Thèse de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Transformations intégrales pour les courants positifs fermés et théorie de l'intersection

Michel Méo

préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques, UMR 5582 du C.N.R.S.

soutenue le mercredi 17 janvier 1996

Jury :

Jean-Pierre Demailly (UJF), directeur
Nessim Sibony (Paris XI), rapporteur
Henri Skoda (Paris VI), rapporteur
Christophe Soulé (CNRS, IHÉS), examinateur
Mikhail Zaidenberg (UJF), président

RÉSUMÉ

On étudie tout d'abord la transformation intégrale qui permet d'étendre aux courants positifs fermés la définition des coordonnées de Chow des cycles effectifs de l'espace projectif. À un courant de bidegré (q,q) est associé un courant de bidegré $(1,1)$, obtenu par intégration sur les sous-espaces projectifs de dimension $q-1$ et dont les potentiels jouent le rôle des formes de Chow. On vérifie que cette transformation est elle aussi injective. La démonstration repose, après utilisation d'un tranchage, sur une formule classique d'inversion de la transformation de Radon des fonctions.

Dans la seconde partie on établit, pour un courant positif fermé défini sur une variété projective, des inégalités auto-intersection qui permettent de borner le degré des strates où la multiplicité est constante. La démonstration consiste d'abord à se ramener par plongement au cas de l'espace projectif. On applique alors la théorie des opérateurs de Monge-Ampère pour effectuer l'intersection du courant avec les régularisés d'un courant auxiliaire de bidegré $(1,1)$ qui a le même degré et les mêmes nombres de Lelong. Pour définir ce dernier, plusieurs constructions différentes sont étudiées.

Dans la dernière partie on étudie l'existence de l'image inverse d'un courant positif fermé quelconque par une application analytique surjective. Sauf dans le cas de la codimension 1, cette image inverse n'existe pas en général : le cas d'un éclatement donne un contre-exemple. Dans le cas d'une application ouverte, on peut en revanche définir l'image inverse. On se ramène grâce à un tranchage au cas d'un morphisme fini et on utilise alors un potentiel local associé au courant. On donne ensuite des inégalités entre les nombres de Lelong du courant et ceux de son image inverse.

MOTS-CLÉS

Espace projectif, grassmannienne, coordonnées de Chow, transformation de Radon, courant positif fermé, potentiel presque plurisousharmonique, opérateur de Monge-Ampère, forme de Green, classes de Bott-Chern.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14C05,32C30, 32J25, 53C65, 58A25.

SOMMAIRE

Introduction

Les chapitres 1 et 2 de cette thèse traitent de la construction géométrique à l'aide d'images directes et inverses de potentiels presque plurisousharmoniques associés naturellement aux courants positifs fermés de l'espace projectif. Le premier de ces potentiels intervient dans l'étude de l'analogue pour les courants des coordonnées de Chow, le second sert à établir des inégalités d'auto-intersection qui permettent de borner le degré des strates de multiplicité constante d'un courant positif fermé.

Dans le chapitre 3, le problème de la définition de l'image inverse d'un courant positif fermé quelconque par une application analytique surjective est étudié et réduit à des problèmes d'intersection de courants.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Jean-Pierre Demailly qui m'a proposé l'étude de ces questions et dont les remarques et les conseils ont aidé à l'élaboration de ce travail. Mes remerciements s'adressent aussi à Arlette Guttin-Lombard pour le soin et la diligence avec lesquels elle a effectué la saisie du manuscrit.

1. Coordonnées de Chow et géométrie intégrale

On étudie ici la transformation intégrale qui permet d'étendre aux courants positifs fermés la définition des coordonnées de Chow des cycles effectifs d'une variété projective. Pour la définir, on considère la famille des cycles de dimension $q-1$ qui sont des ensembles-bases de systèmes linéaires d'un diviseur très ample donné et la projection sur l'espace des paramètres du graphe qui lui est associé. La transformée de Chow d'un courant quelconque de bidegré (q, q) est alors le courant de bidegré $(1, 1)$ obtenu par intégration le long des fibres de cette fibration.

Pour les courants fermés d'ordre 0, on donne une autre façon de calculer cette transformée qui consiste, sachant que le degré est conservé, à exprimer d'abord son potentiel : pour un tel courant T défini dans une variété projective X, ce dernier est à une constante près égal à la fonction qui à un cycle Y obtenu comme précédemment associe la masse $\int_{XY} T \wedge \gamma_Y$ où γ_Y est une forme de Green explicite de Y. Dans le cas où T est le courant associé à un cycle effectif Z, on retrouve en fait la fonction $\log \|f_Z\|$ avec f_Z désignant une forme de Chow de Z.

On vérifie ensuite l'injectivité de la transformation de Chow. Après s'être ramené au cas de l'espace projectif en plongeant la variété, la démonstration repose sur une formule d'inversion due à Helgason pour la transformation de Radon des fonctions. Cette formule donne directement l'injectivité de la transformation de Chow dans le cas des courants de dimension 0. Pour les courants de bidegré (q, q) quelconque qui sont localement plats, il suffit alors de la combiner avec un tranchage. Dans le cas général, on la combine avec des calculs en coordonnées effectués pour les formes $\mathcal{C}^\infty$ dans [GGG] et qui s'étendent directement aux courants.

2. Potentiel de Lelong-Skoda et théorie de l'intersection

Dans cette partie, notre but est de démontrer des inégalités d'auto-intersection pour les courants positifs fermés définis sur une variété projective. On se ramène au cas de l'espace projectif par un argument de plongement et on utilise alors un potentiel qu'on peut calculer explicitement de plusieurs façons.

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p, p) défini dans une variété complexe X de dimension n et, pour $c > 0$, E_c le sous-ensemble analytique formé des points en lesquels le nombre de Lelong de T est supérieur ou égal à c. On suppose X compacte et munie d'une métrique kählérienne ω et on s'intéresse à une majoration du degré par rapport à ω des composantes irréductibles de dimension q donnée apparaissant dans les E_c en termes de la classe de cohomologie de T.

On rappelle le résultat obtenu par Demailly (cf. [De3]). Soit $0 = b_p \leq \cdots \leq b_{-1}$ la suite des valeurs de saut de dimension des E_c. Autrement dit $b_q = \inf\{c > 0, \dim E_c \leq q\}$ avec en particulier $b_{-1} = \max\limits_{x\in X} \nu(T, x)$ et pour $c \in]b_q, b_{q-1}]$ la dimension de E_c est q. Soit $(Z_{q,k})_{k\geq 1}$ la famille au plus dénombrable des composantes irréductibles de dimension q des E_c pour $c \in]b_q, b_{q-1}]$ et $\nu_{q,k} = \min\limits_{x\in Z_{q,k}} \nu(T, x) \in]b_q, b_{q-1}]$ le nombre de Lelong générique de T le long de $Z_{q,k}$.

Lorsque $p = n - 1$ c'est-à-dire T de bidegré $(1, 1)$, l'inégalité suivante est vérifiée

$$(1) \qquad \sum_{k\geq 1} (\nu_{q,k} - b_{n-1}) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\{Z_{q,k}\}\{\omega\}^q \leq (\{T\} + b_{n-1}\{u\}) \cdots (\{T\} + b_q\{u\})\{\omega\}^q$$

où $\{u\}$ est une classe de cohomologie dans X semi-positive (*i.e.* dans l'adhérence du cône de Kähler) telle que $c_1(\mathcal{O}_{TX}(1)) + \pi_X^*\{u\}$ soit semi-positive, $\mathcal{O}_{TX}(1)$ désignant le fibré en droites tautologique associé au fibré tangent TX au-dessus du fibré des hyperplans $P(T^*X)$ et $\pi_X : P(T^*X) \to X$ la projection. La démonstration utilise le résultat de régularisation suivant, qui est vrai d'ailleurs avec une métrique hermitienne ω quelconque (cf. [De3] et [De5]).

On suppose $\mathcal{O}_{TX}(1)$ muni d'une métrique hermitienne dont la forme de courbure vérifie $\frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}_{TX}(1))+\pi_X^* u \geq 0$ pour une certaine forme $\mathcal{C}^\infty$ positive u dans X de bidegré $(1,1)$. Soit T un courant fermé de bidegré $(1,1)$ vérifiant $T \geq \gamma$ pour une certaine forme réelle continue γ et θ une forme réelle $\mathcal{C}^\infty$ fermée dans la même classe de dd^c-cohomologie que T *i.e.* $T = \theta + dd^c U$ avec U une fonction presque plurisousharmonique. Alors, pour tout $c > 0$, il existe une suite de courants fermés $(T_{c,\ell})_{\ell \geq 1}$ qui converge faiblement vers T et vérifie

(i) $T_{c,\ell} = \theta + dd^c U_{c,\ell}$ où $(U_{c,\ell})_{\ell \geq 1}$ est une suite décroissante de fonctions presque plurisousharmoniques $\mathcal{C}^\infty$ dans X
E_c qui converge vers U.

(ii) $T_{c,\ell} \geq \gamma - \min(\lambda_\ell, c)u - \delta_\ell \omega$ où $(\lambda_\ell)_{\ell \geq 1}$ est une suite décroissante de fonctions continues telle que $\lambda_\ell(x) \to \nu(T,x)$ pour tout $x \in X$ et $(\delta_\ell)_{\ell \geq 1}$ est une suite décroissante de constantes positives qui converge vers 0.

(iii) $\nu(T_{c,\ell}, x) = (\nu(T,x) - c)_+$ pour tout $x \in X$.

L'idée pour en déduire l'inégalité d'intersection est de considérer pour des valeurs $c_j \to b_j^+$, j variant de $n-2$ à q, le produit $T \wedge \big(T_{c_{n-2},\ell} + c_{n-2}u + \delta_\ell \omega\big) \wedge \cdots \wedge \big(T_{c_q,\ell} + c_q u + \delta_\ell \omega\big)$ qui est bien défini à l'aide de la théorie des opérateurs de Monge-Ampère puisque les singularités de $T_{c_j,\ell} + c_j u + \delta_\ell \omega$ sont contenues dans un sous-ensemble analytique de dimension j.

