, mais demande en contrepartie une condition plus forte de positivité sur la courbure. Il donne, en outre, un critère nécessaire et suffisant. Il avait déjà été démontré par Demailly ([Dem90]) dans le cas d'une variété X projective.

Théorème 3.0.13.6 *(Ji, Shiffman, 1993) Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte de dimension n. Alors L est gros si (et seulement si) il existe une métrique hermitienne h, éventuellement singulière, sur L, telle que*

$$i\Theta_h(L) > 0 \qquad \text{au sens des courants sur } X.$$

La conjecture (3.0.13.4), sur le contrôle des masses de Monge-Ampère dans le théorème de régularisation des courants de Demailly, impliquerait le résultat suivant qui généralise et englobe les deux précédents.

Conjecture 3.0.13.7 *Soit $L \to X$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte de dimension n. Alors L est gros si (et seulement si) il existe une métrique hermitienne h, éventuellement singulière, sur L, telle que*

$$i\Theta_h(L) \geq 0 \text{ sur } X \qquad \text{et} \qquad \int_X (i\Theta_h(L)_{ac})^n > 0,$$

où $\Theta_h(L)_{ac}$ désigne la partie absolument continue du courant de courbure.

Il est intéressant de savoir si on peut obtenir des versions généralisées de ces résultats pour des classes de cohomologie de bidegré $(1,1)$ non nécessairement entières (qui généralisent la première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ d'un fibré en droites). Le grand progrès dans cette direction a été accompli dans [DP01] :

Théorème 3.0.13.8 *(Demailly, Paun, 2001) Soit (X,ω) une variété kählérienne compacte de dimension n et $\{\alpha\} \in H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ une classe de cohomologie nef telle que $\int_X \alpha^n > 0$. Alors $\{\alpha\}$ contient un courant kählérien T, à savoir, un courant positif fermé T tel que $T \geq \delta\,\omega$ pour un réel $\delta > 0$. De plus, le courant T peut être choisi lisse dans le complémentaire $X \setminus Z$ d'un ensemble analytique Z, avec des pôles logarithmiques sur Z.*

Néanmoins, ce résultat a été démontré avec la restriction importante que la variété X soit kählérienne. Il est conjecturé dans [DP01] que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse de kählérianité sur X.

La stratégie adoptée dans l'étude de la conjecture (3.0.13.4)

Nous allons esquisser les grandes lignes de la démarche adoptée pour étudier la conjecture 3.0.13.4. On peut supposer, sans perte de généralité, que la classe de cohomologie de T (et donc celle des T_m) est nulle, à savoir que $\alpha = 0$. Localement, contrôler les masses de Monge-Ampère de $T_m + \varepsilon_m\,\omega$ revient à contrôler les masses de Monge-Ampère de $i\partial\bar\partial\varphi_m$ lorsque $m \to +\infty$. L'idée est d'appliquer les inégalités de Chern-Levine-Nirenberg pour obtenir une majoration de la masse du courant $i\partial\bar\partial\varphi_m$. L'énoncé précis est le suivant :

Proposition 3.0.13.9 (Inégalités de Chern-Levine-Nirenberg, 1969.) *Soit X une variété analytique complexe, $u_1, \ldots, u_q$ des fonctions plurisousharmoniques localement bornées, et T un courant positif fermé de bidegré (p,p) sur X. Alors, pour tous compacts K et L de X tels que $K \subset \mathring{L}$, il existe une constante $C_{K,L} \geq 0$ telle que :*

$$||dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T||_K \leq C_{K,L}\, ||u_1||_{L^\infty(L)} \ldots ||u_q||_{L^\infty(L)}\, ||T||_L,$$

où $||dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T||_K$ désigne la masse de Monge-Ampère du courant $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T$ sur K.

Malheureusement, ces inégalités ne sont valables que pour des fonctions u_j localement bornées. Dans notre situation, les fonctions φ_m sont définies localement par :

$$\varphi_m = \tfrac{1}{2m} \log \sum_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j}|^2,$$

où les $\sigma_{m,j}$ sont des fonctions holomorphes qui forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_U(m\varphi) = \{f \in \mathcal{O}(U); \textstyle\int_U |f|^2 e^{-2m\varphi}\, d\lambda < +\infty\},$$

pour un petit ouvert $U \subset X$. En général, les $\sigma_{m,j}$ ont des zéros communs, et donc les fonctions φ_m ont des pôles logarithmiques. En particulier, elles ne sont pas localement bornées et les inégalités de Chern-Levine-Nirenberg ne s'appliquent pas directement.

Pour surmonter cette difficulté, on peut éclater le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(m\varphi)$ dans X. Après éclatement, le faisceau localement libre $\pi_m^\star \mathcal{I}(m\varphi) = \mathcal{O}(-E_m)$ est localement engendré par un seul générateur g_m. (On a noté $\pi_m : \tilde{X}_m \to X$ l'éclatement de X selon $\mathcal{I}(m\varphi)$ et E_m le diviseur exceptionnel). Les générateurs $\sigma_{m,j} \circ \pi_m$ du faisceau $\pi_m^\star \mathcal{I}(m\varphi)$, après division par g_m, n'ont plus de zéros communs. On peut alors appliquer les inégalités de Chern-Levine-Nirenberg aux fonctions psh localement bornées :

$$\psi_m = \frac{1}{2m} \log \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \frac{\sigma_{m,j} \circ \pi_m}{g_m} \right|^2,$$

dans la variété éclatée $\tilde{X}_m$. Localement, le contrôle des masses de Monge-Ampère se ramène alors au contrôle de

$$(\sup_{z \in V} |\psi_m(z)|)^k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

où $V = \pi_m^{-1}(U) \subset \tilde{X}_m$. Un raffinement (mineur) de la démonstration du théorème 3.0.13.3 montre que les courants T_m peuvent être choisis en sorte que les termes ε_m qui bornent la perte de positivité sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt[4]{m}}$. Ce rafinement fera l'objet du paragraphe 3.0.15. Il faut alors démontrer que

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{m}}(\sup|\psi_m(z)|)^k = 0, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

Il suffit ainsi de démontrer que la croissance en m de $\sup|\psi_m(z)|$ est au plus de l'ordre de $O(\log m)$. L'étape délicate dans le contrôle de $\sup|\psi_m(z)|$ consiste à obtenir une minoration de ψ_m. L'idée fondamentale est d'appliquer le théorème d'extension L^2 d'Ohsawa-Takegoshi pour prolonger une fonction holomorphe L^2 définie sur une droite complexe en une fonction holomorphe L^2 de n variables, avec estimations de croissance. Pour construire une fonction holomorphe convenable sur une droite, nous avons besoin de résoudre un problème de théorie du potentiel en une variable complexe qui consiste à construire, pour chaque $m \in \mathbb{N}^\star$, une fonction holomorphe

$$f_m(z) = e^{mg_0(z)} \prod_{j=1}^{N(m)} (z - a_j(m))^{m_j}$$

sur un disque de taille fixe (i. e. indépendante de m), dont on contrôle la croissance du nombre $\sum_{j=1}^{N(m)} m_j$ de ses zéros, ainsi que la croissance de sa norme L^2, lorsque $m \to +\infty$. Cette étape est expliquée dans l'annexe A (paragraphe 3.0.17). L'application du théorème de prolongement d'Ohsawa-Takegoshi sur une droite, pour obtenir des estimations des potentiels locaux des courants régularisants, est expliquée dans l'annexe B (paragraphe 3.0.18). Nous avons rejeté ces deux étapes dans des annexes, car elles ne constituent que d'éventuelles pistes en direction de la conjecture 3.0.13.4. Leur utilité reste à confirmer.

En revanche, nous expliquons au paragraphe 3.0.16 une version effective, avec estimations, de la génération globale des faisceaux d'idéaux multiplicateurs associés à des multiples $m\varphi$ d'une fonction plurisousharmonique φ sur un ouvert pseudoconvexe borné de $\mathbb{C}^n$. Cette étape sera sans doute utile dans l'étude de la conjecture 3.0.13.4. La démonstration utilise le théorème de division L^2 de Skoda pour rendre effectif le lemme de Nakayama invoqué dans la preuve de la cohérence des faisceaux d'idéaux multiplicateurs (voir [Dem93], Lemma 4.4, p. 333).

3.0.14 Rappels et préliminaires

3.0.14.1 Nombres de Lelong. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et T un $(1,1)$-courant positif fermé dans Ω. On utilise souvent la notation $dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\bar\partial$. Les nombres de Lelong de T ont été introduits par P. Lelong [Lel57] pour étudier le comportement du courant au voisinage de ses singularités. Pour tout point $x \in \Omega$ et tout réel $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset\subset \Omega$, on considère le rapport entre la masse du courant T dans la boule $B(x,r)$ et le volume de la boule de rayon r de $\mathbb{C}^{n-1}$:

$$(0.2.1) \qquad \nu(T,x,\,\log r) \coloneqq \frac{1}{r^{2(n-1)}} \int_{B(x,r)} T(z) \wedge \left(\frac{1}{2}dd^c|z|^2\right)^{n-1}.$$

La mesure positive $\sigma_T(z) = T(z) \wedge (\frac{1}{2}dd^c|z|^2)^{n-1}$ est appelée **mesure trace** de T. Une identité due à P. Lelong montre que l'on a aussi :

$$(0.2.2) \qquad \nu(T, x,\, \log r) = \int\limits_{B(x,r)} T(z) \wedge (dd^c \log|z-x|)^{n-1}.$$

La mesure positive $\mu_T(z) = T(z) \wedge (dd^c \log|z-x|)^{n-1}$ est appelée **mesure projective** de T. En particulier, si $0 < r' < r$, on a :

$$\nu(T, x,\, \log r) - \nu(T, x,\, \log r') = \int\limits_{r'<|z-x|<r} T(z) \wedge (dd^c \log|z-x|)^{n-1},$$

ce qui entraîne la croissance en r de $\nu(T, x,\, \log r)$, et donc l'existence de la limite $\lim_{r\to 0} \nu(T, x,\, \log r)$, appellée **nombre de Lelong** de T au point x et notée $\nu(T, x)$. On définit de manière analogue les nombres de Lelong d'un courant positif fermé de bidegré arbitraire (p, p). Les nombres de Lelong $\nu(T, x)$ sont ainsi des réels positifs ou nuls.

Par exemple, si T est le courant d'intégration $[A]$ sur un ensemble analytique, le nombre de Lelong $\nu([A], x)$ coïncide avec la multiplicité de A en x (cf. [Th67]). Si $T = dd^c\varphi$ pour une fonction plurisousharmonique (psh) φ dans Ω, on note $\nu(\varphi, x) = \nu(T, x)$, appellé **nombre de Lelong de** φ au point x. La formule de Jensen-Lelong et l'inégalité de Harnack (voir [Dem97], chapitre 3) entraînent la formule suivante :

$$(0.2.3) \qquad \nu(\varphi, x) = \liminf_{z\to x} \frac{\varphi(z)}{\log|z-x|}.$$

On en déduit que $\nu(\varphi, x)$ est la plus grande constante $\gamma \geq 0$ qui satisfait la propriété

$$\varphi(z) \leq \gamma \log|z-x| + O(1),$$

pour tout z au voisinage de x. Ceci montre que $\nu(\varphi, x) = \gamma$ si et seulement si φ a pôle logarithmique d'ordre γ au point x. En particulier, $\nu(\varphi, x) = 0$ si φ est C^∞ au voisinage de x. De plus, si f est une fonction holomorphe sur un voisinage de x, la fonction $\varphi = \log|f|$ est psh et $\nu(\varphi, x)$ est égal à l'ordre d'annulation de f en x.

Par ailleurs, un résultat dû à Siu [Siu74] (voir aussi [Dem87] pour une preuve plus simple fondée sur un théorème de comparaison pour les nombres de Lelong) affirme que les nombres de Lelong sont indépendants du choix des coordonnées locales. Ceci permet de définir les nombres de Lelong d'un courant positif fermé sur une variété analytique complexe X. De plus, pour tout $r > 0$, la fonction $x \mapsto \nu(T, x,\, \log r)$ est semi-continue supérieurement, et donc la fonction $x \mapsto \nu(T, x)$ est aussi semi-continue supérieurement, comme limite décroissante de fonctions semi-continues supérieurement. En particulier, sur une variété compacte X, les nombres de Lelong d'un courant positif fermé sont bornés supérieurement.

Rappelons un résultat fondamental de Siu [Siu74] suivant lequel les nombres de Lelong d'un courant positif fermé sont semi-continus supérieurement pour la topologie de Zariski analytique. En d'autres termes, pour les réels $c > 0$, les ensembles de niveau

$$E_c(T) = \{x \in X; \nu(T,x) \geq c\}$$

sont des sous-ensembles analytiques de la variété complexe X. Si le courant positif fermé T est de bidegré (p,p), la dimension de toute composante irréductible de $E_c(T)$ est $\leq n-p$. De plus, les composantes irréductibles $(Z_k)_k$ de dimension maximale $n-p$ qui apparaissent dans les ensembles de niveau $E_c(T)$, peuvent être “soustraites” à T, à savoir, le courant peut être écrit comme une série convergente dans la topologie faible des courants :

$$T = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \,[Z_k] + R,$$

où le courant résiduel R est positif fermé et a la propriété que $\dim E_c(R) < n-p$ pour tout $c > 0$. Cette décomposition est unique, car $\lambda_k = \min_{x \in Z_k} \nu(T,x)$ est le nombre de Lelong générique de T sur Z_k.

Mentionnons finalement que les nombres de Lelong peuvent être définis pour des courants qui sont seulement quasi-positifs fermés, car la partie négative a une contribution nulle.

