Thèse de Doctorat de Troisième Cycle
Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Conditions suffisantes pour l'existence du cône tangent à un courant positif fermé

Mokhtar MOUZALI

Préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques associé au C.N.R.S. (LA 188)

Soutenue le mercredi 24 mai 1989 devant la commission d'examen

Président : Alain DUFRESNOY
Examinateurs : Gérard BESSON, Jean-Pierre DEMAILLY (Directeur)

à ma petite fille adorée

Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur Jean-Pierre Demailly à qui je dois beaucoup pour les connaissances acquises à ses côtés. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma gratitude pour sa grande disponibilité, et l'attention soutenue avec laquelle il a suivi l'évolution de mes recherches.

Je remercie également Monsieur Alain Dufresnoy pour les nombreux et fructueux entretiens qu'il m'a accordé, et qui me fait l'honneur de présider le jury, ainsi que Monsieur Gérard Besson qui a accepté d'en faire partie.

L'excellente présentation de ce texte est due à Madame Ariette Guttin-Lombard qui en a réalisé l'impression avec beaucoup de soin, ainsi que Messieurs René Bontron et Jean-Paul Girard qui ont effectué les tirages. Je les en remercie très sincèrement.

Je tiens à remercier enfin tous mes amis de Grenoble qui ont agrémenté mon séjour par leur présence et leur soutien, avec une pensée particulière pour Hicham Tebbikh, Abdennacer Hassaïne, ainsi que Khalid Slaoui, dont.je garde un souvenir impérissable.

Résumé

On se propose dans le travail qui suit d'étudier un problème soulevé par R. Harvey [6] en 1977 : un courant θ positif et fermé, admet-il toujours un cône tangent ? C.O. Kiselman [8] a montré récemment que la réponse générale est négative : il existe un courant $\theta = i\partial\overline{\partial}\varphi$ de bidegré $(1, 1)$, où φ est une fonction plurisousharmonique, qui n'admet pas de cône tangent. M. Blel [2] a obtenu une condition suffisante pour l'existence d'une limite pour les homothétiques de θ, par les homothéties de rapport $r > 0$. Nous étendons ici cette condition suffisante au cas des homothéties de rapport complexe, puis nous donnons une deuxième condition suffisante plus naturelle.

Bien que les deux conditions soient apparentées, nous montrerons par des exemples qu'aucune des deux n'entraîne l'autre, ce qui prouve aussi qu'elles ne sont pas nécessaires.

Abstract The goal of this work is to study a question proposed by R. Harvey [6] in 1977 : does a positive closed current always possess a tangent cone ? C.O. Kiselman [8] has recently shown that the general response is negative : there is a current $\theta = i\partial\overline{\partial}\varphi$ of bi-degree (1,1), where φ is a plurisubharmonic function, which has no tangent cone. M. Blel [2] has obtained a sufRcient condition for the existence of a limit for the homothetic images of θ, by the homotheties of ratio $r > 0$.

Here, we extend this sufficient condition to the case of homotheties with complex ratio. We then give a second sufficient condition which is more natural.

Although the two conditions look quite similar, we give examples to show that in fact neither one implies the other. This proves also that neither of the two conditions is necessary.

Mots-clés : Courant positifs fermés – Cône tangent – Nombres de Lelong – Fonctions plurisousharmoniques.

Mathematical subject classification : 32C30

Introduction

L'objet du présent travail est d'étudier un problème posé par R. Harvey [6] en 1977 : un courant θ de type (p,p) positif et fermé, admet-il toujours un cône tangent ? De façon précise, si h_r désigne l'homothétie de rapport r, la famille $(h_r^*\theta)_{r>0}$ admet-elle une limite lorsque r tend vers 0, au sens faible des courants ?

En 1971, J.R. King [7] a montré que le cône tangent au courant d'intégration sur un ensemble analytique X existe : c'est le courant d'intégration sur le cône tangent à X (compté avec multiplicité sur chaque composante).

Mais tout récemment, en 1988, C.O. Kiselman [8] a montré que la réponse générale est négative : il existe un courant $\theta = i\partial\overline{\partial}\varphi$ de bidegré $(1,1)$, associé à une fonction plurisousharmonique φ, qui n'admet pas de cône tangent. La construction de Kiselman met en évidence le rôle de la masse projective $\nu_\theta(r)$ du courant θ . C'est à partir d'hypothèses sur la fonction ν_θ que nous chercherons des conditions suffisantes pour l'existence du cône tangent.

Au chapitre I, nous montrons d'abord que la famille $(h_r^*\theta)_{r>0}$ est de masse uniformément petite au voisinage de 0, ce qui ramène l'étude de la convergence faible aux compacts de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Grâce à l'utilisation de coordonnées projectives $w = \Phi(z)$, on montre ensuite au chapitre II que les coefficients de $T = \Phi_*\theta$ faisant intervenir des directions radiales tendent vers 0. On cherche enfin une estimation des autres coefficients en étudiant leur variation dans la direction radiale ; une intégration par parties et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournissent alors l'estimation cherchée en fonction des masses projectives du courant. Ceci nous permet d'obtenir une première condition suffisante pour l'existence du cône tangent, et le résultat est valable en fait pour des homothéties de rapport complexe tendant vers 0.

M. Blel [2] avait obtenu cette condition par une technique voisine, dans le cas d'une homothétie à rapport réel. En prenant la dérivée seconde des coefficients non radiaux dans la direction radiale complexe, nous obtenons d'autre part une deuxième condition suffisante, qui est sans doute plus naturelle que la première.

Nous terminons notre travail par des exemples qui montrent qu'aucune des deux conditions n'entraîne l'autre, et ceci prouve aussi qu'elles ne sont certainement pas nécessaires.

Bibliographie

[1] M. Blel. — *Cône tangent à un courant positif fermé de type* $(1,1)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. (à paraître, preprint avril 1989).

[2] M. Blel. — *Cône tangent à un courant positif fermé*, preprint de la Faculté des Sciences de Monastir, 1988.

[3] J.-P. Demailly. — *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **32** (1982), 37–66.

[4] J.-P. Demailly. — *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité*, Acta Math, **159** (1987), 153–169.

[5] J.-P. Demailly. — *Complex analytic and differential geometry*, livre en ligne.

[6] R. Harvey. — *Holomorphic chains and their boundaries*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics of the Amer. Math. Soc., held in 1975 at Williamstown, **30**-1 (1977), 309–382.

[7] J.R. King. — *The currents defined by analytic varieties*, Acta. Math., **127** (1971), 185–220.

[8] C.O. Kiselman. — *Tangents of plurisubharmonic functions*, preprint Uppsala University (Sweden), december 1988.

[9] C.O. Kiselman. — *Densité des fonctions plurisubharmoniques*, Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), 295–304.

[10] P. Lelong. — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New-York, 1968.

[11] P. Lelong and L. Gruman. — *Entire functions of several complex variables*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 282, Springer-Verlag, 1982.

[12] H. Skoda. — *Cours de 3ème cycle à l'Université de Paris VI*, 1978-79.

[13] P. Thie. — *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Annalen, **172** (1967), 269–312.

Le présent travail est paru dans :

[**] M. Blel, J.-P. Demailly et M. Mouzali. — *Sur l'existence du cône tangent à un courant positif fermé*, Arkiv för Mat, **28** (1990), 231-248.