Lorsque X est l'espace projectif $\mathbb{P}_n$, on peut prendre $u = 0$ et l'inégalité (1) s'écrit simplement

$$\sum_{k \geq 1} (\nu_{q,k} - b_{n-1}) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)^{n-q}$$

en désignant par $\delta(\cdot)$ les degrés relativement à ω la métrique de Fubini-Study.

Un de nos objectifs est d'établir l'inégalité analogue pour un courant positif fermé T de bidimension (p,p) quelconque dans $\mathbb{P}_n$

$$\sum_{k \geq 1} (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)^{p+1-q}. \tag{2}$$

L'idée est de considérer un courant positif fermé T_1 de bidegré $(1,1)$ dans $\mathbb{P}_n$ qui possède le même degré que T et le même nombre de Lelong en tout point et d'utiliser de la même façon l'opérateur de Monge-Ampère $T \wedge \big(T_{1,c_{n-2},\ell} + \delta_\ell \omega\big) \wedge \cdots \wedge \big(T_{1,c_q,\ell} + \delta_\ell \omega\big)$.

Ensuite, lorsque T est défini dans une variété projective X et ω est une métrique kählérienne dans X définissant une classe de cohomologie entière, un plongement dans un espace projectif effectué grâce au théorème de Matsusaka (cf. [KM]) implique l'existence d'une constante C ne dépendant que de n, $\{\omega\}^n$ et $\{\omega\}^{n-1} \cdot c_1(X)$ telle que

$$\sum_{k\geq 1} (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq C\delta(T)^{p+1-q}. \tag{3}$$

Pour définir T_1 on peut utiliser comme Lelong et Skoda (cf. [Le2] et [Sk1]) un potentiel. Soit $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}_n$ l'application canonique, on considère dans $\mathbb{C}^{n+1}$ le courant positif fermé

$$dd^c \left(z \to -\frac{1}{(p+1)2^{p+2}} \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \left\{ \frac{1}{|z-x|^{2p+2}} - \frac{1}{(1+|x|^2)^{p+1}} \right\} \right.$$
$$\left. (\pi^* T)(x) \wedge \left(dd^c |x|^2 \right)^{p+1} \right). \tag{4}$$

Il est invariant par homothéties et donc provient d'un courant défini dans $\mathbb{P}_n$ qui a les mêmes nombres de Lelong que T et comme le montre un calcul facile le même degré que T.

Demailly en a remarqué une construction géométrique. On projette T orthogonalement sur un sous-espace projectif de dimension $p+1$ puis on considère l'image inverse. Sauf pour un ensemble négligeable dans la grassmannienne $G(p+2, \mathbb{C}^{n+1})$ des sous-espaces projectifs de dimension $p+1$ son degré est le même que celui de T mais l'évaluation de ses nombres de Lelong n'est pas aisée. On définit T_1 comme la moyenne relativement à $G(p+2, \mathbb{C}^{n+1})$ de ce courant. Remontant à $\mathbb{C}^{n+1}$ on voit que $\pi^* T_1$ est de la même façon la moyenne de l'image inverse de la projection orthogonale de T sur un sous-espace vectoriel de dimension $p+2$. Son nombre de Lelong en un point z_0 s'obtient donc comme la limite lorsque ε tend vers 0 de l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \phi_1(z/\varepsilon)$ avec ϕ_1 une forme de bidegré $(p+1, p+1)$ qui est la moyenne de l'image réciproque de la projection orthogonale de $\left(dd^c \log|z|\right)^n_{|B(0,1)}$. Cette forme est invariante par le groupe unitaire et s'écrit simplement $f\big(|z|\big)\left(dd^c \log|z|\right)^{p+1}$ avec $f(0) = 1$ et $f(\infty) = 0$. Un passage à la limite permet alors de conclure à la conservation du nombre de Lelong.

Ensuite, on a cherché à exprimer le potentiel de T_1 en fonction de T en des termes intrinsèques à l'espace projectif. Un simple calcul d'image directe à partir de la formule (4) permet d'y arriver. Mais si on raisonne géométriquement en restant dans $\mathbb{P}_n$, on voit que T_1 s'obtient à partir de T à l'aide d'un noyau $\widetilde{K}$ qui est la moyenne relativement à $G(p+2, \mathbb{C}^{n+1})$ de l'image réciproque dans $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ du courant d'intégration sur la diagonale associée à un sous-espace projectif de dimension $p+1$. Il se pose alors la question d'exprimer une forme de Green de ce sous-ensemble.

On peut s'y prendre de la façon suivante. Soit $\beta : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{p+2}$
$\{0\} \times \mathbb{C}^{p+2}$
$\{0\} \to \mathbb{C}^{p+2}$ définie par $\beta(t,z,x) = tz + x$ et α la projection sur les deux derniers facteurs. L'image réciproque dans $\mathbb{C}^{p+2}$
$\{0\} \times \mathbb{C}^{p+2}$
$\{0\}$ du courant d'intégration sur la diagonale Δ de $\mathbb{P}_{p+1} \times \mathbb{P}_{p+1}$ est alors égale à

$\alpha_* \beta^* \delta_0 = \alpha_* \big(dd^c \log|tz+x|\big)^{p+2}$. On peut ensuite l'exprimer comme somme de la forme $\sum\limits_{j=0}^{p+1} \big(dd^c \log|z|\big)^j \wedge \big(dd^c \log|x|\big)^{p+1-j}$ qui représente la classe de cohomologie de Δ dans $\mathbb{P}_{p+1} \times \mathbb{P}_{p+1}$ et d'un terme qui est le dd^c d'une forme singulière le long de Δ se calculant à l'aide de la quantité $\frac{|z\wedge x|}{|z||x|}$.

On a en fait procédé autrement en interprétant Δ comme le lieu des zéros de la section du fibré vectoriel ${\mathrm{pr}_1}^*\mathcal{O}(1) \otimes {\mathrm{pr}_2}^*(\mathbb{C}^{p+2}/\mathcal{O}(-1))$ au-dessus de $\mathbb{P}_{p+1} \times \mathbb{P}_{p+1}$ qui associe $z^* \otimes (z \bmod \mathbb{C}x)$ à $([z],[x])$.

De façon générale, étant donnés E un fibré vectoriel hermitien de rang r au-dessus d'une variété complexe X et Z une sous-variété lisse de X définie comme l'ensemble des zéros d'une section s de E transverse à la section nulle, on explicite une forme différentielle ψ' à coefficients dominés par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$ telle que

$$[Z] = c_r(\Theta) + \big(dd^c \log|s|\big)^r + dd^c\psi'$$

Θ désignant la forme de courbure de E et $c_r(\Theta)$ sa forme de Chern de degré maximum. Pour cela il suffit de remarquer la formule de King (cf. [Kin])

$$[Z] = \big(dd^c \log|s|\big)^r - \big(dd^c \log|s|\big)^r_{|X Z}$$

puis d'exprimer $\big(dd^c \log|s|\big)^r_{|X Z}$ en suivant une méthode due à Bott-Chern (cf. [BC1]).

Revenant à l'expression de $[\Delta]$, on trouve donc que dans $\mathbb{P}_{p+1} \times \mathbb{P}_{p+1}$

$$[\Delta] = \sum_{j=0}^{p+1} {\mathrm{pr}_1}^*\left(\omega^j_{|\mathbb{P}_{p+1}}\right) \wedge {\mathrm{pr}_2}^*\left(\omega^{p+1-j}_{|\mathbb{P}_{p+1}}\right) + \big(dd^c \log|s|\big)^{p+1} + dd^c\psi'$$

avec $|s| = \frac{|z\wedge x|}{|z||x|}$ et ψ' une forme à coefficients $O\left(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\right)$. Pour expliciter $\widetilde{K}$, il ne reste maintenant plus qu'à calculer la moyenne de l'image réciproque dans $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$ des différents termes figurant au second membre !

3. Image inverse d'un courant positif fermé par une application analytique surjective

Dans cette partie, on s'intéresse au problème de définir l'image inverse d'un courant positif fermé quelconque par une application analytique surjective. Pour les courants de bidegré (1,1) on a une bonne théorie en passant par les fonctions plurisousharmoniques. Dans le cas d'un bidegré quelconque, on remarque qu'il suffit d'après le théorème de platification de considérer uniquement le cas d'une application ouverte (c'est-à-dire à fibres équi-dimensionnelles) et celui d'un éclatement.

Dans le cas d'une application ouverte on montre que l'image inverse existe toujours. On se ramène par un tranchage au cas d'un morphisme fini et on définit alors l'image inverse en utilisant un potentiel local. Dans le cas d'un éclatement on montre qu'on ne peut pas en général définir d'image inverse : on donne, en toute codimension supérieure ou égale à 2, un exemple de courant dont l'image inverse dans le complémentaire du diviseur exceptionnel est localement de masse infinie au voisinage de celui-ci. La construction repose sur un exemple dû à Kiselman (cf. [Kis2]) d'une fonction plurisousharmonique dont la masse de Monge-Ampère est infinie localement au voisinage du lieu des pôles.

Enfin on vérifie que lorsque l'image inverse f^*T d'un courant positif fermé T par une application f quelconque existe, elle vérifie en un point x la minoration du nombre de Lelong $\nu(f^*T, x) \geq \nu(T, f(x))$. Dans le cas d'une application ouverte, on a aussi une majoration de $\nu(f^*T, x)$ par le produit de $\nu(T, f(x))$ et d'une multiplicité convenable attachée à f au point x.