3.0.14.2 Opérateurs et masses de Monge-Ampère. Soit u une fonction psh non identiquement $-\infty$ et T un (p,p)-courant positif fermé sur X. Le $(1,1)$-courant positif fermé $dd^c u$ s'écrit localement, par rapport à un système de coordonnées holomorphes $z = (z_1, \ldots, z_n)$, comme :

$$dd^c u = \frac{i}{\pi} \sum_{j,\, k=1,\ldots,\, n}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

les coefficients $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$ étant calculés au sens des distributions. Par ailleurs, le (p,p)-courant T s'écrit localement comme :

$$T = i^{p^2} \sum_{|J|=|K|=p}^{n} T_{J,K}\, dz_J \wedge d\bar{z}_K,$$

où les coefficients $T_{J,K}$ sont des mesures complexes qui satisfont $\overline{T}_{J,K} = T_{K,J}$ pour tous $|J| = |K| = p$. De plus, les coefficients diagonaux $T_{J,J}$ sont des mesures positives. Ceci est une conséquence de la positivité de T. (En général, pour des courants non nécessairement positifs, les coefficients $T_{J,K}$ sont seulement des distributions).
Le produit $dd^c u \wedge T$ n'a pas de sens a priori car on ne peut pas multiplier deux distributions. Néanmoins, si la fonction psh u est localement bornée, le produit uT est bien défini car il y a un sens à considérer les produits $uT_{J,K}$ d'une fonction borélienne localement bornée par une mesure. Cette observation permet à Bedford et Taylor [BT82] de définir :

$$(0.2.4) \qquad dd^c u \wedge T = dd^c(uT).$$

Le courant $dd^c u \wedge T$ ainsi défini est encore un courant positif fermé. En particulier, pour des fonctions plurisousharmoniques localement bornées $u_1, \ldots, u_q$, on définit par récurrence le courant positif fermé :

$$dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T = dd^c(u_1\, dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T),$$

Les opérateurs $u \mapsto (dd^c u)^q$ sont appelés **opérateurs de Monge-Ampère**.
Pour un (p,p)-courant Θ d'ordre 0, à savoir un courant qui s'écrit localement comme :

$$\Theta = i^{p^2} \sum_{|I|=|J|=p} \Theta_{I,\,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

avec des coefficients mesures $\Theta_{I,\,J}$, on définit la **mesure masse** de Θ par : $||\Theta|| = \sum |\Theta_{I,\,J}|$, où $|\Theta_{I,\,J}|$ est la mesure positive définie comme la variation totale de la mesure complexe $\Theta_{I,\,J}$. Si donc U est un ouvert inclus dans un domaine de carte, on définit la masse de Θ sur U comme :

$$||\Theta||_U = \int_U \sum_{I,\,J} |\Theta_{I,\,J}|.$$

La mesure masse dépend du choix des coordonnées locales, mais si le courant Θ est positif, elle est équivalente à la mesure trace σ_Θ de Θ définie dans (0.2.1). Plus précisément, pour tout compact K inclus dans un domaine de carte, il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

$$C_1 ||\Theta||_K \leq \int_K \Theta \wedge \left(\frac{1}{2} dd^c |z|^2\right)^{n-p} \leq C_2 ||\Theta||_K.$$

Plus généralement, pour tout compact $K \subset X$, on définit la masse de Θ sur K par :

$$||\Theta||_K = \sum_j \int_{K_j} \sum_{I,\,J} |\Theta_{I,\,J}|,$$

où $K = \cup K_j$ est une partition de K telle que chaque compact $\overline{K}_j$ est inclus dans un domaine de carte et les $\Theta_{I,\,J}$ sont les coefficients de Θ dans la carte respective. La mesure masse $||\Theta||_K$ ne dépend pas des cartes choisies modulo multiplication par des constantes. Si ω est une métrique hermitienne arbitraire sur X, l'équivalence de la mesure masse avec la mesure trace relative à ω s'écrit :

$$C_1 ||\Theta||_K \leq \int_K \Theta \wedge \omega^{n-p} \leq C_2 ||\Theta||_K,$$

où $C_1, C_2 > 0$ sont des constantes. Pour un courant de Monge-Ampère $\Theta = (dd^c u)^q$, on définit naturellement sa **masse de Monge-Ampère** sur K par :

$$||(dd^c u)^q||_K = \int_K (dd^c u)^q \wedge \omega^{n-q}.$$

3.0.14.3 Faisceaux d'idéaux multiplicateurs de Nadel. Soit φ une fonction plurisousharmonique sur une variété complexe X. On associe à φ le sous-faisceau d'idéaux $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X$ défini comme :

$$\mathcal{I}(\varphi)_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}\,;\, \exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } \textstyle\int_V |f|^2 e^{-2\varphi}\, d\lambda < +\infty\},$$

pour tout point $x \in X$, où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue dans un système de coordonnées locales au voisinage de x. En particulier, la variété des zéros $V\mathcal{I}(\varphi)$ est l'ensemble des points $x \in X$ au voisinage desquels $e^{-2\varphi}$ n'est pas intégrable.

Ces faisceaux, introduits par Nadel ([Nad90]), sont importants dans l'étude des singularités des fonctions psh. Leur propriété la plus remarquable est donnée par la

Proposition 3.0.14.4 (Nadel, 1990.) *Pour toute fonction plurisousharmonique φ sur X, le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)$ est cohérent. De plus, si $\Omega \subset\subset X$ est un ouvert de Stein à bord strictement pseudoconvexe, le faisceau $\mathcal{I}(\varphi)_{|\Omega}$ est engendré par une base orthonormée quelconque de l'espace de Hilbert*

$$\mathcal{H}_\Omega(\varphi) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega)\,;\, \textstyle\int_\Omega |f|^2 e^{-2\varphi} d\lambda < +\infty\}.$$

La preuve est la suivante (cf. [Dem93], Lemma 4.4, p. 333). Le résultat étant local, on peut supposer que $X = \Omega$ est un ouvert de Stein de $\mathbb{C}^n$. Soit $(g_l)_{l\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée dénombrable de l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}_\Omega(\varphi)$. On considère la suite ascendante de sous-faisceaux cohérents du faisceau cohérent $\mathcal{O}_\Omega$:

$$\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{J}_N \subset \ldots,$$

où chaque $\mathcal{J}_N$ est le faisceau engendré par $g_1, \ldots, g_N$. Grâce à la propriété noethérienne forte des faisceaux cohérents, cette suite est localement stationnaire sur Ω et le faisceau $\mathcal{J} \coloneqq \cup \mathcal{J}_N = (g_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est cohérent. On a évidemment $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(\varphi)$.

On va montrer que l'on a en fait égalité, d'où la proposition. Par le lemme de Nakayama, il suffit de montrer que :

$$\mathcal{J}_x + \mathcal{M}^k_{X,x} \cap \mathcal{I}(\varphi)_x = \mathcal{I}(\varphi)_x,$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $k \in \mathbb{N}^\star$, où $\mathcal{M}_{X,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. En d'autres termes, il faut démontrer que pour tout $f \in \mathcal{I}(\varphi)_x$, défini sur un voisinage V de x, il existe une section globale $F \in \mathcal{H}_\Omega(\varphi)$ telle que $f - F \in \mathcal{M}^k_{X,x}$. Considérons une fonction tronquante $\theta \in C^\infty(\Omega)$, à support dans V et identiquement égale à 1 sur un voisinage de x. La fonction holomorphe locale f s'étend en une fonction C^∞ globale θf. On résout l'équation

$$\bar\partial u = \bar\partial(\theta f),$$

globalement sur Ω, à l'aide des estimations L^2 de Hörmander, dans le fibré en droites trivial muni de la métrique de poids strictement psh :

$$\psi(z) = \varphi(z) + (n+k-1)\log|z-x| + |z|^2.$$

Posons $F = \theta f - u$. Par construction, $F \in \mathcal{H}_\Omega(\varphi)$. Grâce au terme $(n+k-1)\log|z-x|$ dans le poids ψ, la solution u de l'équation s'annule au moins à l'ordre k en x, ce qui garantit que $u \in \mathcal{M}^k_{X,x}$. □

Finalement nous rappelons le théorème d'extension d'Ohsawa-Takegoshi dans un cas très particulier ([Ohs88, Corollaire 2, p. 266]) qui sera suffisant pour nos applications.

Théorème 3.0.14.5 *Soit Y une sous-variété complexe fermée de dimension pure de $\mathbb{C}^n$, soit Ω un ouvert borné pseudo-convexe et φ une fonction plurisousharmonique sur Ω. Alors, il existe une constante $A > 0$ qui dépend uniquement de Y et du diamètre de Ω, telle que pour toute fonction holomorphe f sur $Y \cap \Omega$ avec :*

$$\int_{Y\cap\Omega} |f|^2 e^{-\varphi}\, dV_Y < +\infty,$$

il existe une extension holomorphe F à Ω telle que :

$$\int_\Omega |F|^2 e^{-\varphi}\, dV \leq A \int_{Y\cap\Omega} |f|^2 e^{-\varphi}\, dV_Y < +\infty.$$

3.0.15 Estimation de la perte de positivité pour les courants régularisants

Nous reprenons les idées de la démonstration du théorème 3.0.13.3 telle que présentée dans [Dem92] pour en déduire que, si la forme γ est supposée de classe C^1, les courants régularisants T_m peuvent être choisis de sorte que l'ordre de grandeur de ε_m, qui mesure la perte de positivité dans T_m par rapport au courant initial T, est de $\dfrac{1}{\sqrt[4]{m}}$, lorsque $m \to +\infty$. Ceci n'était pas explicité dans [Dem92].

La démonstration du théorème 3.0.13.3 se faisait en deux étapes dans [Dem92]. Premièrement, la fonction quasi-psh φ était approchée localement par des fonctions quasi-psh à singularitées analytiques, et dans un deuxième temps, ces approximations locales étaient recollées en une approximation globale. Il n'y a pas de perte de positivité dans la procédure locale ; la perte de positivité de $\varepsilon_m\,\omega$ qui résulte au final est introduite par le processus de recollement. La technique de l'utilisation du noyau de Bergman pour obtenir des approximations locales est explicitée dans le résultat suivant.

Proposition 3.0.15.1 *(***Demailly, 1992***) Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ une fonction plurisousharmonique. Pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, on considère l'espace de Hilbert séparable sur $\mathbb{C}$:*

$$\mathcal{H}_U(m\varphi) := \{f \in \mathcal{O}(U)\,;\, \textstyle\int_U |f|^2 e^{-2m\varphi}\, d\lambda < \infty\},$$

et soit $(\sigma_{m,j})_{j\geq 0}$ une base orthonormée dénombrable. On définit la fonction psh à singularités analytiques :

$$\varphi_m(z) \coloneqq \frac{1}{2m}\log\sum_{j=0}^{+\infty}|\sigma_{m,j}(z)|^2.$$

Alors, les fonctions $(\varphi_m)_{m\geq 1}$ sont des approximations locales de φ, car il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de m et de φ, telles que :

(i) $\varphi(z) - \dfrac{C_1}{m} \leq \varphi_m(z) \leq \sup\limits_{||\zeta - z|| < r}\varphi(\zeta) + \dfrac{1}{m}\log\dfrac{C_2}{r^n}$,

pour tout $z \in U$, et tout $r < d_z(z, \partial U)$. En particulier, φ_m converge ponctuellement et dans la topologie L^1_{loc} vers φ, et implicitement $dd^c\varphi_m$ converge dans la topologie faible des courants vers $dd^c\varphi$, lorsque $m \to +\infty$.

(ii) $\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z)$, *pour tout $z \in U$.*

Le point de départ pour établir les inégalités (i) est l'observation que

$$\varphi_m(z) = \sup_{f\in B(1)} \tfrac{1}{m}\log|f(z)|,$$

où $B(1)$ est la boule unité de l'espace $\mathcal{H}_U(m\varphi)$. La majoration de φ_m est une conséquence immédiate de l'inégalité de la moyenne appliquée aux fonctions psh $|f|^2$, avec $f \in B(1)$. En revanche, la minoration de φ_m est beaucoup plus subtile et résulte d'une application astucieuse du théorème d'Ohsawa-Takegoshi en un point.

La deuxième étape consiste en un recollement des fonctions φ_m. Soit $T = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\varphi \geq \gamma$, un (1,1)-courant global sur X avec γ une (1,1)-forme de classe C^1 sur X. En fait, on peut toujours se ramener à cette situation quitte à remplacer T par $T - \alpha$ et γ par $\gamma - \alpha$.

La variété X étant compacte, il existe des recouvrements finis par des ouverts de cartes $X = \bigcup_{\nu=1}^{P} W_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{P} W'_\nu$ tels que $W'_\nu \subset\subset W_\nu$. Soit $R > 0$ tel que pour tout $x \in W'_\nu$, la boule de centre x et de rayon R par rapport au coordonnées de W_ν est relativement compacte dans W_ν. Fixons $\delta < \frac{R}{3}$ et $1 \leq \nu \leq P$. Considérons l'ensemble des $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}) \in \mathbb{Z}^{2n}$ tels que, si $a_{\nu\alpha} = (\alpha_1\delta, \ldots, \alpha_{2n}\delta)$ dans les coordonnées réelles de la carte W_ν, la boule $B(a_{\nu\alpha}, 3\delta)$ est relativement compacte dans W_ν. En d'autres termes, $(a_{\nu\alpha})_\alpha$ est une famille maximale de points de W_ν tels que les distances réciproques sont $\geq \delta$ et les les distances à ∂W_ν sont $\geq 3\delta$. Considérons les boules (par rapport aux coordonnées de W_ν) suivantes :

$$B'_{\nu\alpha} = B(a_{\nu\alpha}, \delta) \subset\subset B''_{\nu\alpha} = B(a_{\nu\alpha}, \tfrac{3}{2}\delta) \subset\subset B_{\nu\alpha} = B(a_{\nu\alpha}, 2\delta).$$

Les choix de R et de δ garantissent que $W'_\nu \subset \bigcup_\alpha B'_{\nu\alpha}$, et donc $X = \bigcup_{\nu,\alpha} B'_{\nu\alpha}$.

Soit $0 \leq \tau \leq 1$ une fonction C^∞ dans $[0, +\infty[$ telle que $\tau \equiv 1$ sur $[0, 1]$ et $\operatorname{Supp}\tau \subset$

$[0, \frac{9}{4}]$. On définit $\sigma_{\nu\alpha}(z) = \tau\left(\frac{||z-a_{\nu\alpha}||^2}{\delta^2}\right)$, où $||z-a_{\nu\alpha}||$ représente la distance de z à $a_{\nu\alpha}$ mesurée dans la carte W_ν. Alors $\sigma_{\nu\alpha} \equiv 1$ sur $B'_{\nu\alpha}$ et $\sigma_{\nu\alpha} \equiv 0$ sur $B''_{\nu\alpha}$. On peut donc voir $\sigma_{\nu\alpha}$ comme une fonction C^∞ sur X. Soit $\sigma = \sum_{\nu,\,\alpha} \sigma_{\nu,\,\alpha}$. Comme les boules $B'_{\nu\alpha}$ recouvrent X, on voit que $\sigma \geq 1$ sur X. Soit enfin $\theta_{\nu\alpha} = \frac{\sigma_{\nu\alpha}}{\sigma}$. On a alors $\sum_{\nu,\,\alpha} \theta_{\nu\alpha} \equiv 1$ sur X. Pour alléger les notations dans la suite, on va remplacer le double indice ν, α par l'indice simple j.

En résumé, étant donné un $\delta > 0$, on a construit trois recouvrements $(B'_j)_j, (B''_j)_j, (B_j)_j$ de X par des boules de coordonnées de rayons respectifs $\delta, \frac{3}{2}\delta, 2\delta$, et une partition de l'unité $(\theta_j)_j$ de X subordonnée au recouvrement $(B''_j)_j$.

En vue d'un usage ultérieur, nous énonçons le lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.0.15.2 *La partition de l'unité $(\theta_j)_j$ vérifie les estimations suivantes :*

(i) Pour tout entier $l \geq 0$, il existe une constante C_l dépendant uniquement de l et indépendante de δ, telle que pour tout $0 \leq k \leq l$ et tout j, on a :

$$\sup_{x\in X} ||d^k\theta_j(x)|| \leq \frac{C_l}{\delta^l},$$

où $d^k\theta_j(x)$ est le vecteur des dérivées partielles d'ordre k de θ_j en x par rapport aux coordonnées de la carte W_ν qui contient B_j et $||d^k\theta_j||$ est la norme euclidienne de celui-ci dans l'espace $\mathbb{C}^{N_k}$ correspondant.

(ii) Si ω est une métrique hermitienne sur X, il existe une constante $C' > 0$ indépendante de δ telle que

$$\theta_j\, i\partial\bar\partial\theta_j - i\partial\theta_j \wedge \bar\partial\theta_j \geq -\frac{C'}{\delta^2}\,\omega, \qquad \textit{sur } X, \textit{ pour tout } j.$$

Preuve. (i) L'inégalité s'obtient facilement par un calcul élémentaire direct pour σ_j. Comme au plus $5^{2n}P$ des boules B_j passent par un point donné de X, et donc au plus $5^{2n}P$ des fonctions σ_j sont non nulles en un point donné de X, on obtient la même estimation pour θ_j.

(ii) Comme $\theta_j = \frac{\sigma_j}{\sigma}$, on a

$$\theta_j\, i\partial\bar\partial\theta_j - i\partial\theta_j \wedge \bar\partial\theta_j = \frac{1}{\sigma^2}(\sigma_j\, i\partial\bar\partial\sigma_j - i\partial\sigma_j \wedge \bar\partial\sigma_j) - \frac{\sigma_j^2}{\sigma^4}(\sigma\, i\partial\bar\partial\sigma - i\partial\sigma \wedge \bar\partial\sigma).$$

Comme précédemment, il suffit de démontrer l'estimation pour σ_j, car au plus $5^{2n}P$ des fonctions σ_j sont non nulles en un point donné de X. On a

$$\sigma_j\, i\partial\bar\partial\sigma_j - i\partial\sigma_j \wedge \bar\partial\sigma_j = i\sum_{k,\,l}\left(\sigma_j\frac{\partial^2\sigma_j}{\partial z_k\partial\bar z_l} - \frac{\partial\sigma_j}{\partial z_k}\frac{\partial\sigma_j}{\partial\bar z_l}\right)dz_k \wedge d\bar z_l,$$

et, compte tenu de la définition de σ_j, si on suppose que les coordonnées de la carte B_j sont centrées en a_j (quitte à faire une translation), on obtient :

$$\sigma_j \frac{\partial^2 \sigma_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} - \frac{\partial \sigma_j}{\partial z_k} \frac{\partial \sigma_j}{\partial \bar{z}_l} = \frac{1}{\delta^2} \Big(\sigma_j(z) \tau'(\frac{||z||^2}{\delta^2}) \delta_{kl} + \sigma_j(z) \tau''(\frac{||z||^2}{\delta^2}) \frac{z_l \bar{z}_k}{\delta^2} - \tau'(\frac{||z||^2}{\delta^2})^2 \frac{z_l \bar{z}_k}{\delta^2} \Big).$$

Comme σ_j est à support dans la boule de rayon $\frac{3}{2}\delta$, on voit que $\dfrac{z_l \bar{z}_k}{\delta^2}$ est majoré par une constante indépendante de δ sur le support de σ_j. De plus, $0 \leq \sigma_j \leq 1$, et l'estimation recherchée s'ensuit. $\square$

Pour $\delta > 0$, considérons maintenant un module de continuité $\varepsilon(\delta)$ pour la forme γ sur les ouverts B_j, à savoir une fonction $\varepsilon(\delta) > 0$ telle que $\lim_{\delta \to 0} \varepsilon(\delta) = 0$ et $\gamma_x - \gamma_{x'} \leq \frac{1}{2}\varepsilon(\delta)\omega_x$, pour tous $x, x' \in B_j$. Fixons un j avec $B_j \subset\subset W_\nu$. Soit :

$\tau_j : B_j \to B(a_j, 2\delta)$,

l'isomorphisme défini par les coordonnées de W_ν, et soit $\varphi_j = \varphi \circ \tau_j^{-1}$ fonction quasi-psh sur $B(a_j, 2\delta)$. On considère également γ_j, la (1,1)-forme à coefficients constants sur $B(a_j, 2\delta)$, telle que :

$\tau_j^\star \gamma_j = \gamma - \varepsilon(\delta)\, \omega, \quad$ au point $\tau_j^{-1}(a_j)$.

On a ainsi :

$$(0.3.1) \qquad 0 \leq \gamma - \tau_j^\star\, \gamma_j \leq 2\varepsilon(\delta)\, \omega, \quad \text{sur } B_j,$$

pour $\delta > 0$ petit. Soit $\tilde{\gamma}_j$ la fonction quadratique homogène en $z - a_j$ telle que $\frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\tilde{\gamma}_j = \gamma_j$, sur $B(a_j, 2\delta)$. Posons :

$$\psi_j = \varphi - \tilde{\gamma}_j \circ \tau_j, \quad \text{sur } B_j.$$

Il est clair que la fonction ψ_j est plurisousharmonique sur l'ouvert B_j. En définitive, cette procédure avait pour but de soustraire au potentiel global φ de T la partie de hessian complexe éventuellement négatif (bornée par γ) pour obtenir localement des potentiels psh ψ_j. La procédure d'approximation locale décrite dans la proposition 3.0.15.1 est appliquée maintenant à ces potentiels locaux ψ_j. On trouve ainsi des fonctions psh :

$$\psi_{j,m} = \tfrac{1}{2m} \log \sum_l |\sigma_{j,l}|^2, \qquad \text{avec } (\sigma_{j,l}) \text{ une base orthonormée de } \mathcal{H}_{B_j}(m\psi_j),$$

qui sont des approximations locales à singularités analytiques de ψ_j. La régularisation globale de φ est obtenue en recollant les fonctions suivantes :

$$(0.3.2) \qquad w_j(x) = 2m\tilde{\gamma}_j(z^j) + m^{\frac{3}{4}}(\delta^2 - |z^j|^2) + \log \sum_l |\sigma_{j,l}(x)|^2,$$

où $z^j = \tau_j(x)$ désigne les coordonnées locales qui identifient B_j à $B(a_j, 2\delta)$. Le processus de recollement au moyen d'une partition de l'unité est explicité dans le lemme suivant.

Lemme 3.0.15.3 *(Lemme 3.5 de [Dem92].) Soit $B_j' \subset\subset B_j'' \subset\subset B_j$ des recouvrements* *localement finis de la variété complexe X par des ouverts de cartes relativement compacts, et soit θ_j des fonctions C^∞ positives à support dans B''_j, telles que $\theta_j \leq 1$ sur B''_j et $\theta_j = 1$ sur B'_j. Soit $A_j \geq 0$ des constantes telles que :*

$$i(\theta_j \partial\bar{\partial}\theta_j - \partial\theta_j \wedge \bar{\partial}\theta_j) \geq -A_j\omega, \qquad \text{sur } B''_j \setminus B'_j.$$

On considère aussi des fonctions quasi-psh w_j sur B_j telles que $i\partial\bar{\partial}w_j \geq u$ avec une (1,1)-forme u continue sur X, et des constantes C_j telles que :

$$w_j(x) \leq C_j + \sup_{k\neq j,\, B'_k \ni x} w_k(x), \qquad \text{sur } B''_j \setminus B'_j.$$

Alors la fonction $w = \log(\sum_j \theta_j^2 e^{w_j})$ est quasi-psh sur X et vérifie :

$$i\partial\bar{\partial}w \geq u - 2(\sum_j 1\!\mathrm{I}_{U''_j \setminus U'_j} A_j e^{C_j})\omega.$$

Pour pouvoir appliquer ce lemme aux fonctions w_j définies par les relations (0.3.2) avec les recouvrements de X construits précédemment, il faut s'assurer qu'elles satisfont les hypothèses du lemme. Pour le hessien de w_j on obtient l'estimation :

$$i\partial\bar{\partial}w_j \geq 2m\,\tau_j^\star\gamma_j - m^{\frac{3}{4}}\,\tfrac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}|z^j|^2 \geq 2m\,(\gamma - 2\varepsilon(\delta)\omega) - C'\,m^{\frac{3}{4}}\,\omega,$$

compte tenu de la relation (0.3.1). Le lemme 3.0.15.2 montre qu'avec nos choix des boules B_j, les constantes A_j peuvent être choisies comme

$$A_j = A_j(\delta) = C''\,\tfrac{1}{\delta^2}.$$

Le lemme 3.0.15.6 ci-dessous montre que les constantes C_j peuvent être choisies égales à 0 pour m grand. Comme le nombre maximum de boules B''_j qui peuvent se rencontrer en un point quelconque de X est $N = N(n) = 5^{2n}\,P$, donc indépendant de δ, on obtient :

$$\sum_j 1\!\mathrm{I}_{U''_j \setminus U'_j} A_j e^{C_j} \leq C''\,\frac{N}{\delta^2}.$$

Le lemme 3.0.15.3 implique alors que le hessien de la fonction quasi-psh globale $\psi_m = \frac{1}{2m}\log(\sum_j \theta_j^2\, e^{w_j})$ vérifie l'estimation :

$$\text{(0.3.3)} \qquad i\,\partial\bar{\partial}\psi_m \geq \gamma - \left(2\varepsilon(\delta) + 2\,C''\,\frac{N}{m\,\delta^2} + C'\,\frac{1}{m^{\frac{1}{4}}}\right)\omega.$$

Il reste à régler le problème du choix des constantes C_j. Le terme $m^{\frac{3}{4}}(\delta^2 - |z^j|^2)$ a été ajouté dans la définition (0.3.2) de w_j pour assurer le bon comportement des fonctions w_j les unes par rapport aux autres et l'existence ainsi des C_j. Nous avons besoin d'une observation très simple qui était déjà présente dans [Dem92].

Lemme 3.0.15.4 *Pour tout choix des indices j, k tels que $B_j \cap B_k \neq \emptyset$, il existe une fonction holomorphe h_{jk} sur $B_j \cup B_k$ telle que*

$$|\tilde{\gamma}_j \circ \tau_j - \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k - Re\, h_{jk}| \leq C_1\, \varepsilon(\delta)\, \delta^2, \qquad \textit{sur } B_j \cap B_k,$$

avec une constante $C_1 > 0$ *indépendante de* δ.

Preuve. Le hessien de $\tilde{\gamma}_j \circ \tau_j - \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k$ est égal à $\tau_j^\star \gamma_j - \tau_k^\star \gamma_k$ sur $B_j \cap B_k$. La relation (0.3.1) implique alors l'estimation :

$$-4\, \varepsilon(\delta)\, \omega \leq \tfrac{i}{\pi}\, \partial\bar{\partial}(\tilde{\gamma}_j \circ \tau_j - \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k) \leq 4\, \varepsilon(\delta)\, \omega, \qquad \text{sur } B_j \cap B_k.$$

La fonction $\tilde{\gamma}_j$ étant quadratique homogène à coefficients constants, elle diffère de toutes les fonctions obtenues par translation par une fonction affine. Si donc $b_j \in B_j$ et $b_k \in B_k$, la fonction

$$[\tilde{\gamma}_j(\tau_j(x)) - \tilde{\gamma}_j(\tau_j(x) - b_j)] - [\tilde{\gamma}_k(\tau_k(x)) - \tilde{\gamma}_k(\tau_k(x) - b_k)]$$

est pluriharmonique (car de hessien nul) et donc égale à la partie réelle d'une fonction holomorphe h_{jk} sur $B_j \cup B_k$. En fait, on peut rétrécir les boules, si nécessaire, afin que les cartes τ_j soient définies non seulement sur chaque boule B_j mais aussi sur toutes les boules B_k adjacentes. Si b_j et b_k sont choisis tels que $\tilde{\gamma}_j(\tau_j(x) - b_j)$ et $\tilde{\gamma}_k(\tau_j(x) - b_k)$ ont un point critique commun dans $B_j \cap B_k$, on a :

$$|\tilde{\gamma}_j \circ \tau_j - \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k - \mathrm{Re}\, h_{jk}| = |\tilde{\gamma}_j(\tau_j - b_j) - \tilde{\gamma}_k(\tau_k - b_k)| \leq C_1\, \varepsilon(\delta)\, \delta^2,$$

sur $B_j \cap B_k$, car le hessien est un $O(\varepsilon(\delta))$ et diam $(B_j \cap B_k) = O(\delta)$. $\square$

Le choix des constantes C_j est explicité dans les deux lemmes suivants.

Lemme 3.0.15.5 *Il existe des constantes* $C > 0$ *et* $C_8(n) > 0$ *indépendantes de* m *et de* δ *telles que les fonctions quasi-psh*

$$\tilde{w}_j(x) = 2m\tilde{\gamma}_j(z^j) + \log \sum_l |\sigma_{j,l}(x)|^2, \qquad x \in B_j,$$

satisfont les estimations

$$|\tilde{w}_j - \tilde{w}_k| \leq 2m\, C\varepsilon(\delta)\, \delta^2 + 16\delta^2 - 2\log\delta - C_8(n), \qquad \textit{sur } B_j'' \cap B_k''.$$

Preuve. Les fonctions $\tilde{w}_j$ s'écrivent comme

$$\tilde{w}_j = 2m(\psi_{j,m} + \tilde{\gamma}_j \circ \tau_j),$$

où $\psi_{j,m} = \frac{1}{2m} \log \sum_l |\sigma_{j,l}|^2$ est une régularisation de ψ_j. Pour démontrer le lemme, il faut estimer uniformément l'écart entre $\psi_{j,m}$ et $\psi_{k,m}$ sur $B_j'' \cap B_k''$ en fonction du rayon de ces boules. Soit f_j une fonction holomorphe sur B_j telle que

$$\int_{B_j} |f_j|^2\, e^{-2m\psi_j}\, d\lambda = 1,$$

où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue définie par les coordonnées de la carte W_ν qui contient B_j et B_k. Par définition de ψ_j et ψ_k, on a :

$$\psi_j - \psi_k = \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k - \tilde{\gamma}_j \circ \tau_j, \qquad \text{sur } B_j \cap B_k.$$

Le lemme précédent 3.0.15.4 implique :

$$\psi_j \leq \psi_k - \operatorname{Re} h_{jk} + C_1\, \varepsilon(\delta)\, \delta^2, \quad \text{sur } B_j \cap B_k, \text{ et donc :}$$

$$\int_{B_j \cap B_k} |f_j|^2\, e^{-2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk})}\, d\lambda \leq e^{2mM(\delta)}, \text{ avec } M(\delta) := C_1\, \varepsilon(\delta)\, \delta^2.$$

Soit $x_0 \in B''_j \cap B''_k$. Nous allons démontrer qu'il existe une fonction f_k holomorphe sur B_k telle que $f_k(x_0) = f_j(x_0)$ et qui vérifie l'estimation

$$\int_{B_k} |f_k|^2\, e^{-2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk})}\, d\lambda \leq 2\, e^{2mM(\delta)} \left(1 + C_6(n)\, \frac{e^{16\delta^2}}{\delta^2} \right).$$

L'idée, classique, est d'utiliser les estimations L^2 de Hörmander pour résoudre une équation du $\bar{\partial}$ sur B_k. Soit θ une fonction tronquante à support dans $B(x_0, \frac{\delta}{4}) \subset B_j \cap B_k$ telle que $\theta \equiv 1$ sur $B(x_0, \frac{\delta}{8})$. On résout l'équation

$$\bar{\partial} g = \bar{\partial}(\theta f_j) \qquad \text{sur } B_k,$$

avec le poids strictement plurisousharmonique

$$2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk}) + 2n \log |z - x_0| + |z - x_0|^2.$$

On obtient ainsi une solution g satisfaisant l'estimation

$$\int_{B_k} \frac{|g(z)|^2}{|z - x_0|^{2n}}\, e^{-2m(\psi_k(z) - \operatorname{Re} h_{jk})}\, e^{-|z-x_0|^2}\, d\lambda(z) \leq$$
$$\leq 2 \int_{B_k} \frac{|\bar{\partial}\theta|^2\, |f_j|^2}{|z - x_0|^{2n}}\, e^{-2m(\psi_k(z) - \operatorname{Re} h_{jk})}\, e^{-|z-x_0|^2}\, d\lambda(z).$$

Il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de m et de δ telle que $|\bar{\partial}\theta| \leq \frac{C_3}{\delta}$. Comme le support de $\bar{\partial}\theta$ est inclus dans $B(x_0, \frac{\delta}{4}) \setminus B(x_0, \frac{\delta}{8})$, on a $\frac{1}{|z-x_0|^{2n}} \leq \frac{C_4(n)}{\delta^{2n}}$, sur le support de $\bar{\partial}\theta$. Ceci entraîne que l'intégrale de droite est majorée par

$$\frac{C_3^2\, C_4(n)}{\delta^{2n+2}} \int_{B_j \cap B_k} |f_j|^2\, e^{-2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk})}\, d\lambda \leq e^{2mM(\delta)}\, \frac{C_3^2\, C_4(n)}{\delta^{2n+2}}.$$

Par ailleurs, l'intégrale de gauche est minorée par

$$\frac{C_5(n)}{e^{16\delta^2}\, \delta^{2n}} \int_{B_k} |g|^2\, e^{-2m(\psi_k - \operatorname{Re} h_{jk})}\, d\lambda,$$

car pour $z \in B_k$, $\dfrac{1}{e^{|z-x_0|^2}} \geq \dfrac{1}{e^{16\delta^2}}$ et $\dfrac{1}{|z - x_0|^{2n}} \geq \dfrac{C_5(n)}{\delta^{2n}}$. En combinant les deux, on obtient l'estimation

$$\int_{B_k} |g|^2 \, e^{-2m(\psi_k - \mathrm{Re}\, h_{jk})} \, d\lambda \leq C_6(n) \, e^{2mM(\delta)} \, \frac{e^{16\delta^2}}{\delta^2}.$$