Chapitre 0

RAPPELS SUR LES COURANTS POSITIFS

1. Courant d'intégration sur un ensemble analytique

On rappelle d'abord la définition de la positivité introduite dans [Le 1]. Un courant T de bidimension (p,p) défini dans une variété complexe X est dit (faiblement) positif si pour tout choix de $(1,0)$-formes $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X, la distribution $T\wedge i\alpha_1\wedge\bar\alpha_1\wedge\cdots\wedge i\alpha_p\wedge\bar\alpha_p$ est positive. Alors, dans toute carte, les coefficients T_{IJ} de T sont des mesures complexes et, à des constantes près, sont dominés par la mesure trace $\sum\limits_I T_{II}$ qui est positive.

On voit facilement qu'un courant $T=i\sum\limits_{1\le j,k\le n}T_{jk}dz_j\wedge d\bar z_k$, $n=\dim X$, de bidegré $(1,1)$ est positif si et seulement si la distribution $\sum\lambda_j\bar\lambda_k T_{jk}$ est positive pour tout choix de nombres complexes $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Ainsi, si u est une fonction plurisousharmonique qui n'est pas identiquement $-\infty$, le courant $i\partial\overline{\partial}u$ est positif. Réciproquement, tout courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ s'écrit sous cette forme localement (en fait sur tout ouvert $\Omega\subset X$ tel que $H^2_{DR}(\Omega,\mathbb{R})=0$).

L'exemple géométrique fondamental de courant positif fermé est le courant $[Z]$ associé à un sous-ensemble analytique Z de X de dimension pure p, obtenu par intégration sur l'ensemble de ses point réguliers :

$$\langle[Z],\alpha\rangle=\int_{Z_{\rm reg}}\alpha,\quad \alpha\in\mathcal{D}^{p,p}(X).$$

Ce courant est bien défini car $Z_{\rm reg}$ est de masse finie au voisinage d'un point singulier de Z comme on peut le voir à l'aide du théorème de paramétrisation locale des ensembles analytiques. Il est clairement positif et le fait qu'il soit fermé a été vérifié initialement dans [Le1].

C'est aussi une conséquence du théorème de prolongement de Skoda-El Mir (cf. [Sk2], [EM], [Sib]): l'extension triviale d'un courant positif fermé défini hors d'un sous-ensemble fermé pluripolaire complet $E\subset X$ et localement de masse finie près de E est encore fermée. Rappelons qu'un sous-ensemble de X est dit pluripolaire complet s'il est donné localement comme l'ensemble des pôles d'une fonction plurisousharmonique. En particulier, un sous-ensemble analytique est pluripolaire complet. Le fait que $[Z]$ soit fermé s'obtient alors en appliquant le résultat cité au courant $[Z_{\text{reg}}]$ défini dans X Z_{sing}.

Enfin dans le cas particulier du diviseur des zéros Z_f d'une fonction holomorphe f définie dans X, on a la relation de Poincaré-Lelong

$$[Z_f] = \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f|.$$

2. Nombres de Lelong

On rappelle d'abord l'existence de nombres-densité pour les courants positifs fermés (cf. [Le1]). Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}^n$. On désigne par

$$\sigma_T = T \wedge \frac{1}{p!}\beta^p \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2$$

la mesure trace de T et par $\nu(T,x,r) = \frac{\sigma_T(B(x,r))}{\pi^p r^{2p}/p!}$ le quotient de l'aire de T dans une boule $B(x,r) \subset\subset \Omega$ par l'aire de l'intersection de cette boule avec un sous-espace affine de dimension p passant par x. On peut alors montrer que pour $0 < r' < r$

$$\nu(T,x,r) - \nu(T,x,r') = \int_{r' \leq |z-x| < r} T(z) \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z-x|\right)^p.$$

Cette relation implique la croissance par rapport à r de $\nu(T,x,r)$ et donc l'existence de $\lim\limits_{r\to 0}\nu(T,x,r)$ appelée nombre de Lelong de T en x et notée $\nu(T,x)$.

Par exemple, lorsque u est une fonction plurisousharmonique,

$$\nu(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}u, x) = \sup\{\gamma \geq 0, \quad u(z) \leq \gamma\log|z-x| + O(1) \text{ en } x\}$$

et donc faisant $u = \log|f|$ avec f holomorphe, on obtient

$$\nu([Z_f], x) = \max\{k \in \mathbb{N}, \ D^\mu f(x) = 0 \text{ si } |\mu| < k\}$$

qui n'est autre que l'ordre de f en x.

Plus généralement, le nombre de Lelong en un de ses points x du courant d'intégration associé à un sous-ensemble analytique Z coïncide avec la multiplicité de Z en x qui est définie comme le degré du revêtement ramifié obtenu en projetant un voisinage de x dans Z sur un sous-espace affine générique passant par x (cf. [Th]).

Par ailleurs, les nombres de Lelong sont invariants par biholomorphisme (cf. [Siu1]) ce qui permet de les définir pour les courants positifs fermés donnés sur des variétés.

Le résultat fondamental concernant les nombres de Lelong est le théorème de Siu (cf. [Siu1]) affirmant la semi-continuité supérieure des nombres de Lelong pour la topologie de Zariski analytique. En d'autres termes, pour T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur une variété complexe X, les ensembles de sur-niveau $E_c(T) = \{x \in X,\ \nu(T,x) \geq c\}$ avec $c > 0$ sont analytiques dans X. La démonstration utilise de façon cruciale les estimations L^2 pour l'opérateur $\overline{\partial}$, précisément le théorème de Hörmander-Bombieri-Skoda.

Signalons que Demailly a donné pour les résultats énoncés précédemment des démonstrations notablement simplifiées grâce à l'introduction de nombres de Lelong associés à des poids plurisousharmoniques quelconques (cf. [De2]).

Rappelons enfin la formule de décomposition de Siu (cf. [Siu1]) : tout courant positif fermé T de bidimension (p,p) s'écrit $T = \sum\limits_{k\geq 1} \lambda_k [Z_k] + R$ avec $(Z_k)_{k\geq 1}$ la famille des composantes irréductibles de dimension exactement p apparaissant dans les $E_c(T)$, $\lambda_k = \min\limits_{x\in Z_k} \nu(T,x)$ le nombre de Lelong générique de T sur Z_k et R un courant positif fermé tel que $\dim E_c(R) < p$ pour tout $c > 0$.

3. Opérateurs de Monge-Ampère

On donne ici quelques résultats sur l'intersection des courants positifs fermés extraits de [De4] (cf. également [FS]).

Par extension de la définition de l'opérateur de Monge-Ampère classique, qui à une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ associe $(i\partial\overline{\partial}u)^n$, le terme opérateur de Monge-Ampère désigne un produit de la forme $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ avec T un courant positif fermé et u une fonction plurisousharmonique définis sur une variété X. Un tel produit est bien défini (cf. [BT]) lorsque u est localement bornée en posant $T \wedge i\partial\overline{\partial}u = i\partial\overline{\partial}(uT)$. En effet, T étant à coefficients mesure et u borélienne localement bornée, le produit uT existe et on calcule ensuite son $\partial\overline{\partial}$ au sens des courants. On voit aisément en régularisant localement u que $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ est encore positif. Les opérateurs de Monge-Ampère ainsi définis vérifient le théorème de convergence monotone : pour toute suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques u_k qui converge vers u, la suite de courants $T \wedge i\partial\overline{\partial}u_k$ converge faiblement vers $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$.

Lorsque u n'est pas supposée bornée, les produits $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ ne sont pas nécessairement définis dans X. Par exemple, il existe des fonctions plurisousharmoniques u définies dans des ouverts de $\mathbb{C}^n$ telles que $(i\partial\overline{\partial}u)^n$ soit de masse infinie au voisinage des pôles de u (cf. [Siu2] où figure une construction due à Shiffman et B.A. Taylor ; [Kis2]). Cependant, on peut définir des opérateurs de Monge-Ampère pour certaines fonctions u ayant des pôles de telle sorte que le théorème de convergence monotone soit encore vérifié. En fait, le courant $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ est alors défini comme la limite faible des $T \wedge i\partial\overline{\partial}u_k$ avec $u_k = \max(u, -k)$. Pour que cette limite existe, on a besoin d'une hypothèse sur la dimension des pôles de u par rapport à la dimension de T. Précisément, supposons

que T est de bidimension (p,p) et u localement bornée dans le complémentaire d'un ensemble analytique A vérifiant $\dim A < p$, alors $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ existe dans X. Donnons le principe de la démonstration. Il suffit de considérer le cas où X est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}^n$. On se ramène alors par un argument de tranchage au cas où A est fini : on choisit des coordonnées $x = (x', x'')$ dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C}^{n-p+1}$ telles que pour x' proche de 0, l'intersection $A \cap x' \times \mathbb{C}^{n-p+1}$ est finie et on définit alors les tranches $(T \wedge i\partial\overline{\partial}u)_{|x'\times\mathbb{C}^{n-p+1}} = T_{|x'\times\mathbb{C}^{n-p+1}} \wedge i\partial\overline{\partial}u_{|x'\times\mathbb{C}^{n-p+1}}$. Supposons donc seulement $X = B(0,R)$ est une boule ouverte dans $\mathbb{C}^n$ et $A = \{0\}$. Il s'agit de voir que $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ est de masse finie au voisinage de 0. Pour cela, on utilise la convergence faible dans $B(0,R)$
$\{0\}$ des $T \wedge i\partial\overline{\partial}u_k$ vers $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$: pour $r < R$, on a

$$\int_{B(0,r)\{0\}} T \wedge i\partial\overline{\partial}u \wedge \beta^{p-1} \leq \underline{\lim} I_k \quad \text{avec} \quad I_k = \int_{B(0,r)} T \wedge i\partial\overline{\partial}u_k \wedge \beta^{p-1}.$$

La suite I_k est en fait stationnaire. En effet, si $k > C = -\inf_{|z|=r} u$, la fonction u_k coïncide avec u dans un voisinage du bord dans la boule $B(0,r)$. Pour $k, \ell > C$, la différence $I_k - I_\ell$ s'exprime donc comme la masse sur $B(0,r)$ du $\partial\overline{\partial}$ d'un courant à support compact dans cette boule et est bien nulle.