La non-intégrabilité de $|z - x_0|^{-2n}$ force la solution g à s'annuler en x_0. La fonction recherchée est $f_k = \theta \, f_j - g$. Elle est holomorphe sur B_k et $f_k(x_0) = f_j(x_0)$. Sa norme L^2 vérifie l'estimation

$$\int_{B_k} |f_k|^2 \, e^{-2m(\psi_k - \mathrm{Re}\, h_{jk})} \, d\lambda \leq 2 \, e^{2mM(\delta)} \left(1 + C_6(n) \, \frac{e^{16\delta^2}}{\delta^2}\right).$$

En ajustant f_k par une constante pour qu'elle soit dans la sphère unité de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{B_k}(m(\psi_k - \mathrm{Re}\, h_{jk}))$, en prenant le sup de $\log |f_j(x_0)|$ et de $\log |f_k(x_0)|$ sur tous les f_j et f_k dans la boule unité de l'espace de Hilbert correpondant, on obtient l'estimation

$$\psi_{j,m}(x_0) \leq \psi_{k,m}(x_0) - \mathrm{Re}\, h_{jk} + M(\delta) + \tfrac{\log 2}{2m} + \tfrac{1}{2m} \, \log \left(1 + C_6(n) \, \tfrac{e^{16\delta^2}}{\delta^2}\right).$$

Cette estimation est uniforme par rapport au point $x_0 \in B''_j \cap B''_k$, car pour tout point $x \in B''_j \cap B''_k$, on a $B(x, \frac{\delta}{4}) \subset\subset B_j \cap B_k$, donc le choix du rayon $\frac{\delta}{4}$ est uniforme. Il ne reste plus qu'à observer que l'estimation évidente

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2m} |\tilde{w}_j - \tilde{w}_k| &= |\psi_{j,m} - \psi_{k,m} + \tilde{\gamma}_j \circ \tau_j - \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k| \\ &\leq |\psi_{j,m} - \psi_{k,m} + \mathrm{Re}\, h_{jk}| + |\tilde{\gamma}_j \circ \tau_j - \tilde{\gamma}_k \circ \tau_k - \mathrm{Re}\, h_{jk}|, \end{aligned}$$

combinée avec le lemme 3.0.15.4, la définition de $M(\delta)$, et la majoration évidente de $1 + C_6(n) \, \frac{e^{16\delta^2}}{\delta^2}$ par $C_7(n) \, \frac{e^{16\delta^2}}{\delta^2}$, entraîne l'estimation uniforme annoncée pour $|\tilde{w}_j - \tilde{w}_k|$ sur $B''_j \cap B''_k$. □

Comme la $(1,1)$-forme γ est supposée de classe C^1, le module de continuité $\varepsilon(\delta)$ peut être choisi égal à $C_1 \, \delta$, pour une constante $C_1 > 0$ indépendante de δ et de m. Soit $B_j^{(3)}$ la boule concentrique à B_j et de rayon $\frac{\delta}{2}$. On peut supposer que les boules $(B_j^{(3)})_j$ recouvrent encore la variété X.

Lemme 3.0.15.6 *Avec le choix $\delta = \delta(m) = \frac{1}{\sqrt[3]{m}}$ pour le rayon des boules B_j, on a :*

$$w_j \leq w_k, \qquad \text{sur } (\bar{B}''_j \setminus B'_j) \cap B_k^{(3)},$$

pour m suffisamment grand. Implicitement, on peut choisir $C_j = 0$ dans le lemme 3.0.15.3.

Preuve. On rappelle que $w_j(x) = \tilde{w}_j(x) + m^{\frac{3}{4}} \, (\delta^2 - |z^j|^2)$. En appliquant le lemme 3.0.15.5, on obtient, après absorber la constante C_1 dans C,

$$w_j - w_k \leq 2m \, C \, \delta^3 + 16\delta^2 - 2 \log \delta - C_8(n) + m^{\frac{3}{4}} \, (\delta^2 - |z^j|^2) - m^{\frac{3}{4}} \, (\delta^2 - |z^k|^2),$$

sur $B''_j \cap B''_k$. Pour avoir $w_j \leq w_k$ il suffirait donc d'avoir

$$2m \, C \, \delta^3 + 16\delta^2 - 2 \log \delta - C_8(n) \leq m^{\frac{3}{4}} \, (\delta^2 - |z^k|^2) - m^{\frac{3}{4}} \, (\delta^2 - |z^j|^2).$$

Si on choisit $x \in (\bar{B}''_j \setminus B'_j) \cap B^{(3)}_k$, l'expression $(\delta^2 - |z^k|^2) - (\delta^2 - |z^j|^2)$ considérée au point x vérifie :

$$(\delta^2 - |z^k|^2) - (\delta^2 - |z^j|^2) = (\delta^2 - |x - a_k|^2) - (\delta^2 - |x - a_j|^2) \geq \delta^2 - \tfrac{\delta^2}{4} = \tfrac{3}{4}\,\delta^2.$$

Il suffit alors d'avoir

$$2m\,C\,\delta^3 + 16\delta^2 - 2\log\delta - C_8(n) \leq \tfrac{3}{4}\,\delta^2\,m^{\frac{3}{4}},$$

pour avoir l'inégalité voulue. Si $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{m}}$, ceci équivaut à :

$$2C + 16\,m^{-\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3}\,\log m - C_8(n) \leq \tfrac{3}{4}\,m^{\frac{1}{12}}.$$

Comme le terme de droite tend vers $+\infty$ plus vite que le terme de gauche, cette relation est satisfaite pour $m \geq m_0$ grand. □

Avec les choix $\varepsilon(\delta) = C_1\,\delta$ et $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{m}}$, la relation (0.3.3.) montre que la perte de positivité du hessien de ψ_m par rapport à γ est de $2C_1\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}} + 2C''N\,\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}} + C'\,\dfrac{1}{\sqrt[4]{m}} =$

$$\frac{C_2}{\sqrt[3]{m}} + \frac{C'}{\sqrt[4]{m}} \leq \frac{C_3}{\sqrt[4]{m}},$$

avec une constante $C_3 > 0$ indépendante de m. On a ainsi démontré la

Proposition 3.0.15.7 *Sous les hypothèses du théorème 3.0.13.3, si le courant quasi-positif fermé $T = \alpha + i\partial\bar{\partial}\varphi$ de bidegré $(1,1)$ vérifie $T \geq \gamma$ sur une variété hermitienne compacte (X,ω), pour une $(1,1)$-forme réelle γ de classe C^1, alors les courants régularisants $T_m \to T$ peuvent être choisis tels que*

$$T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\psi_m \geq \gamma - \frac{C}{\sqrt[4]{m}}\,\omega,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de m.

Nous concluons ce paragraphe en observant que l'on peut avoir une meilleure estimation pour la perte de positivité des courants régularisants si la forme γ est supposée de plus fermée et de classe C^∞.

Proposition 3.0.15.8 *Soit (X,ω) une variété hermitienne compacte et $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$ un courant quasi-positif fermé de bidegré $(1,1)$ qui vérifie $T \geq \alpha$ pour une $(1,1)$-forme réelle α supposée fermée et de classe C^∞. Alors les courants régularisants $T_m \to T$ donné par le théorème 3.0.13.3 peuvent être choisis en sorte que*

$$T_m = \alpha + i\partial\bar{\partial}\psi_m \geq \gamma - \frac{C}{m}\,\omega,$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de m.

Démonstration. Comme d'habitude, on peut supposer $\alpha = 0$ et $T = i\partial\overline{\partial}\varphi \geq \gamma$. La forme γ étant fermée, elle est localement exacte. Il existe alors, pour chaque boule B_j, une fonction h_j de classe C^∞ telle que $\gamma = i\partial\overline{\partial}h_j$ sur B_j. La fonction $h_j - h_k$ est pluriharmonique sur $B_j \cap B_k$ (car $i\partial\overline{\partial}(h_j - h_k) = 0$) et on peut supposer, quitte à rétrécir les boules B_j, qu'il existe une fonction holomorphe h_{jk} sur $B_j \cap B_k$ telle que $h_j - h_k = \operatorname{Re} h_{jk}$ sur $B_j \cap B_k$. On pose

$$\psi_j = \varphi - h_j, \qquad \text{fonction plurisousharmonique sur } B_j,$$

et on considère $\psi_{j,m} \to \psi_j$, des régularisations plurisousharmoniques à singularités analytiques de ψ_j sur B_j. Si $\frac{\delta}{2}$, δ, $\frac{3}{2}\delta$, et 2δ représentent, comme précédemment, les rayons des boules $B_j^{(3)} \subset B_j' \subset B_j'' \subset B_j$, on recolle les approximations quasi-psh locales $\varphi_{j,m} = \psi_{j,m} + h_j$ de φ sur B_j en une approximation globale

$$\psi_m(z) = \sup_{B_j'' \ni z} \left(\varphi_{j,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}(\delta^2 - |z^j|^2) \right),$$

où $C_1(\delta) > 0$ est une constante ne dépendant que de δ dont on précisera le choix plus bas, et où (z^j) est un système de coordonnées holomorphes locales centrées au centre de B_j. Comme $i\partial\overline{\partial}\varphi_{j,m} \geq i\partial\overline{\partial}h_j = \gamma$ sur B_j, le hessien de ψ_m vérifie l'estimation

$$i\partial\overline{\partial}\psi_m \geq \gamma - \frac{C'C_1(\delta)}{m}\omega \quad \text{ sur } X,$$

où $C' > 0$ est une constante telle que $i\partial\overline{\partial}|z^j|^2 \leq C'\omega$ sur B_j pour tous les j, si les fonctions quasi-psh $\varphi_{j,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}(\delta^2 - |z^j|^2)$ vérifient la condition de recollement

$$(\star\star) \qquad \varphi_{j,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}(\delta^2 - |z^j|^2) \leq \varphi_{k,m}(z) + \frac{C_1(\delta)}{m}(\delta^2 - |z^k|^2),$$

pour $z \in (\overline{B}_j'' \setminus B_j) \cap B_k^{(3)}$. Avec les notations précédentes on a :

$$\psi_j - \psi_k = h_k - h_j = -\operatorname{Re} h_{jk} \quad \text{ sur } B_j \cap B_k,$$

et la relation $(\star)$ de la démonstration du lemme 3.0.15.5 implique, via les estimations L^2 de Hörmander, la majoration uniforme

$$\psi_j - \psi_k = h_k - h_j = -\operatorname{Re} h_{jk} \quad \text{ sur } B_j \cap B_k,$$

où $C(\delta) = \dfrac{1}{2}\log\left(2 + 2C_6(n)\dfrac{e^{16\delta^2}}{\delta^2}\right)$. Ceci entraîne

$$\varphi_{j,m} - \varphi_{k,m} = \psi_{j,m} - \psi_{k,m} + \operatorname{Re} h_{jk} \leq \frac{C(\delta)}{m} \quad \text{ sur } B_j'' \cap B_k'',$$

Comme $(\delta^2 - |z^k|^2) - (\delta^2 - |z^j|^2) \geq \frac{3}{4}\delta^2$ pour $z \in (\overline{B}_j'' \setminus B_j') \cap B_k^{(3)}$, la condition $(\star\star)$ est satisfaite dès que l'on a l'égalité :

$$\frac{C(\delta)}{m} \leq \frac{3}{4}\frac{C_1(\delta)}{m}\delta^2.$$

On peut alors fixer $\delta > 0$ et choisir la constante $C_1(\delta)$ en sorte que l'inégalité ci-dessus soit satisfaite. Comme on l'a vu plus haut, la perte de positivité du hessien de ψ_m par rapport à γ est de $\frac{C'C_1(\delta)}{m}$. La proposition est démontrée. $\square$

3.0.16 Cohérence des faisceaux d'idéaux multiplicateurs avec estimations

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble pseudoconvexe borné et φ une fonction plurisousharmonique dans Ω. Fixons $z = (z_1, \ldots, z_n)$, un système de coordonnées holomorphes dans $\mathbb{C}^n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, considérons le faisceau d'idéaux multiplicateurs $\mathcal{I}(m\varphi)$ et l'espace de Hilbert de ses sections globales L^2

$$\mathcal{H}_\Omega(m\varphi) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega)\,;\, \int_\Omega |f|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda < +\infty\}.$$

Nous allons déduire une version effective, avec estimations, du résultat de [Nad89] affirmant que le faisceau $\mathcal{I}(m\varphi)$ est cohérent et engendré par une base orthonormée quelconque de l'espace $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$. La méthode nous a été fortement inspirée par l'article ([Siu02]). La différence réside dans le fait que nous travaillons avec des fonctions sur des ouverts pseudoconvexes au lieu de sections globales de fibrés en droites amples sur des variétés projectives.

Lemme 3.0.16.1 *Soit $d = \operatorname{diam}\Omega$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset\subset \Omega$. Étant donné une section $f \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{I}(m\varphi))$ telle que*

$$\int_{B(x,\,r)} |f|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda = C_f < +\infty,$$

il existe une section $F \in \Gamma(\Omega, \mathcal{I}(m\varphi))$ et des sections $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma(B(x, r), \mathcal{I}(m\varphi))$, telles que $f - F = \sum_{j=1}^{n} (z_j - x_j)/d \cdot v_j(z)$ sur $B(x, r)$, satisfaisant de plus les estimations :

$$\int_\Omega |F|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \leq \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f,$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{B(x,\,r)} |v_j|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \leq \frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f,$$

où $C(n) > 0$ est une constante ne dépendant que de n.

L'ingrédient essentiel dans la démonstration de ce lemme est le théorème de division L^2 de Skoda [Sko72b, 78] que nous rappelons ci-dessous.

Théorème 3.0.16.2 *(***Skoda, 1972***) Soit ψ une fonction plurisousharmonique dans un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ des fonctions holomorphes dans Ω (la suite σ_j peut être infinie). Soit $q = \min\{N-1, n\}$ et $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_j|^2$. Alors, pour toute fonction holomorphe f dans Ω, telle que*

$$\int_\Omega |f|^2\, |\sigma|^{-2(q+1+\delta)}\, e^{-2\psi}\, d\lambda < +\infty, \qquad \delta > 0,$$

il existe des fonctions holomorphes $g_1, \dots, g_N$ dans Ω telles que $f = \sum_{j=1}^{N} g_j\, \sigma_j$ et

$$\int_\Omega |g|^2\, |\sigma|^{-2(q+\delta)}\, e^{-2\psi}\, d\lambda \le \frac{\delta+1}{\delta} \int_\Omega |f|^2\, |\sigma|^{-2(q+1+\delta)}\, e^{-2\psi}\, d\lambda < +\infty,$$

où $|g|^2 = \sum_{j=1}^{N} |g_j|^2$.

Démonstration du lemme 3.0.16.1. Soit $\eta : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction C^∞ telle que $\eta(t) = 1$, si $t \le \frac{1}{4}$, $\eta(t) = 0$, si $t > 1$, et $|\eta'| \le 3$ sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction C^∞ sur Ω définie par $\theta(z) = \eta\left(\dfrac{|z-x|^2}{r^2}\right)$. Par conséquent, $\operatorname{Supp}\theta \subset \bar{B}(x,r)$ et $\theta(z) \equiv 1$ sur $\bar{B}(x, \frac{r}{2})$.