On prolonge alors $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ en 0 en posant

$$\int_{\{0\}} T \wedge i\partial\overline{\partial}u \wedge \alpha = \lim_{r\to 0} \underline{\lim} \int_{B(0,r)} T \wedge i\partial\overline{\partial}u_k \wedge \alpha$$

pour toute forme positive α de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Dans [De4] il est démontré plus généralement que le produit $T \wedge i\partial\overline{\partial}u$ existe dès que l'intersection du support de T et de l'ensemble des points au voisinage desquels u n'est pas bornée est de mesure de Hausdorff $(2p-1)$-dimensionnelle nulle. En fait, il suffit que cette intersection soit de mesure de Hausdorff $2p$-dimensionnelle nulle (cf. [FS]).

Signalons aussi la minoration du nombre de Lelong $\nu(T \wedge \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}u, x) \geq \nu(T,x)\nu(u,x)$ en un point x quelconque. La démonstration (cf. [De4]) utilise le calcul des nombres de Lelong à l'aide de la formule

$$\nu(T,x) = \int_{\{x\}} T(z) \wedge \left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z-x|\right)^p.$$

Rappelons enfin la notation $d^c = \frac{1}{2\pi i}(\partial - \overline{\partial})$ qui permet d'écrire de façon condensée $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} = dd^c$.

Chapitre 1

COORDONNÉES DE CHOW ET GÉOMÉTRIE INTÉGRALE

1. Rappels sur les coordonnées de Chow

On note $P(V)$ l'espace projectif des droites d'un espace vectoriel complexe V de dimension $N+1$, $[x]$ le point de $P(V)$ associé à un vecteur non nul x de V, $G(q,V)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de V de dimension q où $1 \leq q \leq N$, $P(s)$ le sous-espace projectif de $P(V)$ associé à $s \in G(q,V)$.

(1.1) PROPOSITION. — *Pour Z sous-ensemble algébrique irréductible de $P(V)$ de codimension q, l'ensemble Σ des $s \in G(q,V)$ tels que $Z \cap P(s) \neq \emptyset$ est une hypersurface algébrique irréductible de $G(q,V)$.*

Démonstration. — Soit Γ la sous-variété de $G(q,V) \times P(V)$ formée des couples $(s,[x])$ vérifiant $s \ni x$ et $\psi : \Gamma \to G(q,V)$, $\varphi : \Gamma \to P(V)$ les restrictions à Γ des projections canoniques. Alors $\Sigma = \psi(\varphi^{-1}(Z))$.

(1.2) LEMME. — *Soient A et B des espaces complexes, B étant irréductible, $F : A \to B$ une application holomorphe propre surjective telle que pour tout $b \in B$ la fibre $F^{-1}(b)$ au-dessus de b soit irréductible de dimension r. Alors A est irréductible et* $\dim A = \dim B + r$.

On applique (1.2) à l'application $\varphi^{-1}(Z) \xrightarrow{\varphi} Z$. La fibre au-dessus de $[x]$ est $G(q-1, V/\mathbb{C}x) \times \{[x]\}$ qui est de dimension $(q-1)(N+1-q)$. On a donc $\varphi^{-1}(Z)$ irréductible de dimension $q(N+1-q)-1$.

(1.3) LEMME. — *Soient A et B des espace complexes, A étant irréductible, $F : A \to B$ une application holomorphe surjective. Alors B est irréductible et*

$$\dim B = \max_{b \in B}(\dim A - \dim F^{-1}(b)).$$

On applique (1.3) à l'application $\varphi^{-1}(Z) \xrightarrow{\psi} \Sigma$. Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension $q+1$ tel que $P(W)$ intersecte Z transversalement donc en d points distincts $[x_1], \ldots, [x_d]$ où d désigne le degré de Z dans $P(V)$. Si s est un sous-espace vectoriel de W de dimension q contenant une droite $\mathbb{C}x_j$, la fibre au-dessus de s est finie et donc $\dim \Sigma = \dim \varphi^{-1}(Z) = \dim G(q,V) - 1$. ■

(1.4) Proposition. — *Le fibré en droites $\mathcal{O}(\Sigma)$ au-dessus de $G(q,V)$ associé au diviseur Σ est isomorphe à $(\det Q)^{\otimes d}$ où Q désigne le fibré quotient universel de rang $N+1-q$.*

Démonstration. — Le groupe de Picard de $G(q,V)$ étant engendré par $\det Q$, $\mathcal{O}(\Sigma)$ est isomorphe à $(\det Q)^{\otimes d'}$ où d' est un entier ≥ 1 et Σ est le diviseur des zéros d'une section $f \in H^0\big(G(q,V), (\det Q)^{\otimes d'}\big)$. Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension $q+1$ tel que $P(W)$ intersecte Z transversalement. L'ensemble des $s \in \Sigma$ contenus dans W est réunion de d hyperplans projectifs dans l'espace projectif $P(W^*)$ des $s \in G(q,V)$ contenus dans W. Mais c'est aussi le diviseur des zéros de $f_{|P(W^*)}$ qui est de degré d' puisque $(\det Q)^{\otimes d'}_{|P(W^*)} = \mathcal{O}_{P(W^*)}(d') \otimes (\det V/W)^{\otimes d'}$. On a donc bien $d' = d$. ■

L'espace vectoriel $H^0(G(q,V), (\det Q)^{\otimes d})$ s'identifie d'après le théorème de Bott (cf. [Bo]) à l'espace vectoriel $V^{d,q}$ des fonctions polynomiales $f(\xi_1^*, \ldots, \xi_{N+1-q}^*)$ sur $V^* \times \cdots \times V^*$, homogènes de degré d en chaque ξ_k^* et vérifiant

$$f(\xi_1^*, \ldots, \xi_j^* + \xi_k^*, \ldots, \xi_{N+1-q}^*) = f(\xi_1^*, \ldots, \xi_k^*, \ldots, \xi_{N+1-q}^*) \quad \text{pour } j < k.$$

Une forme de Chow (ou forme de Cayley) de Z est alors une section $f \in V^{d,q}$ telle que $f^{-1}(0) = \Sigma$ autrement dit une fonction polynomiale $f \in V^{d,q}$ telle que $\Sigma = \Big\{ s \in G(q,V), f(\xi_1^*, \ldots, \xi_{N+1-q}^*) = 0$ lorsque s est défini comme l'ensemble des zéros communs aux $\xi_j^* \Big\}$. Une forme de Chow d'un cycle effectif $m_1 Z_1 + \cdots + m_\ell Z_\ell$ de codimension q et de degré d est $f_1^{m_1} \cdots f_\ell^{m_\ell} \in V^{d,q}$ et son point de Chow est le point correspondant dans $P(V^{d,q})$.

(1.5) Proposition. — *Pour Σ hypersurface algébrique irréductible de $G(q,V)$ soit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des $[x] \in P(V)$ tels que $\varphi^{-1}([x]) \subset \psi^{-1}(\Sigma)$. Alors*

(i) $\mathcal{Z}$ est un sous-ensemble algébrique de $P(V)$ de codimension supérieure ou égale à q.

(ii) Si Σ est la forme de Chow d'un sous-ensemble algébrique Z, $\mathcal{Z} = Z$.

(iii) Réciproquement, si codim $\mathcal{Z} = q$, *$\mathcal{Z}$ est irréductible et Σ est sa forme de Chow.*

Démonstration.

(i) Les fibres de φ étant de dimension $(q-1)(N+1-q)$, $\mathcal{Z}$ s'interprète comme étant $\{[x] \in P(V),\ \dim \varphi^{-1}([x]) \cap \psi^{-1}(\Sigma) \geq (q-1)(N+1-q)\}$. On voit qu'il est algébrique en appliquant à $\psi^{-1}(\Sigma) \xrightarrow{\varphi} P(V)$ la propriété suivante :

(1.6) LEMME. — *Soient A et B des espaces complexes, $F : A \to B$ une application holomorphe propre. Pour tout entier r, l'ensemble des $b \in B$ tels que* $\dim F^{-1}(b) \geq r$ *est un sous-ensemble analytique.*

Ensuite, si on avait $\operatorname{codim} \mathcal{Z} < q$ tout $s \in G(q, V)$ vérifierait $P(s) \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$ et donc appartiendrait à Σ, ce qui est absurde.

(ii) On a clairement $Z \subset \mathcal{Z}$. D'autre part, pour $[x] \notin Z$, l'ensemble des $s \in G(q, V)$ contenant x et intersectant Z est seulement une hypersurface de $\varphi^{-1}([x])$ puisque c'est la forme de Chow de l'image de Z par la projection $P(V)$
$\{[x]\} \to P(V/\mathbb{C}x)$ et donc $[x] \notin \mathcal{Z}$.

(iii) On a toujours $\psi(\varphi^{-1}(\mathcal{Z})) \subset \Sigma$. Lorsque $\operatorname{codim} \mathcal{Z} = q$, on note Z une composante irréductible de codimension q de $\mathcal{Z}$. Alors Σ contient aussi la forme de Chow de Z. Étant irréductible, elle lui est en fait égale. *(ii)* implique ensuite $\mathcal{Z} = Z$ et $\mathcal{Z}$ est bien irréductible. ∎

2. Extension aux courants

Elle se fait par la transformation qui à un courant T défini dans $P(V)$ de bidegré (q, q) associe le courant $\psi_* \varphi^* T$ défini dans $G(q, V)$ et de bidegré $(1, 1)$.

On munit V d'un produit scalaire et on note $\omega = \frac{i}{2\pi} \Theta(\mathcal{O}(1))$ et $\Omega = \frac{i}{2\pi} \Theta(\det Q)$ les formes fondamentales des métriques induites sur $P(V)$ et sur $G(q, V)$.