On utilise les estimations L^2 de Hörmander pour résoudre l'équation

$$\bar\partial u = \bar\partial(\theta f) \qquad \text{sur } \Omega,$$

avec le poids strictement plurisousharmonique

$$m\varphi(z) + (n+1)\, \log|z-x| + (|z-x|/d)^2.$$

On obtient une solution $u \in C^\infty(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \frac{|u(z)|^2}{|z-x|^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, e^{-2(|z-x|/d)^2}\, d\lambda(z) \le \\ 2d^2 \int_\Omega \frac{|\bar\partial\theta|^2 |f|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, e^{-2(|z-x|/d)^2}\, d\lambda(z).$$

Comme $|\bar\partial\theta(z)| \le \frac{3}{r^2}|z-x| \le \frac{3}{r}$, sur $\operatorname{Supp}\theta \subset B(x,r)$, et $\frac{r}{2} \le |z-x| \le r$, pour $z \in \operatorname{Supp}\bar\partial\theta \subset \bar{B}(x,r) \setminus B(x,\frac{r}{2})$, le terme de droite est majoré par :

$$\frac{1}{(\frac{r}{2d})^{2(n+1)}}\, \frac{18\, d^2}{r^2} \int_{B(x,\,r)} |f|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda = 18\, \frac{2^{2(n+1)}}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f.$$

Comme $|z-x| \le d = \operatorname{diam}(\Omega)$, le terme de gauche est minoré par :

$$e^{-2} \int_\Omega \frac{|u(z)|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z).$$

La solution u de l'équation vérifie alors l'estimation L^2 :

$$\int_\Omega \frac{|u(z)|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) \le 18\, e^2\, \frac{2^{2(n+1)}}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f.$$

Posons $F=\theta f-u$. La fonction F est holomorphe, par construction. Elle vérifie, de plus,

$$\int_\Omega |F(z)|^2\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) \leq$$
$$\leq 2 \int_\Omega |u(z)|^2\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) + 2 \int_\Omega |\theta(z)|^2\, |f(z)|^2\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z).$$

Si on pose $C_1(n)=18\, e^2\, 2^{2(n+1)}$ et $C_2(n)=2(1+C_1(n))$, on a l'estimation :

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned}\int_\Omega |F(z)|^2\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) &\leq 2\left(1+C_1(n)\frac{1}{(r/d)^{2(n+2)}}\right) C_f \\ &\leq \frac{C_2(n)}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f.\end{aligned}$$

De plus, $f-F=(1-\theta)f+u$ sur $B(x,r)$, et les estimations précédentes entraînent :

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} \frac{|f(z)-F(z)|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) &\leq 2\int_{B(x,r)} \frac{|u(z)|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) \\ &+ \int_{B(x,r)} \frac{|(1-\theta(z))\, f(z)|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) \\ &\leq C_2(r,d,n)\, C_f,\end{aligned}$$

où $\quad C_2(r,d,n)=\dfrac{2}{(r/d)^{2(n+1)}}\left(8\cdot 2^n+\dfrac{C_1(n)}{(r/d)^2}\right)$. Pour la deuxième intégrale, on a utilisé les majorations évidentes : $|1-\theta|^2 \leq 2(1+|\theta|^2) \leq 2^2$, et $\frac{1}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}} \leq \frac{1}{(\frac{r}{2d})^{2(n+1)}}$ sur $\mathrm{Supp}\,(1-\theta)\subset B(x,r)\setminus \bar{B}(x,\frac{r}{2})$.

On peut appliquer maintenant le théorème de Skoda (cf. 3.0.16.2) à la fonction holomorphe $f-F$ sur $B(x,r)$, avec $\sigma_j(z)=(z_j-x_j)/d$, $j=1,\ldots,n$, $\psi=m\varphi$, et $\delta=1$. On obtient

$$f-F=\sum_{j=1}^n (z_j-x_j)/d\cdot v_j(z) \qquad \text{sur } B(x,r),$$

avec $v_1,\ldots,v_n\in \mathcal{O}(B(x,r))$ vérifiant :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \int_{B(x,r)} \frac{|v_j(z)|^2}{|z-x|^{2n}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) &\leq 2\int_{B(x,r)} \frac{|f(z)-F(z)|^2}{(|z-x|/d)^{2(n+1)}}\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) \\ &\leq 2C_2(r,d,n)\, C_f \leq \tfrac{C_3(n}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f.\end{aligned}$$

Comme $(|z-x|/d)^{2n}\leq (r/d)^{2n}$ sur $B(x,r)$, on obtient finalement

$$\text{(2)}\qquad \sum_{j=1}^n \int_{B(x,r)} |v_j(z)|^2\, e^{-2m\varphi(z)}\, d\lambda(z) \leq \frac{C_3(n}{(r/d)^{2\cdot 2}}\, C_f \leq \frac{C_3(n}{(r/d)^{2(n+2)}}\, C_f.$$

Si on pose $C(n)=\max\{C_2(n)\,, C_3(n)\}$, les estimations (1) et (2) démontrent le lemme.

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3.0.16.3 *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur un ouvert pseudo-convexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ de diamètre d, m un entier positif, et $(\sigma_{m,j})_{j\geq 0}$ une base orthonormée quelconque de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$.*

Alors, pour tout point $x \in \Omega$ et tout $0 < r < 1$ tel que $B(x,r) \subset\subset \Omega$, il existe une constante $C(n) > 0$ ne dépendant que de n, telle que pour $r' = \frac{r}{\sqrt{n\,C(n)}}\,(\frac{r}{d})^{(n+2)}$ on a la propriété suivante :
pour toute section $f \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{I}(m\varphi))$ avec

$$\int_{B(x,r)} |f|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda = C_f < +\infty,$$

il existe des fonctions holomorphes $b_{m,j} \in \mathcal{O}(B(x,r'))$, $j \geq 0$, telles que

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} b_{m,j}\,\sigma_{m,j} \qquad \text{sur } B(x,r'),$$

et

$$\sup_{B(x,r')} \sum_{j=0}^{+\infty} |b_{m,j}|^2 \leq \frac{1}{(1-r/d)^2}\,\frac{C(n)}{(r/d)^{2(n+2)}}\,C_f.$$

Démonstration. On pose $C(r,d,n) = C(n)\,(d/r)^{2(n+2)}$. Soit une section $f \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{I}(m\varphi))$ comme dans l'énoncé. Le lemme 3.0.16.1 donne l'existence d'une section globale $F \in \mathcal{H}_\Omega(m\varphi)$ et de sections locales $v_1, \ldots, v_n \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{I}(m\varphi))$ telles que

$$f - F = \sum_{j_1=1}^{n} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdot v_{j_1}(z) \qquad \text{sur } B(x,r), \text{ avec}$$
$$\int_\Omega |F|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \leq C(r,d,n)\, C_f,$$

et

$$\sum_{j_1=1}^{n} \int_{B(x,r)} |v_{j_1}|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \leq C(r,d,n)\, C_f.$$

Par définition de la base orthonormée, on a $F = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,\sigma_{m,k}$, avec $c_k \in \mathbb{C}$ satisfaisant $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k|^2 \leq C(r,d)\,C_f$. En particulier,

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,\sigma_{m,k} + \sum_{j_1=1}^{n} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \cdot v_{j_1}(z) \qquad \text{sur } B(x,r).$$

Nous allons itérer ce procédé et continuer par récurrence. L'itération donne une version effective du lemme de Nakayama. On applique donc le lemme 3.0.16.1 à chaque fonction

v_{j_1} et on obtient, pour $j_1 = 1, \ldots, n$:

$$v_{j_1} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,\,j_1}\,\sigma_{m,\,k} + \sum_{j_2=1}^{n} (z_{j_2} - x_{j_2})/d \cdot v_{j_1,,j_2}(z) \qquad \text{sur } B(x,r),$$

avec $c_{k,\,j_1} \in \mathbb{C}$, $v_{j_1,,j_2} \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{I}(m\varphi))$ tels que

$$\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty} |c_{k,\,j_1}|^2 \leq C(r,d,n) \sum_{j_1=1}^{n} \int_{B(x,\,r)} |v_{j_1}|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \leq C(r,d,n)^2\, C_f,$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n} \int_{B(x,\,r)} |v_{j_1,\,j_2}|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \;&\leq \sum_{j_1=1}^{n} C(r,d,n) \int_{B(x,\,r)} |v_{j_1}|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \\ &\leq C(r,d,n)^2\, C_f.\end{aligned}$$

Par récurrence sur l, on obtient, après applications successives du lemme 3.0.16.1 :

$$v_{j_1,\ldots,\,j_{l-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k,\,j_1,\ldots,\,j_{l-1}} \sigma_{m,\,k} + \sum_{j_l=1}^{n} (z_{j_l} - x_{j_l})/d \cdot v_{j_1,\ldots,\,j_l} \qquad \text{sur } B(x,r),$$

pour $j_1, \ldots, j_{l-1} = 1, \ldots, n$, avec $c_{k,\,j_1,\ldots,\,j_{l-1}} \in \mathbb{C}$, $v_{j_1,\ldots,\,j_l} \in \Gamma(B(x,r), \mathcal{I}(m\varphi))$ satisfaisant les estimations

$$\sum_{j_1,\ldots,\,j_{l-1}=1}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} |c_{k,\,j_1,\ldots,\,j_{l-1}}|^2 \leq C(r,d,n)^l\, C_f$$

et

$$\sum_{j_1,\ldots,\,j_l=1}^{n} \int_{B(x,\,r)} |v_{j_1,\ldots,\,j_l}|^2\, e^{-2m\varphi}\, d\lambda \leq C(r,d,n)^l\, C_f.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} f \;&=\; \sum_{j_1,\ldots,\,j_l=1}^{n} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \ldots (z_{j_l} - x_{j_l})/d \cdot v_{j_1,\ldots,\,j_l} + \\ &+\; \sum_{k=0}^{+\infty} \left(c_k + \sum_{\nu=1}^{l-1} \sum_{j_1,\ldots,\,j_\nu=1}^{n} c_{k,j_1,\ldots,\,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \ldots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d \right) \sigma_{m,\,k}, \end{aligned}$$

sur $B(x,r)$. Posons

$$b_{m,\,k} = c_k + \sum_{\nu=1}^{+\infty} \sum_{j_1,\ldots,\,j_\nu=1}^{n} c_{k,j_1,\ldots,\,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \ldots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d, \qquad k = 0, \ldots, +\infty.$$

Nous allons vérifier maintenant que la série qui définit $b_{m,\,k}$ converge vers une fonction holomorphe sur $B(x,r')$, et que

$$\sup_{B(x,r')} \sum_{k=0}^{+\infty} |b_{m,k}|^2 \leq \frac{1}{(1-r/d)^2}\, C(r,d,n)\, C_f,$$

où $r' = \dfrac{r}{\sqrt{n\, C(r,d,n)}}$.

Comme $\sup\limits_{B(x,r')} \left| (z_{j_1} - x_{j_1})/d \dots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d \right|^2 \leq r'^{2\nu}$,

on a, pour tout $1 \leq \nu < +\infty$, l'estimation

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \Big| & \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^{n} c_{k,j_1,\dots,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \dots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d \Big|^2 \\
&\leq (r'/d)^{2\nu} \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^{n} |c_{k,j_1,\dots,j_\nu}| \Big)^2 \\
&\leq (r'/d)^{2\nu}\, n^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^{n} |c_{k,j_1,\dots,j_\nu}|^2 = (r'/d)^{2\nu}\, n^\nu \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^{n} \sum_{k=0}^{+\infty} |c_{k,j_1,\dots,j_\nu}|^2 \\
&\leq (r'/d)^{2\nu}\, n^\nu\, C(r,d,n)^{\nu+1}\, C_f = (r/d)^{2\nu}\, C(r,d,n)\, C_f,
\end{aligned}$$

sur $B(x,r')$. Posons

$$F_{\nu,k} = \sum_{j_1,\dots,j_\nu=1}^{n} c_{k,j_1,\dots,j_\nu} (z_{j_1} - x_{j_1})/d \dots (z_{j_\nu} - x_{j_\nu})/d, \qquad \text{pour } k \geq 0 \text{ et } \nu \geq 1,$$

$$F_{0,k} = c_k, \text{ pour } k \geq 0.$$

Alors $b_{m,k} = \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} F_{\nu,k}$. Nous avons déjà démontré que

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} |F_{\nu,k}|^2 \leq (r/d)^{2\nu}\, C(r,d,n)\, C_f, \qquad \text{sur } B(x,r') \text{ pour } \nu \geq 0.$$

Soit $F_\nu = (F_{\nu,k})_{k\geq 0}$ avec la norme ponctuelle L^2 donnée par

$$|F_\nu| = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |F_{\nu,k}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On a :

$\left| \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} F_\nu \right| \leq \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} |F_\nu|$, ce qui équivaut à

$$\left|(b_{m,k})_{k\geq 0}\right| \leq \sum_{\nu=0}^{+\infty}\left|(F_{\nu,k})_{k\geq 0}\right|,$$ ou encore à

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|b_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{\nu=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}|F_{\nu,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{\nu=0}^{+\infty}(r/d)^\nu \sqrt{C(r,d,n)\,C_f} \\ &= \frac{1}{1-r/d}\sqrt{C(r,d,n)\,C_f},\end{aligned}$$

sur $B(x,r')$. Le théorème est démontré.

3.0.17 Annexe A : Un problème de théorie du potentiel en une variable complexe

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ une fonction sousharmonique et $T = dd^c\varphi_0$ le (1,1)-courant positif fermé associé. Le courant T s'identifie au laplacien $\Delta\varphi_0$ de φ_0 calculé au sens des distributions. Il correspond ainsi à une mesure positive $\mu = dd^c\varphi_0$ sur Ω. Si x_0 est un point quelconque de Ω et $r > 0$, on note :

$$\gamma = \int_{D(x_0,\,r)} dd^c\varphi_0,$$

la masse de la mesure $dd^c\varphi_0$ portée par le disque de centre x_0 et de rayon r. Pour des entiers positifs m, l'intégrabilité de $e^{-2m\varphi_0}$ dans $D(x_0, r)$ n'est pas garantie, car la fonction $m\,\varphi_0$ peut avoir des pôles $-\infty$. En fait, nous rappelons le résultat suivant, dû à H. Skoda ([Sko72a]), qui montre que les nombres de Lelong d'une fonction psh φ influent sur l'intégrabilité locale de $e^{-2\varphi}$.

Proposition 3.0.17.1 (Skoda, 1972.) *Soit φ une fonction plurisousharmonique dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ et $x \in U$.*

(a) Si $\nu(\varphi, x) < 1$, alors $e^{-2\varphi}$ est intégrable dans un voisinage de x.

(b) Si $\nu(\varphi, x) \geq n+s$ pour un entier $s \geq 0$, alors $e^{-2\varphi} \geq C|z-x|^{-2n-2s}$ dans un voisinage de x et $\mathcal{I}(\varphi)_x \subset \mathcal{M}_{U,x}^{s+1}$, où $\mathcal{M}_{U,x}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{U,x}$. En particulier, $e^{-2\varphi}$ n'est pas intégrable au voisinage de x.

(c) La variété des zéros $V(\mathcal{I}(\varphi))$ de $\mathcal{I}(\varphi)$ vérifie l'encadrement

$$E_n(\varphi) \subset V(\mathcal{I}(\varphi)) \subset E_1(\varphi),$$

où $E_c(\varphi) = \{x \in U\,;\, \nu(\varphi, z) \geq c\}$ est l'ensemble de niveau $c > 0$ pour les nombres de Lelong de φ.

Nous nous proposons d'investiguer dans la suite comment neutraliser les pôles de φ_0 pour rendre intégrable l'exponentielle $e^{-2m\varphi_0}$, pour des entiers positifs m, sur des disques de rayon indépendant de m. La proposition 3.0.17.1 ci-dessus, bien que donnant une condition suffisante pour l'intégrabilité de l'exponentielle au voisinage d'un pôle (la condition (a)), ne précise pas la “taille” de ce voisinage.

Plus précisément, l'objectif de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.0.17.2 *Soit* $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *une fonction sousharmonique sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *et* $D(x_0,r) \subset \Omega$ *un disque de rayon* $0 < r < \frac{1}{2}$*. On pose* $\gamma = \int\limits_{D(x_0,r)} dd^c\varphi_0$ *et on considère la décomposition*

$$\varphi_0 = N \star \Delta\varphi_0 + h_0, \qquad \text{sur } D(x_0,r),$$

où $N(z) = \frac{1}{2\pi}\log|z|$ *est le noyau de Newton d'une variable complexe et* $h_0 = \operatorname{Re} g_0$ *est une fonction harmonique s'écrivant comme la partie réelle d'une fonction holomorphe* g_0*.*

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$ *et tout* $\delta > 0$ *petit, il existe un ensemble fini de points* $a_1 = a_1(m), \ldots, a_{N_m} = a_{N_m}(m) \in D(x_0,r)$*, tels que les entiers positifs* m_j *définis comme :*

$$m_j = \max\{[m\nu(\varphi_0,a_j)],1\}, \qquad j = 1,\ldots,N_m,$$

et la fonction holomorphe $f_m(z) = e^{m\,g_0(z)}\prod\limits_{j=1}^{N_m}(z-a_j)^{m_j}$ *définie dans* $D(x_0,r)$*, aient les propriétés suivantes :*

(i) $\sum\limits_{j=1}^{N_m} m_j \leq m\gamma(1+\delta)$ *;*

(ii) *Il existe une constante* $C = C(r) > 0$*, indépendante de* m*, de sorte que :*

$$|a_j - a_k| \geq \frac{C}{m^2},$$

pour tous a_j, a_k*, tels que* $j \neq k$ *et* $\nu(\varphi_0,a_j)$*,*$\nu(\varphi_0,a_j) < \frac{1-\delta}{m}$*.*

(iii)

$$\int_{D(x_0,r)} |f_m(z)|^2 e^{-2m\varphi_0(z)}\,d\lambda(z) = o(m), \quad \text{lorsque} \quad m \to +\infty,$$

où $d\lambda$ *est la mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{C}$*.*

Le reste de ce paragraphe sera consacré à la démonstration de ce théorème 3.0.17.2. Fixons $m \in \mathbb{N}^\star$ et $\delta > 0$. En dimension 1, il est trivial que l'ensemble de niveau

$$E_{1-\delta}(m\,dd^c\varphi_0) := \{x \in \Omega\,;\, \nu(m\,dd^c\varphi_0, x) \geq 1-\delta\}$$

associé au (1,1)-courant positif fermé $m\,dd^c\varphi_0$ est analytique de dimension 0. Son intersection avec un disque est alors finie. Soit :

$$E_{1-\delta}(m\,dd^c\varphi_0) \cap D(x_0,r) = \{a_1,\ldots,a_{p(m)}\}.$$

Pour tout $a_j \in E_{1-\delta}(m\,dd^c\varphi_0) \cap D(x_0,r)$, on pose $m_j = [m\,\nu(dd^c\varphi_0,a_j)]$. Si on note

$$\psi_m(z) = m\,\varphi_0(z) - \sum_{j=1}^{p(m)} m_j \log|z-a_j|,$$

on a :

$$\prod_{j=1}^{p(m)} |z-a_j|^{2m_j}\, e^{-2m\varphi_0(z)} = e^{-2\psi_m(z)}.$$

La fonction ψ_m est encore sousharmonique car :

$$dd^c\psi_m = m\, dd^c\varphi_0 - \sum_{j=1}^{p(m)} [m\,\nu(\varphi_0, a_j)]\,\delta_{a_j} \geq 0,$$

au sens des courants. En particulier, pour un point a_j, on trouve :

$$\nu(\psi_m, a_j) = m\,\nu(\varphi_0, a_j) - [m\,\nu(\varphi_0, a_j)].$$

Ainsi, quitte à remplacer $m\,\varphi_0$ par ψ_m, et $m\,dd^c\varphi_0$ par $\mu' = m\,dd^c\varphi_0 - \sum_{j=1}^{p(m)} [m\,\nu(\varphi_0, a_j)]\,\delta_{a_j}$, on peut supposer dorénavant que

$(\star)\qquad m\,\nu(\varphi_0, x) < 1, \qquad \forall x \in D(x_0, r).$

Ce qui pourrait empêcher l'exponentielle $e^{-2m\varphi_0}$ d'être intégrable ou d'avoir la croissance voulue en m sur $D(x_0, r)$, outre les masses ponctuelles du courant $m\,dd^c\varphi_0$, sont les éventuelles masses "diffuses" concentrées au voisinage de certains points du disque. Le lemme suivant donne une majoration de $e^{-2\varphi_0}$ en fonction de la masse du courant $dd^c\varphi_0$ associé. Ce lemme est dans l'esprit de la proposition 3.0.17.1, avec ceci de plus que l'estimation est obtenue sur un disque de taille fixe si l'hypothèse est faite sur ce même disque, et non en un seul point.

Lemme 3.0.17.3 *Les hypothèses étant celles du théorème 3.0.17.2, on a l'estimation suivante:*

$$e^{-2(\varphi_0(z)-h_0(z))} \leq \frac{1}{\int_{D(x_0,\, r)} dd^c\varphi_0} \int_{D(x_0,\, r)} \frac{1}{|\zeta - z|^{2\gamma}}\, dd^c\varphi_0(\zeta),$$

pour tout $z \in D(x_0, r)$.

Démonstration. Soit $d\mu(\zeta) = \gamma^{-1}\, dd^c\varphi_0(\zeta)$, une mesure de probabilité sur $D(x_0, r)$. Pour tout $z \in D(x_0, r)$, on a :

$$(\varphi_0 - h_0)(z) = \int_{D(x_0,\, r)} \log|\zeta - z|\, dd^c\varphi_0(\zeta),$$

ou, de façon équivalente,

$$-(\varphi_0 - h_0)(z) = \int_{D(x_0,\, r)} \gamma \log|\zeta - z|^{-1} d\mu(\zeta), \qquad z \in D(x_0, r).$$

L'inégalité de convexité de Jensen entraîne :

$$e^{-2(\varphi_0-h_0)(z)} \leq \int_{D(x_0,\,r)} e^{2\gamma \log|\zeta-z|^{-1}} d\mu(\zeta) = \gamma^{-1} \int_{D(x_0,\,r)} \frac{1}{|\zeta-z|^{2\gamma}} dd^c\varphi_0(\zeta).$$

Ceci démontre le lemme. □

Le lemme 3.0.17.3, appliqué à la fonction $m\,\varphi_0$, donne l'estimation :

$$e^{-2m(\varphi_0(z)-h_0(z))} \leq \frac{1}{\int\limits_{D(x_0,\,r)} dd^c\varphi_0} \int\limits_{D(x_0,\,r)} \frac{1}{|\zeta-z|^{2m\gamma}}\, dd^c\varphi_0(\zeta),$$

pour tout $z \in D(x_0, r)$.

Le terme de droite de cette inégalité n'est pas nécessairement intégrable en tant que fonction de z, quand $m\gamma > 1$. Pour surmonter cet obstacle, nous découpons le disque $D(x_0, r)$ en un nombre fini, $\leq m\gamma(1+\delta)$, de morceaux de même masse strictement inférieure à 1, pour la mesure $m\, dd^c\varphi_0$. On voit ici que la propriété de $m\, dd^c\varphi_0$ de ne pas avoir de masses ponctuelles supérieures à 1 est essentielle. Nous choisissons ensuite un point dans chaque morceau, intuitivement le "centre," et considérons la fonction holomorphe sur $D(x_0, r)$ ayant ces points pour ses seuls zéros. Ce sera la fonction f_m recherchée. Le nombre de ses zéros ne dépasse pas $m\gamma(1+\delta)$, par construction. Un calcul montrera ensuite que la croissance L^2 de f_m avec poids $e^{-2m\,\varphi_0}$, est au plus de l'ordre de $o(m)$, lorsque $m \to +\infty$.

Nous faisons le découpage annonçé du disque $D(x_0, r)$ à l'aide du lemme suivant qui fournit une "atomisation" d'une mesure positive quelconque μ sur $D(x_0, r)$.

Lemme 3.0.17.4 (Yulmukhametov, 1985 ; Drasin, 2000.) *Soit μ une mesure positive à support dans un carré $R \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\mu(R) = N > 1, N \in \mathbb{Z}$. Alors, il existe une famille de rectangles fermés $(R_j)_{1\leq j\leq N}$, aux côtés parallèles aux côtés de R, et une famille de mesures positives $(\mu_j)_{1\leq j\leq N}$, telles que :*

(a) $\mu = \sum_{j=1}^{N} \mu_j$; $\mu_j(R) = 1$; $\mathrm{Supp}\mu_j \subset R_j$;

(b) $R = \bigcup_{j=1}^{N} R_j = \bigcup_{j=1}^{N} \mathrm{Supp}\mu_j$;

(c) $\mathrm{int}\,(\mathrm{Supp}\,\mu_j) \cap \mathrm{Supp}\mu_k = \emptyset, \quad \forall j \neq k$;

(d) Le rapport des côtés de chaque rectangle R_j est dans l'intervalle $[\frac{1}{3}, 3]$ (i.e. R_j est un "presque carré" dans la terminologie de [Dra00]*) ;*

(e) Tout point de R appartient à l'intérieur d'au plus quatre rectangles R_j ;

(f) Chaque $\mathrm{Supp}\mu_j$ *est un rectangle et les distances réciproques entre les centres de ces rectangles sont toutes $\geq \frac{C}{N^2}$, où $C > 0$ est le côté du carré R.*

Idée de démonstration. Yulmukhametov avait démontré ce résultat (cf. [Yul85]) pour des mesures μ absolument continues. La généralisation aux mesures quelconques est due à Drasin [Dra00]. La conclusion (f) n'était pas énoncée explicitement, mais elle se déduit facilement de la démonstration. La première idée est de réduire le problème au cas d'une mesure μ ayant la propriété que $\mu(p) < 1$ en tout point $p \in R$. Ceci est réalisé en soustrayant à la mesure initiale μ la partie entière $[\mu(p)]$ de chaque masse ponctuelle $\mu(p) > 1$. On peut supposer de plus, quitte à faire une rotation du système de coordonnées de $\mathbb{R}^2$, que pour toute droite L parallèle à un des axes de coordonnées, il existe au plus un point $p \in L$ tel que $\mu(p) > 0$, tandis que $\mu(L \setminus p) = 0$.

Avec ces réductions, l'étape essentielle est de démontrer que si un presque carré R contient le support d'une mesure μ ayant ces propriétés, alors il existe des presque carrés R_0 et R_1 et une décomposition $\mu = \mu_0 + \mu_1$ tels que $\operatorname{Supp} \mu_j \subset R_j$, $j = 0, 1$, et satisfaisant les conclusions $(b) - (d)$ du lemme. Les masses $\mu_j(R_j)$ sont entières. Si $\mu_j(R_j) > 1$, on applique de nouveau ce procédé pour obtenir des presque carrés $R_{j,0}$, $R_{j,1}$ et une décomposition $\mu_j = \mu_{j,0} + \mu_{j,1}$. Des applications répétées de ce procédé produisent ainsi des presque carrés R_I et des mesures μ_I, indéxés sur des multi-indices $I = i_1, \ldots, i_l$ formés avec les chiffres 0 et 1. Le procédé s'arrête lorsque toutes les masses $\mu_I(R_I) = 1$. Un lemme technique assure ensuite la conclusion (e) et démontre ainsi le résultat. Les détails se trouvent dans [Dra00, §2]. $\square$

Démonstration du théorème 3.0.17.2. Avec les réductions faites après l'énoncé du théorème 3.0.17.2, on peut faire l'hypothèse $(\star)$, à savoir on peut supposer que $m\,\nu(\varphi, \varphi) < 1$, pour tout $x \in D(x_0, r)$. Considérons le carré $R \subset \mathbb{C}$ de côté $2r$ qui contient $D(x_0, r)$, et la mesure positive $\mu = dd^c\varphi_0$ dans R de masse totale γ. Fixons $0 < \delta < 1$ et, pour $m >> 0$, choisissons un entier N_m tel que

$$(\star\star) \qquad \tfrac{2}{2-\delta}\, m\,\gamma < N_m < m\,\gamma\,(1+\delta).$$

Un tel entier existe dès que $m\,\gamma\,(1 + \delta - \frac{2}{2-\delta}) = m\,\gamma\,\frac{\delta(1-\delta)}{2-\delta} > 1$. On applique le lemme 3.0.17.4 à la mesure $\frac{N_m}{\gamma}\,\mu = \frac{N_m}{\gamma}\, dd^c\varphi_0$, de masse totale $N = N_m$. On obtient ainsi un recouvrement de $D(x_0, r)$ par des rectangles (presque carrés) fermés $R_j = R_j(m)$, et une décomposition $\frac{N_m}{\gamma}\,\mu = \sum_{j=1}^{N_m} \nu_{m,j}$ telle que $\nu_{m,j}(R_j) = 1$, satisfaisant les conclusions du lemme 3.0.17.4. Posons $\mu_{m,j} = \frac{m\,\gamma}{N_m}\,\nu_{m,j}$. On a alors une décomposition :

$$m\,\mu = dd^c(m\,\varphi_0) = \sum_{j=1}^{N_m} \mu_{m,j}, \qquad \text{avec } \mu_{m,j}(R_j) = \tfrac{m\,\gamma}{N_m} \in]1-\delta, 1-\tfrac{\delta}{2}[.$$

Considérons le rectangle $P_j = P_j(m) = \operatorname{int}(\operatorname{Supp} \mu_{m,j}) \subset R_j$, et soit $a_j = a_j(m)$ son centre. Nous allons montrer que l'entier N_m et les points a_j vérifient les conclusions du théorème 3.0.17.2. La propriété $(\star)$ implique :

$$m_j = \max\{[m\,\nu(\varphi_0, a_j)], 1\} = 1, \qquad \text{pour } j = 1, \ldots, N_m,$$

ce qui entraîne : $\sum_{j=1}^{N_m} m_j = N_m < m\gamma(1+\delta)$, qui n'est autre que la conclusion (i) du théorème 3.0.17.2.

La conclusion (f) du lemme 3.0.17.4 et le choix de N_m assurent que les points a_j vérifient la condition (ii) du théorème 3.0.17.2.

Considèrons maintenant la fonction holomorphe :

$$f_m(z) = e^{m\, g_0(z)} \prod_{j=1}^{N_m} (z - a_j), \qquad z \in D(x_0, r),$$

et étudions la croissance en m de $\int\limits_{D(x_0,r)} |f_m|^2\, e^{-2m\varphi_0}\, d\lambda$. Comme :

$$\int\limits_{D(x_0,r)} |f_m|^2\, e^{-2m\varphi_0}\, d\lambda \leq \sum_{j=1}^{N_m} \int\limits_{P_j} |f_m|^2\, e^{-2m\varphi_0}\, d\lambda,$$

l'étude se ramène à trouver une majoration convenable de chaque intégrale sur P_j. Fixons $j \in \{1, \ldots, N_m\}$. Comme $P_j \cap \bar{P}_k = \emptyset$, pour tous $j \neq k$, on a :

$$m\, \mu(P_j) = \mu_{m,j}(P_j) \leq \mu_{m,j}(R_j) = \tfrac{m\gamma}{N_m} < 1 - \tfrac{\delta}{2}.$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que P_j est un disque $D(a_j, r_j)$. La conclusion (e) du lemme 3.0.17.4 implique que la somme des aires euclidiennes des P_j est majorée par quatre fois l'aire du carré R de côté $2r$. Ceci signifie qu'il existe une constante $C_1(r) > 0$, dépendant uniquement de r, telle que

$$(e') \qquad \sum_{j=1}^{N_m} r_j^2 \leq C_1(r), \qquad \text{pour tout } m >> 0.$$

Le lemme 3.0.17.3 appliqué à la fonction $m\,\varphi_0$ sur $P_j = D(a_j, r_j)$ entraîne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} |f_m(z)|^2\, e^{-2m\varphi_0(z)} &= \prod_{k=1}^{N_m} |z - a_k|^2\, e^{-2m(\varphi_0(z) - h_0(z))} \\ &\leq (2r)^{2(N_m-1)}\, |z - a_j|^2\, \frac{1}{\int\limits_{P_j} dd^c\varphi_0} \int\limits_{P_j} \frac{1}{|\zeta - z|^{2\frac{m\gamma}{N_m}}}\, dd^c\varphi_0(\zeta), \end{aligned}$$

pour tout $z \in P_j$. On a utilisé ici la majoration évidente $|z - a_k|^2 \leq (2r)^2$, pour tout $k \neq j$.