(2.1) PROPOSITION. — *Le volume de Ω est $D_{q,N} = r_{q,N}! \prod\limits_{0 \leq j \leq q-1} \frac{j!}{(N-j)!}$ avec $r_{q,N} = q(N + 1 - q)$ désignant la dimension de $G(q, V)$.*

Démonstration. — Vérifions d'abord l'égalité

$$\psi^* \left(\frac{\Omega^{r_{q,N}}}{r_{q,N}!} \right) \wedge \varphi^* \left(\frac{\omega^{q-1}}{(q-1)!} \right) = \psi^* \left(\frac{\Omega^{r_{q-1,N-1}}}{r_{q-1,N-1}!} \right) \wedge \varphi^* \left(\frac{\omega^N}{N!} \right)$$

entre formes-volumes sur Γ. Ceci permettra de conclure par récurrence sur q.

Soit $(e_0, \ldots, e_N)$ une base orthonormée de V et $s = \operatorname{vect}(e_j)_{j<q}$. Une carte de Γ centrée en $(s, [e_0])$ est l'application qui aux z_{jk} pour $j < q \leq k$ et aux λ_j pour $1 \leq j < q$ associe le couple formé par le sous-espace vect $\Big(e_j + \sum\limits_{q \leq k} z_{jk} e_k \Big)_{j<q}$ et la droite engendrée par le vecteur

$$e_0 + \sum_{q \leq k} z_{0k} e_k + \sum_{1 \leq j < q} \lambda_j \left(e_j + \sum_{q \leq k} z_{jk} e_k \right).$$

En ce point,
$$\psi^*\Omega = \frac{i}{2\pi}\sum_{j<q\leq k} dz_{jk}\wedge d\bar z_{jk}$$
et
$$\varphi^*\omega = \frac{i}{2\pi}\left(\sum_{q\leq k} dz_{0k}\wedge d\bar z_{0k} + \sum_{1\leq j<q} d\lambda_j\wedge d\bar\lambda_j\right)$$
de sorte que les deux membres de l'égalité sont égaux à
$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{\dim\Gamma}\prod_{j<q\leq k} dz_{jk}\wedge d\bar z_{jk}\wedge\prod_{1\leq j<q} d\lambda_j\wedge d\bar\lambda_j.$$

Intégrant ensuite sur Γ on a l'égalité entre
$$\int_{G(q,V)}\frac{\Omega^{r_{q,N}}}{r_{q,N}!}\psi_*\varphi^*\left(\frac{\omega^{q-1}}{(q-1)!}\right) = \frac{D_{q,N}}{r_{q,N}!}\frac{1}{(q-1)!}$$
et
$$\int_{P(V)}\varphi_*\psi^*\left(\frac{\Omega^{r_{q-1,N-1}}}{r_{q-1,N-1}!}\right)\frac{\omega^N}{N!} = \frac{D_{q-1,N-1}}{r_{q-1,N-1}!}\frac{1}{N!}$$
et on est alors ramené au calcul de $D_{1,N-q+1}$ qui vaut 1. ■

(2.2) Proposition. — *On a l'identité*
$$\psi_*\varphi^*T\wedge\Omega^{r_{q,N}-1} = \frac{1}{r_{q,N}}\psi_*\varphi^*(\Lambda T)\Omega^{r_{q,N}}$$
où ΛT désigne la contraction de T par ω.

Démonstration. — Elle s'obtient en projetant l'identité
$$\varphi^*T\wedge\psi^*(\Omega^{r_{q,N}-1}) = \frac{1}{r_{q,N}}\varphi^*(\Lambda T)\wedge\psi^*(\Omega^{r_{q,N}}).$$
Pour établir cette dernière, il suffit, par continuité, de considérer le cas où T est le courant associé à une forme u de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans la carte de $P(V)$ qui aux λ_k pour $1\leq k\leq N$ associe la droite engendrée par $e_0+\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_Ne_N$, écrivons $u = \sum_{|I|=|J|=q} u_{I,J}d\lambda_I\wedge d\bar\lambda_J$. Alors $\Lambda u = 2\pi i(-1)^q \sum_{\substack{|I'|=|J'|=q-1\\ 1\leq k\leq N}} u_{I'k,J'k}d\lambda_{I'}\wedge d\bar\lambda_{J'}$ en $[e_0]$ et les deux membres de l'égalité sont égaux en $(s,[e_0])$ à
$$(-1)^{q-1}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^{r_{q,N}-1}(r_{q,N}-1)!\left(\sum_{q\leq k} u_{\{1,\ldots,q-1,k\},\{1,\ldots,q-1,k\}}\right)d\lambda_1\wedge\cdots\wedge d\lambda_{q-1}$$
$$\wedge\overline{d\lambda_1\wedge\cdots\wedge d\lambda_{q-1}}\wedge\prod_{j<q\leq k} dz_{jk}\wedge d\bar z_{jk}.$$ ■

En particulier $\psi_*\varphi^*(\omega^q) = \Omega$. En effet $\psi_*\varphi^*(\omega^q)$ est une forme sur $G(q,V)$ invariante par l'action du groupe unitaire donc est harmonique. Étant de bidegré $(1,1)$ elle est égale à $\lambda\Omega$ où λ est un réel qu'on identifie à l'aide de (2.2).

(2.3) Proposition. — *Le degré de* $\psi_*\varphi^*T$ *c'est-à-dire sa valeur sur* $\frac{1}{D_{q,N}}\Omega^{r_{q,N}-1}$ *est le même que celui de* T.

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que $\frac{1}{D_{q,N}}\varphi_*\psi^*(\Omega^{r_{q,N}-1}) = \omega^{N-q}$. Il suffit de dire que $\varphi_*\psi^*(\Omega^{r_{q,N}-1})$ est une forme sur $P(V)$ invariante par l'action du groupe unitaire de V donc égale à $\lambda\omega^{N-q}$ où λ est un réel et ensuite on a l'égalité entre

$$\int_{P(V)} \omega^q \wedge \varphi_*\psi^*(\Omega^{r_{q,N}-1}) = \lambda$$

et

$$\int_{G(q,V)} \psi_*\varphi^*(\omega^q) \wedge \Omega^{r_{q,N}-1} = D_{q,N} \ . \qquad \blacksquare$$

Avec les notations de (1.1) on a alors $\psi_*\varphi^*[Z] = [\Sigma]$. En effet $\psi_*\varphi^*[Z]$ est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ dont le support est contenu dans l'hypersurface irréductible Σ donc il est proportionnel à $[\Sigma]$ et de plus il a le même degré.

Remarquons que la relation précédente entraîne qu'une fibre générique de l'application $\varphi^{-1}(Z) \xrightarrow{\psi} \Sigma$ est réduite à un point. En effet, puisque $\varphi^*[Z] = [\varphi^{-1}(Z)]$, on a aussi $\psi_*\varphi^*[Z] = m[\Sigma]$ en désignant par m le degré de cette application.

(2.4) Lemme. — *Soit* L *un fibré en droites hermitien au-dessus d'une variété complexe* X *et* $h_1, \ldots, h_r$ *des sections holomorphes de* L *dont les diviseurs des zéros définissent une intersection complète* Y. *Alors* $[Y] = \left(\frac{i}{2\pi}\Theta_L + dd^c \log|h|\right)^r$ *en notant* $h = (h_1, \ldots, h_r) \in L^{\oplus r}$ *et* Θ_L *la forme de courbure de* L.

Démonstration. — Notant ζ un repère holomorphe de L, $[Y]$ s'obtient localement comme image réciproque par la submersion $\left(\frac{h_1}{\zeta}, \ldots, \frac{h_r}{\zeta}\right)$ de la masse de Dirac à l'origine dans $\mathbb{C}^r$ qui n'est autre que $\left(dd^c \log|t|\right)^r$, $t \in \mathbb{C}^r$. $\blacksquare$

On peut en particulier exprimer pour $s \in G(q,V)$ le courant d'intégration sur le sous-espace projectif $P(s)$. On obtient

$$[P(s)] = \left(\omega + \frac{1}{2} dd^c \log\rho_s\right)^{N-q+1}$$

avec $\rho_s([x]) = \frac{\{\mathrm{dist}(x,s)\}^2}{|x|^2}$. Développant à l'aide de la formule du binôme, il vient

$$[P(s)] = \omega^{N-q+1} + \sum_{k=0}^{N-q} \frac{\binom{N-q+1}{k+1}}{2^{k+1}} (dd^c \log\rho_s)^{k+1} \wedge \omega^{N-q-k}.$$

Comme $(dd^c \log\rho_s)^{k+1} = dd^c \left\{ -\frac{1}{k}\left(\frac{dd^c\rho_s}{\rho_s}\right)^k \right\}$ pour $k \geq 1$, on peut ensuite écrire

$$[P(s)] = \omega^{N-q+1} + dd^c\gamma_s$$

avec $\gamma_s = \frac{1}{2}(N-q+1)(\log\rho_s)\omega^{N-q} - \sum\limits_{k=1}^{N-q} \frac{\binom{N-q+1}{k+1}}{k2^{k+1}} \left(\frac{dd^c\rho_s}{\rho_s}\right)^k \wedge \omega^{N-q-k}$.

À cause de l'invariance de ω par l'action du groupe unitaire, l'intégrale $\int_{P(V)} \gamma_s \wedge \omega^q$ ne dépend pas de s. Ajoutant un multiple de ω^{N-q} à l'expression précédente de γ_s, on peut donc supposer que cette intégrale est toujours égale à 1.

(2.5) PROPOSITION. — *Si T est fermé d'ordre 0 la fonction $U(s) = \int_{P(V)P(s)} T \wedge \gamma_s$ est localement intégrable et vérifie, $\delta(T)$ désignant le degré de T,*

$$\psi_* \varphi^* T = \delta(T)\Omega + dd^c U.$$

Démonstration. — On suppose d'abord que T est le courant associé à une forme u de classe $\mathcal{C}^\infty$ fermée et on écrit $u = \delta(u)\omega^q + dd^c v$ avec v de classe $\mathcal{C}^\infty$. Alors $\psi_*\varphi^* u = \delta(u)\Omega + dd^c \psi_* \varphi^* v$ avec

$$(\psi_*\varphi^* v)(s) = \int_{P(V)} v \wedge [P(s)] = \int_{P(V)} v \wedge \omega^{N-q+1} + \int_{P(V)} (u - \delta(u)\omega^q) \wedge \gamma_s$$

et puisque $\int_{P(V)} \omega^q \wedge \gamma_s = 1$ on a bien la formule annoncée.

Soit maintenant T un courant d'ordre 0. On désigne par $\mu = \frac{1}{D_{q,N}} \Omega^{r_{q,N}}$ l'unique mesure sur $G(q,V)$ invariante par l'action du groupe unitaire et de masse totale égale à 1. Alors l'intégrale $\int_{G(q,V)} U d\mu$ qui est égale par la formule de Fubini à $\int_{P(V)} T \wedge \left(\int_{s\in G(q,V)} \gamma_s d\mu(s)\right)$ est finie puisque $\int_{s\in G(q,V)} \gamma_s d\mu(s)$ est un courant sur $P(V)$ invariant par l'action du groupe unitaire donc proportionnel à ω^{N-q} et en fait égal. La relation annoncée s'obtient ensuite en régularisant T à l'aide d'une suite $(\chi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'approximations $\mathcal{C}^\infty$ de la masse de Dirac à l'origine du groupe unitaire de V :

Soit $T_j = \int_{g\in U(V)} \chi_j(g) g^* T d\nu(g)$ avec ν la mesure de Haar dans $U(V)$ de masse totale égale à 1. Les T_j sont des formes $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent faiblement vers T et sont fermées si T l'est. Soit U_j le potentiel de $\psi_*\varphi^* T_j$ construit précédemment, autrement dit $U_j(s) = \int_{P(V)P(s)} T_j \wedge \gamma_s$. Il s'agit de vérifier que U_j tend faiblement vers U. Mais

$$U_j(s) = \int_{g\in U(V)} \chi_j(g) \left(\int_{P(V)P(s)} g^* T \wedge \gamma_s \right) d\nu(g)$$

et comme

$$\int_{P(V)P(s)} g^* T \wedge \gamma_s = \int_{P(V)P(g(s))} T \wedge \gamma_{g(s)} = U\big(g(s)\big)$$

on a en fait

$$U_j = \int_{g\in U(V)} \chi_j(g) g^* U d\nu(g). \qquad \blacksquare$$

Dans le cas où T est le courant d'intégration associé à un cycle effectif Z, la formule de Lelong-Poincaré entraîne que la différence $U - log|f|$ est constante pour toute forme de Chow f de Z. Pour un courant fermé d'ordre 0, le potentiel U joue donc le même rôle que les formes de Chow.

3. Résultats d'injectivité

a. Cas des courants fermés d'ordre 0.

On va maintenant montrer que l'application qui à un courant T fermé d'ordre 0 associe le potentiel U défini en (2.5) est injective.

On appelle transformation de Chow et on note $\mathcal{C}$ l'opérateur $\psi_*\varphi^*$ lorsqu'on le fait agir sur des courants de bidegré (q,q). Il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est injective dans l'ensemble des courants fermés d'ordre 0. En effet si $U=0$ on a grâce à la relation (2.5) que $\mathcal{C}(T-\delta(T)\omega^q)=0$. L'injectivité de $\mathcal{C}$ entraîne que $T=\delta(T)\omega^q$. Comme U est alors égal à la constante $\delta(T)$, on a nécessairement $T=0$.

On considère d'abord le cas $q=N$. Soit u une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de bidegré (N,N) dans $P(V)$ et f la fonction telle que $u=f\omega^N$. La transformée $\mathcal{C}(u)$ est définie dans $P(V^*)$ et désignant par ω^* la forme fondamentale de la métrique induite sur $P(V^*)$ on a, d'après la relation (2.2),

$$\mathcal{C}(u)\wedge(\omega^*)^{N-1}=\mathcal{R}(f)(\omega^*)^N$$

où $\mathcal{R}:\mathcal{C}^\infty(P(V))\to\mathcal{C}^\infty(P(V^*))$ vérifie $\mathcal{R}(f)(s)=\int_{P(s)}f\omega^{N-1}$ pour tout hyperplan s de V. Ce n'est autre que la classique transformation de Radon obtenue par intégration des fonctions sur les hyperplans.

Un résultat de Helgason (cf. [He1] et [He2]) dit que $\mathcal{R}$ est injective et possède un inverse à gauche de la forme $\mathcal{P}(\Delta)\mathcal{R}^*$ avec $\mathcal{R}^*$ la transformation duale, Δ le laplacien sur $P(V)$ associé à ω et $\mathcal{P}$ un polynôme de degré $N-1$ dont les coefficients ne dépendent que de N.

Notant $\operatorname{tr}\mathcal{C}(u)$ la forme trace $\mathcal{C}(u)\wedge(\omega^*)^{N-1}$, on a donc

$$u=(\mathcal{P}(\Delta)\circ\operatorname{tr}\mathcal{C}^*\circ\operatorname{tr}\mathcal{C})u$$

$\mathcal{C}^*$ désignant la transformation duale et Δ le laplacien agissant sur les formes de bidegré (N,N) qui se déduit immédiatement de celui agissant sur les fonctions. Par continuité cette identité s'étend aux courants, autrement dit

(3.1) Proposition. — *La transformation* $\operatorname{tr}\mathcal{C}$ *est injective dans l'ensemble des courants de bidegré* (N,N) *de* $P(V)$ *et un inverse à gauche est* $\mathcal{P}(\Delta)\circ\operatorname{tr}\mathcal{C}^*$.

On suppose maintenant q quelconque. On considère W un sous-espace vectoriel de V de dimension $q+1$ et on identifie l'ensemble des $s\in G(q,V)$ contenus dans W à l'espace projectif $P(W^*)$. Alors

(3.2) LEMME. — *Pour toute forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de bidegré (q,q) dans $P(V)$, on a*

$$\mathcal{C}(u)_{|P(W^*)} = \mathcal{C}(u_{|P(W)}).$$

Démonstration. — L'image directe par submersion d'une forme différentielle se calculant par intégration le long des fibres, on a la formule suivante pour σ_1 et σ_2 dans $T_sG(q,V)$

$$\mathcal{C}(u)_s(\sigma_1,\sigma_2) = \int_{[x]\in P(s)} u_{[x]} \llcorner (\xi_{1,[x]} \wedge \xi_{2,[x]})$$

où $\xi_{j,[x]}$ est la projection sur $T_{[x]}P(V)$ d'un relevé de σ_j par ψ, autrement dit un vecteur tel que $(\sigma_j, \xi_{j,[x]}) \in T_{(s,[x])}\Gamma$.

La relation annoncée en découle alors clairement. ∎

Soit maintenant T un courant de bidegré (q,q) dans $P(V)$ localement plat. Alors $\mathcal{C}(T)$ est aussi localement plat et la théorie du tranchage (cf. [Fe]) dit que pour presque tout W dans $G(q+1,V)$ les courants $\mathcal{C}(T_{|P(W)})$ et $\mathcal{C}(T)_{|P(W^*)}$ sont définis. Appliquant le lemme (3.2) à une suite de formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge vers T pour la topologie plate, on voit qu'ils sont égaux pour presque tout W.

(3.3) PROPOSITION. — *La transformation $\mathcal{C}$ est injective dans l'ensemble des courants de bidegré (q,q) de $P(V)$ localement plats.*

Démonstration. — Lorsque la dimension est nulle c'est-à-dire $q=N$ cela résulte de (3.1). Lorsque q est quelconque, on se ramène à ce cas-là. En effet si $\mathcal{C}(T)=0$ on a, pour presque tout W, $\mathcal{C}(T_{|P(W)})=0$ et $T_{|P(W)}$ est de dimension 0 donc $T_{|P(W)}=0$ et ainsi $T=0$. ∎

b. Cas général.

On va montrer en toute généralité que la transformation $\mathcal{C}$ est injective.

Soit d'abord u une forme différentielle de bidegré (q,q) de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$. On désigne toujours par $(e_0,\dots,e_N)$ une base orthonormée de V et par x_j les coordonnées dans cette base d'un point x de V. L'image réciproque de u par l'application canonique $\pi : V \dashrightarrow P(V)$ s'écrit alors $\pi^*u = \sum_{|I|=|J|=q} u_{IJ}dx_I \wedge d\bar{x}_J$ avec des fonctions u_{IJ} qui ont en particulier la propriété d'être homogènes de degré $-2q$.

On note $\tau : V^q \dashrightarrow G(q,V)$ l'application qui à $z=(z^1,\dots,z^q)$ dans le produit associe le sous-espace vectoriel $\tau(z)=\mathrm{vect}(z^1,\dots,z^q)$. L'image réciproque par τ de la transformée de Chow $\mathcal{C}(u)$ s'écrit alors $\tau^*\mathcal{C}(u) = \sum_{\substack{0\le j,\ell\le N\\ 1\le k,m\le q}} \mathcal{C}^{km}_{j\ell}(u)dz^k_j \wedge d\bar{z}^m_\ell$. On va exprimer les coefficients $\mathcal{C}^{km}_{j\ell}(u)$ à l'aide des u_{IJ}.

Pour tout vecteur $\zeta=(\zeta^1,\ldots,\zeta^q)$ dans V^q, on a

$$\big(\tau^*\mathcal{C}(u)\big)_z(\zeta,\bar\zeta)=\mathcal{C}(u)_{\tau(z)}\big(d\tau_z(\zeta),\overline{d\tau_z(\zeta)}\big)=\int_{[x]\in P(\tau(z))}u_{[x]}\llcorner\big(\xi_{[x]}\wedge\overline{\xi_{[x]}}\big)$$

où, pour x de coordonnées $t=(t_1,\ldots,t_q)$ dans la base z, on prend $\xi_{[x]}=d\pi_x(t\cdot\zeta)$ en notant $t\cdot\zeta=t_1\zeta^1+\cdots+t_q\zeta^q$.