En intégrant par rapport à $z \in P_j$, le théorème de Fubini donne :

$$(0.4.1) \qquad \int\limits_{P_j} |f_m(z)|^2\, e^{-2m\varphi_0(z)} d\lambda(z) \leq \frac{(2r)^{2(N_m-1)}}{\int\limits_{P_j} dd^c\varphi_0} \int\limits_{P_j} \left(\int\limits_{P_j} \frac{|z - a_j|^2}{|z - \zeta|^{2\frac{m\gamma}{N_m}}} d\lambda(z) \right) dd^c\varphi_0(\zeta).$$

Regardons maintenant l'intégrale en z. On obtient l'estimation suivante :

$$(0.4.2) \qquad \int\limits_{P_j} \frac{|z - a_j|^2}{|z - \zeta|^{2\frac{m\gamma}{N_m}}} d\lambda(z) = \int\limits_{D(a_j, r_j)} \frac{|z - a_j|^2}{|(z - a_j) - (\zeta - a_j)|^{2\frac{m\gamma}{N_m}}} d\lambda(z - a_j)$$

$$\leq 4\pi(|\zeta - a_j| + r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})} \cdot \left(\frac{(|\zeta - a_j| + r_j)^2}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} + \frac{|\zeta - a_j|^2}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \right), \forall \zeta \in P_j.$$

En effet, si on fait le changement de variable $x = z - a_j$ et on note $\zeta - a_j = a$, on est ramené à estimer l'intégrale :

$$\int\limits_{D(0,r)} \frac{|x|^2}{|x-a|^\tau} d\lambda(x),$$

où on a noté $r_j = r$ et $\tau = 2\frac{m\gamma}{N_m}$ pour alléger les notations. Par le choix $(\star\star)$ de N_m, on a : $0 < \tau < 2$. Le changement de variable $x - a = y$, suivi du passage en coordonnées polaires avec $|y| = \rho$, entraîne :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{D(0,r)} \frac{|x|^2}{|x-a|^\tau} d\lambda(x) &= \int\limits_{D(-a,r)} \frac{|y+a|^2}{|y|^\tau} d\lambda(y) \leq \int\limits_{D(-a,r)} \frac{(|y|+|a|)^2}{|y|^\tau} d\lambda(y) \\
&\leq 2 \int\limits_{D(-a,r)} \frac{|y|^2 + |a|^2}{|y|^\tau} d\lambda(y) \\
&= 2 \int\limits_{D(-a,r)} |y|^{2-\tau} d\lambda(y) + 2|a|^2 \int\limits_{D(-a,r)} |y|^{-\tau} d\lambda(y) \\
&\leq 2\pi \cdot \left(2 \int_0^{|a|+r} \rho^{2-\tau} \rho \, d\rho + 2|a|^2 \int_0^{|a|+r} \rho^{-\tau} \rho \, d\rho \right) \\
&= 4\pi \, (|a| + r)^{2-\tau} \left(\frac{(|a|+r)^2}{4-\tau} + \frac{|a|^2}{2-\tau} \right).
\end{aligned}$$

Pour $r = r_j$, ceci implique l'estimation (0.4.2). Les relations (0.4.1) et (0.4.2) entraînent :

$$\int\limits_{P_j} |f_m(z)|^2 \, e^{-2m\varphi_0(z)} d\lambda(z) \leq$$

$$\frac{4\pi}{\int_{P_j} dd^c\varphi_0} (2r)^{2(N_m-1)} \int_{P_j} (|\zeta - a_j| + r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})} \left(\frac{(|\zeta - a_j| + r_j)^2}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} + \frac{|\zeta - a_j|^2}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \right) dd^c\varphi_0(\zeta).$$

Passons maintenant en coordonnées polaires avec $|\zeta - a_j| = \rho$. Ceci implique que $dd^c\varphi_0(\zeta) = dn(\rho)$, où $n(\rho) = \int_{D(a_j,\rho)} dd^c\varphi_0$, pour tout $\rho \geq 0$. Comme P_j est supposé être $D(a_j, r_j)$, nous obtenons :

$$\int\limits_{P_j} |f_m(z)|^2 \, e^{-2m\varphi_0(z)} d\lambda(z) \leq$$

$$\leq C(r, r_j) \int_0^{r_j} (\rho + r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})} \left(\frac{(\rho + r_j)^2}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} + \frac{\rho^2}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \right) n'(\rho) \, d\rho,$$

où $C(r, r_j) = \dfrac{8\pi^2}{\int_{P_j} dd^c\varphi_0} (2r)^{2(N_m - 1)}$. La dernière expression s'écrit successivement :

$$\frac{C(r, r_j)}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} \cdot \int_0^{r_j} (\rho + r_j)^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})} n'(\rho) \, d\rho + \frac{C(r, r_j)}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \cdot \int_0^{r_j} \rho^2 (\rho + r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})} n'(\rho) \, d\rho =$$

$$= \frac{C(r, r_j)}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} \left(n(r_j)(2r_j)^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})} - 2\left(2 - \frac{m\gamma}{N_m}\right) \int_0^{r_j} n(\rho)(\rho + r_j)^{3-2\frac{m\gamma}{N_m}} \, d\rho \right) +$$

$$+ \frac{C(r, r_j)}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \left(n(r_j) r_j^2 (2r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{r_j} n(\rho) \left[2\rho(\rho + r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})} + 2\left(1 - \frac{m\gamma}{N_m}\right)(\rho + r_j)^{1-2\frac{m\gamma}{N_m}} \rho^2 \right] \, d\rho \right).$$

Comme les termes qui apparaissent avec un signe $-$ sont négatifs, car $1 - \frac{m\gamma}{N_m} > 0$ et d'autant plus $2 - \frac{m\gamma}{N_m} > 0$, ils peuvent être négligés. On obtient ainsi la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \int\limits_{P_j} |f_m(z)|^2 \, e^{-2m\varphi_0(z)} d\lambda(z) \quad &\leq \\ &\leq \quad C(r, r_j) \cdot n(r_j) \cdot \left(\frac{(2r_j)^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})}}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} + \frac{r_j^2 (2r_j)^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})}}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \right). \end{aligned}$$

Comme $n(r_j) = \int_{P_j} dd^c\varphi_0$, la majoration précédente et la formule de $C(r, r_j)$ montrent que :

$$\text{(0.4.3)} \qquad \int\limits_{P_j} |f_m(z)|^2 \, e^{-2m\varphi_0(z)} d\lambda(z) \leq C\left(r, \frac{m\gamma}{N_m}\right) \cdot r_j^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})},$$

où la constante $C(r, \frac{m\gamma}{N_m})$ est donnée par la formule :

$$C\left(r, \frac{m\gamma}{N_m}\right) = 8\pi^2 \, (2r)^{2(N_m - 1)} \left(\frac{2^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})}}{2(2 - \frac{m\gamma}{N_m})} + \frac{2^{2(1-\frac{m\gamma}{N_m})}}{2(1 - \frac{m\gamma}{N_m})} \right).$$

Comme l'estimation (0.4.3) est valable pour tous les indices $j \in \{1, \ldots, N_m\}$, on obtient, en prenant la somme sur j :

$$\int_{D(x_0,\, r)} |f_m(z)|^2 \, e^{-2m\varphi_0(z)} \, d\lambda(z) \leq C\big(r, \frac{m\gamma}{N_m}\big) \sum_{j=1}^{N_m} r_j^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})}.$$

Le choix de N_m a été fait en sorte que $1 - \delta < \frac{1}{1+\delta} < \frac{m\gamma}{N_m} < 1 - \frac{\delta}{2}$ (cf. $(\star\star)$),

ce qui entraîne :

$\frac{\delta}{2} < 1 - \frac{m\gamma}{N_m} < \delta \quad$ et $\quad 1 + \frac{\delta}{2} < 2 - \frac{m\gamma}{N_m} < 1 + \delta.$

Comme $0 < 2r < 1$, il existe une constante $C_2(r) > 0$ ne dépendant que de r, telle que $C(r, \frac{m\gamma}{N_m}) \leq C_2(r)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Comme $r_j \leq 2r < 1$, on a :

$$r_j^{2(2-\frac{m\gamma}{N_m})} < r_j^2, \quad \text{car } 2(2 - \tfrac{m\gamma}{N_m}) > 2.$$

Ainsi, l'estimation (e') (déduite de (c) du lemme 3.0.17.4) entraîne :

$$\int_{D(x_0,\, r)} |f_m(z)|^2 \, e^{-2m\varphi_0(z)} \, d\lambda(z) \leq C(r), \quad \forall m >> 0,$$

où $C(r) = C_1(r)\, C_2(r) > 0$ est une constante qui dépend uniquement du rayon r du disque $D(x_0, r)$ sur lequel on se place. Ceci garantit la conclusion (iii) du théorème 3.0.17.2. $\square$

3.0.18 Annexe B : Contrôle local des masses de Monge-Ampère

Plaçons-nous dans la situation de la conjecture 3.0.13.4. Soit $T = \alpha + dd^c\varphi \geq \gamma$ un courant quasi-positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété hermitienne compacte (X,ω). Le théorème 3.0.13.3 de Demailly donne une suite (T_m) de courants quasi-positifs fermés dans la même classe de cohomologie que T et à singularités analytiques tels que T_m converge vers T dans la topologie faible des courants. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\{T\} = \{T_m\} = 0$ et $T = dd^c\varphi$. Soit $U \subset X$ un ouvert de coordonnées, de Stein et à bord strictement pseudoconvexe. Supposons provisoirement que $\gamma = 0$. Le potentiel φ est alors plurisousharmonique. Considérons, comme d'habitude, l'espace de Hilbert séparable

$$\mathcal{H}_U(m\varphi) = \{f \in \mathcal{O}(U); \int_U |f|^2 e^{-2m\varphi} dV_\omega < +\infty\}$$

et une base orthonormée dénombrable $(\sigma_{m,\,j})_{j\geq 0}$ de $\mathcal{H}_U(m\varphi)$. En particulier, les $(\sigma_{m,\,j})_{j\geq 0}$ sont des générateurs sur U du faisceau cohérent globalement défini $\mathcal{I}(mT)$. Les courants régularisants T_m peuvent être localement choisis comme $T_m = dd^c\varphi_m$, où

$$\varphi_m(z) = \frac{1}{2m} \log \sum_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,\,j}(z)|^2 \qquad \text{(cf. la proposition 3.0.15.1).}$$

Soit $\mu_m : \tilde{X}_m \to X$ l'éclatement du faisceau cohérent globalement défini $\mathcal{I}(mT)$ dans X de sorte que la variété $\tilde{X}_m$ est lisse et $\mu_m^\star \mathcal{I}(mT) = \mathcal{O}(-mE_m)$, où mE_m est un diviseur effectif à croisements normaux. Localement sur $\mu_m^{-1}(U)$ on a :

$$\mu_m^\star T_m = dd^c(\varphi_m \circ \mu_m) \qquad \text{et}$$

$$\varphi_m \circ \mu_m = \frac{1}{2m} \log \sum_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j} \circ \mu_m|^2 = \frac{1}{2m} \log \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \frac{\sigma_{m,j} \circ \mu_m}{g_m} \right|^2 + \frac{1}{m} \log |g_m|,$$

où g_m est un générateur local du faisceau inversible $\mathcal{O}(-mE_m)$, à savoir $\mathrm{div} g_m = [mE_m]$ localement. La fonction $\psi_m = \frac{1}{2m} \log \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \frac{\sigma_{m,j} \circ \mu_m}{g_m} \right|^2$ est plurisousharmonique et C^∞, car les fonctions holomorphes $\frac{\sigma_{m,j} \circ \mu_m}{g_m}$ n'ont pas de zéros communs. Ceci implique

$$\mu_m^\star T_m = \alpha_m + [E_m],$$

avec une $(1,1)$-forme α_m donnée localement par $dd^c \psi_m$, semi-positive et C^∞, et un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif E_m à coefficients dans $\frac{1}{m}\mathbb{Z}$. Nous modifions légèrement les potentiels locaux $\varphi_m \circ \mu_m$ pour pouvoir mieux estimer les masses de Monge-Ampère des courants T_m. Posons $\tilde{\varphi}_m = \rho_m + \frac{1}{m} \log |g_m|$, où

$$\rho_m = \frac{1}{2m} \log \sum_{\substack{j \geq 0 \\ |\alpha| \leq 1}} \left| D^\alpha \left(\frac{\sigma_{m,j} \circ \mu_m}{g_m} \right) \right|^2.$$

La partie singulière $\frac{1}{m} \log |g_m|$ de $\varphi_m \circ \mu_m$ reste donc inchangée ; seule la partie C^∞ augmente de ψ_m à ρ_m. Définissons les courants

$$S_m = (\mu_m)_\star (dd^c \tilde{\varphi}_m) \qquad \text{localement sur } X.$$

La proposition suivante, qui est une légère extension de la proposition 3.0.15.1, assure que (S_m) converge vers T dans la topologie faible des courants lorsque $m \to +\infty$.

Proposition 3.0.18.1 *Soit $(\sigma_{m,j})_{j \geq 0}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}_U(m\varphi)$ et $\delta > 0$ un réel positif. On considère la fonction psh à singularités analytiques:*

$$\varphi_m^\delta(z) = \frac{1}{2m} \log \sum_{\substack{j \geq 0 \\ |\alpha| \leq [\delta m]}} \left| \frac{D^\alpha \sigma_{m,j}}{\alpha!}(z) \right|^2.$$

Alors, il existe des constantes $C_1, C_3 > 0$ indépendantes de m et de φ, telles que :

$$\varphi(z) - \tfrac{C_1}{m} \leq \varphi_m^\delta(z) \leq \sup_{|\zeta - z| < 2r} \varphi(\zeta) - \tfrac{[\delta m]}{m} \log r - \tfrac{n}{m} \log r + \tfrac{1}{m} \log C_3,$$

pour tout $z \in U$ et tout $r < \min(\frac{1}{2} d(z, \partial U), 1)$. En particulier, pour tout entier positif p, $\varphi_m^{\frac{p}{m}}$ converge ponctuellement et dans la topologie L^1_{loc} vers φ lorsque $m \to +\infty$.