En particulier $\mathcal{C}^{km}_{j\ell}(u)(z)=\int_{P(\tau(z))}F^{km}_{j\ell}\omega^{q-1}$ avec $F^{km}_{j\ell}$ une fonction qu'on calcule sachant que les restrictions à $P(\tau(z))$ de $F^{km}_{j\ell}\omega^{q-1}$ et de $u_{[x]}\llcorner\big(d\pi_x(t_ke_j),\overline{d\pi_x(t_me_\ell)}\big)$ sont égales : remontant à $\tau(z)$ et utilisant la relation $\pi^*\omega^{q-1}\wedge\frac{i\partial|x|^2\wedge\bar\partial|x|^2}{|x|^4}=\frac{1}{q(2\pi)^{q-1}}\left(\frac{i\partial\bar\partial|x|^2}{|x|^2}\right)^q$ qui y est alors vérifiée, on obtient l'égalité

$$\alpha_q\Delta(z)\frac{F^{km}_{j\ell}([x])}{|x|^{2q}}=\sum_{\substack{1\le k',m'\le q\\0\le j',\ell'\le N}}(-1)^{k'+m'}\frac{\bar x_{j'}z^{k'}_{j'}x_{\ell'}\bar z^{m'}_{\ell'}}{|x|^4}(\pi^*u)_x\left(t_ke_j,\overline{t_me_\ell},z^1,\ldots,\widehat{z^{k'}},\ldots,z^q,\bar z^1,\ldots,\widehat{\bar z^{m'}},\ldots,\bar z^q\right)$$

avec $\alpha_q=\frac{(q-1)!i^{q^2}}{(2\pi)^{q-1}}$ et $\Delta(z)$ le déterminant de Gram de z. Comme les contractions radiales de π^*u sont nulles, on a

$$\begin{aligned}(\pi^*u)_x&\left(e_j,\bar e_\ell,z^1,\ldots,t_kz^k,\ldots,\widehat{z^{k'}},\ldots,z^q,\bar z^1,\ldots,\overline{t_mz^m},\ldots,\widehat{\bar z^{m'}},\ldots,\bar z^q\right)\\&=(\pi^*u)_x(e_j,\bar e_\ell,z^1,\ldots,-t_{k'}z^{k'},\ldots,\widehat{z^{k'}},\ldots,z^q,\bar z^1,\ldots,-\overline{t_{m'}z^{m'}},\ldots,\widehat{\bar z^{m'}},\ldots,\bar z^q)\\&=(-1)^{k+m+k'+m'}t_{k'}\bar t_{m'}(\pi^*u)_x\left(e_j,\bar e_\ell,z^1,\ldots,\widehat{z^k},\ldots,z^q,\bar z^1,\ldots,\widehat{\bar z^m},\ldots,\bar z^q\right).\end{aligned}$$

Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned}\alpha_q\Delta(z)F^{km}_{j\ell}([x])&=(-1)^{k+m}|x|^{2q}(\pi^*u)_x(e_j,\bar e_\ell,z^1,\ldots,\widehat{z^k},\ldots,z^q,\bar z^1,\ldots,\widehat{\bar z^m},\ldots,\bar z^q)\\&=(-1)^{k+m}\sum_{|I|=|J|=q-1}z^{\hat k}_I\bar z^{\hat m}_Jf_{jI,\ell J}([x])\end{aligned}$$

en notant $z^{\hat k}_I=\det(z^{k'}_{i_\alpha})_{\substack{1\le\alpha\le q-1\\1\le k'\le q,k'\ne k}}$ et $f_{jI,\ell J}([x])=|x|^{2q}u_{jI,\ell J}(x)$.

On note $\mathcal{R}_{q-1}(f_{jI,\ell J})$ la transformée de Radon de $f_{jI,\ell J}$ obtenue par intégration de cette fonction sur les sous-espaces projectifs de $P(V)$ de dimension $q-1$. Le lemme suivant va permettre d'exprimer $\mathcal{R}_{q-1}(f_{jI,\ell J})_{\tau(z)}$ comme une intégrale sur un domaine fixe.

(3.4) Lemme. — *Soit θ une forme différentielle de bidegré $(q-1,q-1)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{P}_{q-1}$. On désigne encore par $\pi:\mathbb{C}^q \dashrightarrow \mathbb{P}_{q-1}$ l'application canonique.*

(i) On a l'égalité

$$\int_{\mathbb{P}_{q-1}}\theta=\int_{\mathbb{S}^{2q-1}}\pi^*\theta\wedge d^c|t|^2/2\ .$$

(ii) Plus généralement, Σ étant une hypersurface compacte lisse orientée homologue à $\mathbb{S}^{2q-1}$ dans $\mathbb{C}^q-\{0\}$, on a

$$\int_{\mathbb{P}_{q-1}}\theta=\int_\Sigma\pi^*\theta\wedge\frac{d^c|t|^2}{2|t|^2}\ .$$

Démonstration.

(i) Il s'agit de voir que $(\pi_{|\mathbb{S}^{2q-1}})_*\big((d^c|t|^2/2)_{|\mathbb{S}^{2q-1}}\big) = 1$. Or $d^c|t|^2/2 = \frac{1}{4\pi i}(\partial - \overline{\partial})|t|^2 = \frac{1}{4\pi i}\left(\sum_{1\le k\le q} \bar{t}_k dt_k - t_k d\bar{t}_k\right)$ et donc si $t = e^{i\alpha}x$ avec α un nombre réel et x un point dans $\mathbb{S}^{2q-1}$ fixé, on obtient $d\alpha/2\pi$.

(ii) Vérifions que $\pi^*\theta \wedge \frac{d^c|t|^2}{2|t|^2}$ est fermée. Comme $\frac{d^c|t|^2}{2|t|^2} = d^c \log|t|$ et que par ailleurs θ est fermée on a $d\left(\pi^*\theta \wedge \frac{d^c|t|^2}{2|t|^2}\right) = \pi^*\theta \wedge dd^c \log|t|$. Puisque θ est proportionnelle en tout point à ω^{q-1} dont l'image réciproque par π est égale à $(dd^c \log|t|)^{q-1}$ et que $(dd^c \log|t|)^q = 0$ dans $\mathbb{C}^q - \{0\}$, cette différentielle extérieure est bien nulle. ∎

Soit $y = (y^1, \ldots, y^q)$ une base orthonormée de $\tau(z)$ et A la matrice de passage de y vers z. La transformée $\mathcal{R}_{q-1}(f_{jI,\ell J})_{\tau(z)}$ qui s'exprime comme l'intégrale sur $\mathbb{P}_{q-1}$ de l'image réciproque de $f_{jI,\ell J}\omega^{q-1}$ par l'application $[t] \to [t\cdot y]$ est donc aussi égale grâce au lemme précédent à l'intégrale $\int_{A(\mathbb{S}^{2q-1})} f_{jI,\ell J}([t\cdot y])(dd^c \log|t|)^{q-1} \wedge \frac{d^c|t|^2}{2|t|^2}$. Écrivant ensuite $(dd^c \log|t|)^{q-1} \wedge \frac{d^c|t|^2}{2|t|^2} = \alpha_q \frac{\Phi(t)}{|t|^{2q}}$ avec

$$\Phi(t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{1\le k\le q} (-1)^{k-1} \Big(t_k dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_k} \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge d\bar{t}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{t}_q$$
$$+(-1)^q \bar{t}_k dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_q \wedge d\bar{t}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\bar{t}_k} \wedge \cdots \wedge d\bar{t}_q\Big)$$

on trouve que $\mathcal{R}_{q-1}(f_{jI,\ell J})_{\tau(z)} = \alpha_q \int_{A(\mathbb{S}^{2q-1})} u_{jI,\ell J}(t\cdot y)\Phi(t)$. Faisant le changement de variable $t \to A^{-1}t$ dans cette dernière intégrale, il vient

$$\mathcal{R}_{q-1}(f_{jI,\ell J})_{\tau(z)} = \alpha_q \tilde{u}_{jI,\ell J}(z)\Delta(z)$$

avec $\tilde{u}_{jI,\ell J}(z) = \int_{\mathbb{S}^{2q-1}} u_{jI,\ell J}(t\cdot z)\Phi(t)$.

Combinant ceci avec les calculs antérieurs, on conclut que

$$\mathcal{C}^{km}_{j\ell}(u)(z) = (-1)^{k+m} \sum_{|I|=|J|=q-1} \tilde{u}_{jI,\ell J}(z) z_I^{\hat{k}} \bar{z}_J^{\hat{m}} \ . \tag{3.5}$$

Dans [GGG] (cf. également [GGS]) il est remarqué qu'inversement $\tilde{u}_{jI,\ell J}$ s'obtient à partir de la famille $(\mathcal{C}^{km}_{j\ell}(u))_{1\le k,m\le q}$ à l'aide d'un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants. Notant $\partial_I^{\hat{k}} = \det\left(\frac{\partial}{\partial z^{k'}_{i_\alpha}}\right)_{\substack{1\le\alpha\le q-1\\ 1\le k'\le q,\, k'\neq k}}$, on a en effet l'égalité

$$\tilde{u}_{jI,\ell J} = \frac{1}{((q-1)!)^2} \sum_{1\le k,m\le q} (-1)^{k+m} \partial_I^{\hat{k}} \overline{\partial}_J^{\hat{m}} \mathcal{C}^{km}_{j\ell} \ . \tag{3.6}$$

Redonnons-en la vérification. Calculons d'abord $\sum_{1\le k\le q} (-1)^k \partial_I^{\hat{k}} \mathcal{C}^{km}_{j\ell}$. Grâce à la formule (3.5), cette fonction est égale à

$$\int_{\mathbb{S}^{2q-1}} \left\{ \sum_{1\le k\le q} \partial_I^{\hat{k}} \Big((\pi^* u)_{t\cdot z}(e_j, z^1, \ldots, \widehat{z^k}, \ldots, z^q, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \ldots, \widehat{\bar{z}^m}, \ldots, \bar{z}^q)\Big) \right\} \Phi(t) \ .$$