Demonstration. La minoration résulte de la proposition 3.0.15.1, car $\varphi_m^\delta \geq \varphi_m$. Pour obtenir la majoration, les arguments sont standards. La formule de Parseval appliquée à la fonction holomorphe $\sigma_{m,j}$ sur la sphère $S(z,r)$ donne :

$$\frac{\text{Const}}{r^{2n-1}} \cdot \int_{S(z,r)} |\sigma_{m,j}(\zeta)|^2 \, d\sigma(\zeta) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left|\frac{D^\alpha \sigma_{m,j}(z)}{\alpha!}\right|^2 \cdot r^{2|\alpha|}, \qquad j \geq 0.$$

La somme $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j}(\zeta)|^2$ est le carré de la norme de la forme linéaire d'évaluation $f \mapsto f(\zeta)$ sur $\mathcal{H}_U(m\varphi)$. Comme φ est localement bornée supérieurement, la topologie L^2 est plus forte que la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de U. Par conséquent, la série $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j}|^2$ converge uniformément sur les compacts de U. Une sommation sur j donne :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Const}}{r^{2n-1}} \cdot \int_{S(z,r)} \sum_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j}(\zeta)|^2 \, d\sigma(\zeta) &= \sum_{\substack{j\geq 0\\ \alpha\in\mathbb{N}^n}} \left|\frac{D^\alpha \sigma_{m,j}(z)}{\alpha!}\right|^2 \cdot r^{2|\alpha|} \\ &\geq r^{2[\delta m]} \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha|\leq[\delta m]}} \left|\frac{D^\alpha \sigma_{m,j}(z)}{\alpha!}\right|^2. \end{aligned}$$

En prenant le log et en divisant par $2m$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \log \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha|\leq[\delta m]}} \left|\frac{D^\alpha \sigma_{m,j}(z)}{\alpha!}\right|^2 &\leq \tfrac{1}{2m} \log \int_{S(z,r)} \sum_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j}(\zeta)|^2 \, d\sigma(\zeta) + \\ &- \tfrac{2n+2[\delta m]-1}{2m} \log r + \tfrac{1}{2m} \log(\text{Const}) \\ &\leq \tfrac{1}{2m} \log \left(C r^{2n-1} \sup_{|\zeta-z|=r} \sum_{j=0}^{+\infty} |\sigma_{m,j}(\zeta)|^2 \right) \\ &- \tfrac{2n+2[\delta m]-1}{2m} \log r + \tfrac{1}{2m} \log(\text{Const}) \\ &= \sup_{|\zeta-z|=r} \varphi_m(\zeta) - \tfrac{[\delta m]}{m} + \tfrac{1}{2m} \log(\text{Const}). \end{aligned}$$

La majoration de φ_m donnée par la propriété (i) de la proposition 3.0.15.1 entraîne :

$\sup\limits_{|\zeta-z|=r} \varphi_m(\zeta) \leq \sup\limits_{|w-z|<2r} \varphi(w) + \frac{1}{m} \log \frac{C_2}{r^n}$. Ceci implique finalement la majoration recherchée avec $C_3 = \sqrt{C}\sqrt{\text{Const}}$. □

La suite $(S_m)_m$ de $(1,1)$-courants positifs fermés à singularités analytiques donne une nouvelle régularisation de T. Nous montrons dans la suite que les masses de Monge-

Ampère des courants S_m vérifient, localement, les estimations asymptotiques envisagées par la conjecture 3.0.13.4. L'outil principal est le théorème d'Ohsawa-Takegoshi appliqué sur une droite complexe.

Lemme 3.0.18.2 *Soit U un ouvert de coordonnées, supposé de Stein et à bord strictement pseudoconvexe, de X et $\tilde{U}_m$ son image réciproque par μ_m. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de m telle que*

$$||\rho_m||_{L^\infty(\tilde{U}_m)} \leq C \log m$$

pour tout entier positif m.

Démonstration. Soit Y_m la variété des zéros du faisceau analytique cohérent $\mathcal{I}(mT)$. La restriction de l'éclatement μ_m à $\tilde{X}_m \setminus \operatorname{Supp} E_m$ définit un biholomorphisme sur $X \setminus Y_m$. Par un changement de variables, on obtient alors, pour $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} 1 = \int_U |\sigma_{m,j}|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda &= \int_{\tilde{U}_m} |\sigma_{m,j} \circ \mu_m|^2 |J_{\mu_m}|^2 e^{-2m\varphi\circ\mu_m} d\tilde{\lambda}_m \\ &= \int_{\tilde{U}_m} \left| \frac{\sigma_{m,j} \circ \mu_m}{g_m} \right|^2 e^{-2(m\varphi\circ\mu_m - \log|J_{\mu_m}| - \log|g_m|)} d\tilde{\lambda}_m, \end{aligned}$$

où J_{μ_m} est le jacobien de μ_m, $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur X et $d\tilde{\lambda}_m$ est la mesure de Lebesgue sur $\tilde{X}_m$. Ainsi, $\left(\dfrac{\sigma_{m,j} \circ \mu_m}{g_m}\right)_m$ définit une base orthonormée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\tilde{U}_m}(u_m)$, où

$$u_m = m\varphi \circ \mu_m - \log|J_{\mu_m}| - \log|g_m|.$$

Avec les notations de la proposition 3.0.18.1 pour l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{\tilde{U}_m}(u_m)$ à la place de $\mathcal{H}_U(m\varphi)$, on a $\rho_m = \varphi_m^{\frac{1}{m}}$. Ainsi, ρ_m est majorée par une constante indépendante de m. La partie délicate de ce lemme consiste à trouver une minoration de ρ_m qui satisfasse la condition de croissance voulue.

Si $B_m(1)$ est la boule unité de $\mathcal{H}_{\tilde{U}_m}(u_m)$, on a la minoration :

$$(\star) \qquad \rho_m(w) \geq \sup_{F_m \in B_m(1)} \frac{1}{2m} \log \sum_{|\alpha| \leq 1} |D^\alpha F_m(w)|^2.$$

Ceci résulte en exprimant en fonction de la base orthonormée les normes des formes linéaires $f \mapsto f(w)$ et $f \mapsto D^\alpha f(w)$ sur $\mathcal{H}_{\tilde{U}_m}(u_m)$, pour $|\alpha| = 1$. La fonction psh u_m s'écrit comme $u_m = v_m + m\,h$, où v_m est une fonction psh dépendant uniquement du hessien $dd^c u_m$ telle que $dd^c u_m = dd^c v_m$, et h est une fonction pluriharmonique. En particulier, quitte à rétrécir l'ouvert $\tilde{U}_m$, il existe une fonction holomorphe g telle que $h = \operatorname{Re} g$ sur $\tilde{U}_m$.

Comme e^{-2u_m} est L^1_{loc}, pour presque toute droite complexe L passant par l'origine du système de coordonnées de $\tilde{U}_m$, la restriction $e^{-2u_{m|L}}$ est L^1_{loc} sur L. La notion de "presque partout" est considérée ici par rapport à l'unique mesure $U(n)$-invariante de l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}$ des droites complexes de $\mathbb{C}^n$ passant par l'origine. Fixons une telle droite L et un système de coordonnées locales $w = (w_1, \ldots, w_n)$ telles que L est définie par $w_2 = \cdots = w_n = 0$. Le théorème 3.0.17.2 appliqué à $\varphi_0 = \frac{1}{m} u_{m|L}$ sur $\tilde{U}_m \cap L$, donne l'existence d'une fonction holomorphe

$$f_m(w_1) = e^{mg(w_1)} \prod_{j=1}^{N(m)} (w_1 - a_j)$$

sur $\tilde{U}_m \cap L$ et d'une constante $C_1 > 0$ indépendante de m et de L telles que $N(m) \leq C_1 m$ et

$$C_m = \int_{\tilde{U}_m \cap L} |f_m|^2 e^{-2u_m} d\tilde{\lambda}_m = o(m).$$

Tous les m_j du théorème 3.0.17.2 sont égaux à 1, car l'intégrabilité de $e^{-2u_{m|L}}$ implique que $\nu(u_{m|L}, w) < 1$ en tout point w. De plus, le théorème 3.0.17.2 (ii) donne l'existence $C_2 > 0$ indépendante de m et de L telle que les points a_j peuvent être choisis en sorte que $|a_j - a_k| \geq \dfrac{C_2}{m^2}$.

Par le théorème de prolongement L^2 de Ohsawa-Takegoshi (cf. 3.0.14.5), il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de m et une fonction holomorphe F_m sur $\tilde{U}_m$ telles que $F_{m|L} = f_m$ et

$$\int_{\tilde{U}_m} |F_m|^2 e^{-2u_m} d\tilde{\lambda}_m \leq C_3 \int_{\tilde{U}_m \cap L} |f_m|^2 e^{-2u_m} d\tilde{\lambda}_m = C_3\, C_m.$$

La fonction $\frac{F_m}{\sqrt{C_3\, C_m}}$ appartient à la boule unité $B_m(1)$ de l'espace $\mathcal{H}_{\tilde{U}_m}(u_m)$. Grâce à $(\star)$, on obtient la minoration suivante pour ρ_m :

$$\rho_m(w) \geq \tfrac{1}{m} \log |f_m'(w)| - \tfrac{1}{2m} \log(C_3\, C_m), \qquad w \in \tilde{U}_m \cap L.$$

En particulier, pour $w = a_j$, on a :

$$\begin{aligned} \rho_m(a_j) &\geq h(a_j) + \tfrac{1}{m} \sum_{k \neq j} \log |a_k - a_j| - \tfrac{1}{2m} \log(C_3\, C_m) \\ &\geq h(a_j) + (N(m) - 1) \log \tfrac{C_1}{\sqrt{m}} - \tfrac{1}{2m} \log(C_3\, C_m). \end{aligned}$$

Comme h est une fonction C^∞ (car pluriharmonique), elle est localement bornée (par des constantes indépendantes de L). Il existe, par conséquent, une constante $C_4 > 0$ indépendante de m et de L telle que $\rho_m \geq -C_4 \log m$, sur $\tilde{U}_m \cap L$, pour tout m et pour presque toute droite complexe L passant par l'origine. Ceci suffit pour conclure. $\square$

Bibliographie

[Agm65] S. Agmon — *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Van Nostrand, Princeton, 1965.

[BC64] R. Bishop, R. J. Crittenden — *Geometry of Manifolds*, Academic Press, 1964.

[Bon93] L. Bonavero — *Inégalités de Morse holomorphes singulières*, C. R. Acad. Sci, Série **I 317** (1993), 1163-1166.

[Bon98] L. Bonavero — *Inégalités de Morse holomorphes singulières*, J. Geom. Anal. **8** (1998), 409-425.

[Dem 82] J.-P. Demailly — *Estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'un fibré vectoriel holomorphe semi-positif au-dessus d'une variété kählérienne complète*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **15** (1982) 457-511.

[Dem85] J.- P. Demailly — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 189-229.

[Dem92] J.- P. Demailly — *Regularization of Closed Positive Curents and Intersection Theory*, J. Alg. Geom. **1** (1992), 361-409.

[Dem93] J.- P. Demailly — *A Numerical Criterion for Very Ample Line Bundles*, J. Differential Geom. **37** (1993), 323-374.

[Dem 97] J.-P. Demailly — *Complex Analytic and Algebraic Geometry*, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/˜demailly/manuscripts/agbook.ps.gz

[Dem99] J.-P. Demailly — *On the Ohsawa-Takegoshi-Manivel L^2 Extension Theorem*, Article en l'honneur de Pierre Lelong à l'occasion de son 85ème anniversaire.

[DP01] J.- P. Demailly, M. Paun — *Numerical Characterization of the Kähler Cone of Compact Kähler Manifold*, math. AG/0105176 (2001).

[DSk79] J. -P. Demailly, H. Skoda — *Relations entre les notions de positivité de P. A. Griffiths et de S. Nakano*, Séminaire P. Lelong - H. Skoda (Analyse), année 1978/79, Lecture Notes in Math. no. **822**, Springer-Verlag, berlin (1980) P. 304-309.

[Dra00] D. Drasin — *Approximation of Subharmonic Functions with Applications*, prépublication Montréal, 2000.

[GR70] H. Grauert, O. Riemenschneider — *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räume*, Invent. Math. **11** (1970), 263-292.

[HL84] G. Henkin, J. Leiterer — *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart, 1984.

[Hör65] L. Hörmander — *L^2 Estimates and Existence Theorems for the $\bar\partial$ Operator*, Acta Math. **113** (1965) 89-152.

[Hör66] L. Hörmander — *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 1st edition, Elsevier Science Pub., New York, 1966, 3rd revised edition, North-Holland math. library, Vol 7, Amsterdam (1990).

[JS93] S. Ji, B. Shiffman — *Properties of Compact Complex manifolds Carrying Closed Positive Curents*, J. Geom. Anal. **3**, No. 1, (1993), 37-61.

[Kob87] S. Kobayashi — *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Princeton University Press, 1987.

[Lel57] P. Lelong — *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 239-262.

[LT95] M. Lübke, A. Teleman — *The Kobayashi-Hitchin Correspondence*, World Scientific, 1995.

[Man93] L. Manivel, *Un théorème de prolongement L^2 de sections holomorphes d'un fibré hermitien*, Math. Zeitschrift **212** (1993) 107-122.

[Nad90]) A. M. Nadel — *Multiplier Ideal Sheaves and Existence of Kähler-Einstein Metrics of Positive Scalar Curvature*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989) 7299-7300, and Ann. of Math. **132** (1990) 549-596.

[OT87] T. Ohsawa, K. Takegoshi — *On The Extension of L^2 Holomorphic Functions*, Math. Zeitschrift **195** (1987) 197-204.

[Ohs88] T. Ohsawa — *On the Extension of L^2 Holomorphic Functions, II*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988) 265-275.

[Ohs94] T. Ohsawa — *On the Extension of L^2 Holomorphic Functions, IV: A New Density Conept*, Mabuchi, T (ed.) et al., Geometry and Analysis on Complex Manifolds. Festschrift for Professor S. Kobayashi's 60th birthday. Singapore: World Scientific, (1994) 157-170.

[Ohs95] T. Ohsawa — *On the Extension of L^2 Holomorphic Functions, III: Negligible Weights*, Math. Zeitschrift **219** (1995) 215-225.

[Shi86] B. Shiffman — *Complete Characterization of Holomorphic Chains of Codimension One*, Math. Ann., **274**, (1986) P. 233-256.

[Sib85] N. Sibony — *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Math. J. , **52** , No. **1** (1985), P. 157 - 197.

[Siu74] Y. T. Siu — *Analyticity of Sets Associated to Lelong Numbers and the Extension of Closed Positive Currents*, Invent. Math. , **27** (1974), P. 53-156.

[Siu84] Y. T. Siu — *A Vanishing Theorem for Semipositive Line Bundles over Non-Kähler Manifolds*, J. Differential Geom. **19** (1984), 431-452.

[Siu85] Y. T. Siu — *Some Recent results in Complex manifolds Theory Related to Vanishing Theorems for the Semipositive Case*, L. N. M. **1111**, Springer-Verlag, Berlin and New-York, (1985), 169-192.

[Siu02] Y. T. Siu — *Extension of Twisted Pluricanonical Sections with Plurisubharmonic Weight and Invariance of Semipositively Twisted Plurigenera for Manifolds Not Necessarily of General Type*, Bauer, Ingrid (ed.) et al., Complex geometry. Collection of papers dedicated to Hans Grauert on the occasion of his 70th birthday. Berlin: Springer. 223-277 (2002)

[Sko72a] H. Skoda— *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France **100** (1972) 353-408.

[Sko72b] H. Skoda— *Applications des techniques* L^2 *à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e Série, 5 (1972), 545-579.

[Sko78] H. Skoda — *Morphismes surjectifs de fibrés vectoriels semi-positifs*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t.**11**, 1978, P. 577 à 611.

[Tak73] F. Takemoto — *Stable Vector Bundles on Algebraic Surfaces*, Nagoya Math. J., **47** (1973), P. 29-48 ; II, ibid. **52** (1973), P. 173-195.

[UY 86] K. Uhlenbeck, S.T. Yau — *On the Existence of Hermitian-Yang-Mills Connections in Stable Vector Bundles*, Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. **XXXIX**, 1986, Supplement, pp. S257 - S293.

[UY 89] K. Uhlenbeck, S.T. Yau — *A Note on Our Previous Paper: On the Existence of Hermitian-Yang-Mills Connections in Stable Vector Bundles*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. **XLII**, pp. 703 - 707.

[Yul85] R. S. Yulmukhametov — *Approximation of Subharmonic Functions*, Anal. Math. **11** (1985), no. 3, 257-282 (en russe).