Comme $\partial_I^{\hat{k}} = \sum \varepsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \frac{\partial^{q-1}}{\partial z^1_{i_{\alpha_1}} \cdots \partial z^{k-1}_{i_{\alpha_{k-1}}} \partial z^{k+1}_{i_{\alpha_k}} \cdots \partial z^q_{i_{q-1}}}$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})$ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, q-1\}$, on a

$$\partial_I^{\hat{k}} \left((\pi^* u)_{t \cdot z} (e_j, z^1, \dots, \widehat{z^k}, \dots, z^q, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q) \right) =$$

$$\sum \varepsilon(\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1}) \Bigg\{ (\pi^* u)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_{\alpha_1}}, \dots, e_{i_{\alpha_{q-1}}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right)$$
$$+ \sum_{1 \le k' \le q-1} \left(\frac{\partial \pi^* u}{\partial x_{i_{\alpha_{k'}}}} \right)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_{\alpha_1}}, \dots, t_{r_{k,k'}} z^{r_{k,k'}}, \dots, e_{i_{\alpha_{q-1}}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right) \Bigg\}$$

en notant $r_{k,k'} = k'$ si $k' \le k-1$ et $r_{k,k'} = k'+1$ si $k' \ge k$. Dans ce calcul n'interviennent pas les dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2 des coefficients de $\pi^* u$ à cause de la commutativité des dérivations partielles.

L'expression obtenue est en fait égale à

$$(q-1)! (\pi^* u)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_1}, \dots, e_{i_{q-1}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right)$$
$$+ (q-2)! \sum_{\substack{1 \le \alpha \le q-1 \\ 1 \le k' \le q, k' \ne k}} \left(\frac{\partial \pi^* u}{\partial x_{i_\alpha}} \right)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_1}, \dots, t_{k'} z^{k'}, \dots, e_{i_{q-1}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right) .$$

Sommant sur k compris entre 1 et q, on trouve

$$q! (\pi^* u)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_1}, \dots, e_{i_{q-1}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right)$$
$$+ (q-1)! \sum_{1 \le \alpha \le q-1} \left(\frac{\partial \pi^* u}{\partial x_{i_\alpha}} \right)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_1}, \dots, t \cdot z, \dots, e_{i_{q-1}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right) .$$

Par ailleurs, en dérivant la relation exprimant que la contraction radiale de $\pi^* u$ est nulle, on obtient en un point x de $V - \{0\}$ la relation $\left(\frac{\partial \pi^* u}{\partial x_{i_\alpha}} \right)_x (x, \dots) = -(\pi^* u)_x (e_{i_\alpha}, \dots)$. L'expression précédente est donc égale à $(q-1)! (\pi^* u)_{t \cdot z} \left(e_j, e_{i_1}, \dots, e_{i_{q-1}}, \bar{e}_\ell, \bar{z}^1, \dots, \widehat{\bar{z}^m}, \dots, \bar{z}^q \right)$.

On termine la démonstration en appliquant ensuite de la même façon l'opérateur $\sum\limits_{1 \le m \le q} (-1)^m \overline{\partial}_J^{\hat{m}}$ à cette fonction.

On va maintenant vérifier que les résultats précédents s'étendent au cas d'un courant T de bidegré (q,q) défini dans $P(V)$. Pour cela on écrit le relevé de T dans $V - \{0\}$ sous la forme $\pi^* T = \sum\limits_{|I|=|J|=q} T_{IJ} dx_I \wedge d\bar{x}_J$ avec T_{IJ} des courants de degré 0. Le courant $|x|^{2q} T_{IJ}$ est alors invariant par homothéties et c'est donc l'image réciproque par π d'un courant f_{IJ} défini dans $P(V)$.

On note $\mathcal{R}_{q-1}(f_{IJ})$ le courant $\psi_* \varphi^* (f_{IJ} \omega^{q-1})$ qui est défini dans $G(q,V)$. Alors, pour $|I| = |J| = q-1$, $\tau^* \mathcal{R}_{q-1}(f_{jI,\ell J})$ est un courant de degré 0 dans V^q qui, identifié à une distribution, est égal à $\frac{\alpha_q \Delta}{((q-1)!)^2} \sum\limits_{1 \le k,m \le q} (-1)^{k+m} \partial_I^{\hat{k}} \overline{\partial}_J^{\hat{m}} \mathcal{C}_{j\ell}^{km}$ où les $\mathcal{C}_{j\ell}^{km}$ sont les coefficients de $\tau^* \mathcal{C}(T)$ eux-aussi identifiés à des distributions.

Il reste à savoir que $\mathcal{R}_{q-1}$ est injective. Dans [Gr] (cf. également [He2]) est démontrée, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(P(V))$, la relation

$$f = \mathcal{P}_{q-1}(\Delta)\mathcal{R}^*_{q-1}\mathcal{R}_{q-1}f \tag{3.7}$$

avec Δ le laplacien sur $P(V)$, $\mathcal{P}_{q-1}$ un polynôme de degré $(q-1)$ dont les coefficients ne dépendent que de q et N et $\mathcal{R}^*_{q-1}$ la transformation de Radon duale, définie de la façon suivante : pour $h \in \mathcal{C}^\infty(G(q,V))$ la valeur de $\mathcal{R}^*_{q-1}h$ au point $[x]$ est l'intégrale de h sur l'ensemble des $s \in G(q,V)$ contenant x. L'opérateur $\mathcal{R}^*_{q-1}$ s'étend de façon immédiate au cas où h est un courant de degré 0 dans $G(q,V)$ en posant $\mathcal{R}^*_{q-1}h = \psi_*\varphi^*\left(h\frac{\Omega^{r_{q-1,N-1}}}{D_{q-1,N-1}}\right)$. La relation (3.7) est donc encore vraie si f est un courant de degré 0.

Toute ceci entraîne bien l'injectivité de $\mathcal{C}$. On a ensuite les deux corollaires suivants :

(3.8) Proposition. — *La transformation* $\operatorname{tr}\mathcal{C}$ *est injective dans l'ensemble des courants fermés de* $P(V)$.

Démonstration. — Puisque $\mathcal{C}(T)$ possède même degré que T, on peut écrire $\mathcal{C}(T) = \delta(T)\Omega + dd^cU$ pour une certaine distribution U. On a ensuite $\operatorname{tr}\mathcal{C}(T) = \left(\delta(T) - \frac{1}{4\pi r_{q,N}}\Delta U\right)\Omega^{r_{q,N}}$ en désignant aussi par Δ le laplacien sur $G(q,V)$ associé à Ω. Si $\operatorname{tr}\mathcal{C}(T) = 0$ alors $\Delta U = 4\pi r_{q,N}\delta(T)$. Or, sur une variété compacte, la masse totale du laplacien d'une distribution est nulle donc $\delta(T) = 0$ et U est constante. Cela entraîne que $\mathcal{C}(T) = 0$ puis $T = 0$. ∎

(3.9) Proposition. — *Pour tout courant* S *de bidegré* $(q-1, q-1)$ *dans* $P(V)$ *tel que* $\psi_*\varphi^*S = 0$, *il existe des courants* α, β *tels que* $S = \partial\alpha + \overline{\partial}\beta$.

Démonstration. — $\psi_*\varphi^*S = 0$ implique $\mathcal{C}(\partial\overline{\partial}S) = 0$ puis $\partial\overline{\partial}S = 0$. On utilise alors le résultat classique suivant :

(3.10) Lemme. — *Soit* X *une variété kählérienne compacte et* S *un courant de bidegré* (k,ℓ) *qui est* $\partial\overline{\partial}$*-fermé dans* X. *Alors on peut écrire* $S = h + \partial\alpha + \overline{\partial}\beta$ *avec* h *une forme harmonique de bidegré* (k,ℓ) *et* α *et* β *des courants dans* X *de bidegrés respectifs* $(k-1,\ell)$ *et* $(k,\ell-1)$.

Démonstration. — Puisque $\overline{\partial}S$ est ∂-fermé, on peut écrire $\overline{\partial}S = \theta_1 + \partial S_1$ avec θ_1 harmonique et S_1 de bidegré $(k-1,\ell+1)$ qui est encore $\partial\overline{\partial}$-fermé. Si on suppose $S_1 = h_1 + \partial\alpha_1 + \overline{\partial}\beta_1$ avec h_1 harmonique alors $\overline{\partial}S = \theta_1 + \partial\overline{\partial}\beta_1$ autrement dit $\overline{\partial}(S + \partial\beta_1)$ est harmonique donc nul et on peut écrire $S + \partial\beta_1 = h + \overline{\partial}\alpha$ avec h harmonique. On peut donc procéder par récurrence puisque le degré par rapport aux dz_j décroît lorsqu'on passe de S à S_1. ∎

On écrit donc $S = \lambda\omega^{q-1}+\partial\alpha+\overline{\partial}\beta$ avec une constante λ. Cela implique $\psi_*\varphi^*S = \lambda$ et nécessairement $\lambda = 0$. ■

L'analogue pour les formes $\mathcal{C}^\infty$ de la proposition (3.9) dit que si v est une forme de bidegré $(q-1, q-1)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$ dont l'intégrale sur tout sous-espace projectif est nulle alors il existe des formes α, β de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$ telles que $v = \partial\alpha + \overline{\partial}\beta$.

La démonstration de (3.9) permet par ailleurs de caractériser les courants qui sont dans le noyau de $\mathrm{tr}\,\mathcal{C}$. D'après la formule (2.2) ce sont en effet les courants T tels que $\psi_*\varphi^*(\Lambda T) = 0$. Mais cette relation équivaut aux conditions $\partial\overline{\partial}\Lambda T = 0$ et $\int_{P(V)} \Lambda T \wedge \omega^{N-q+1} = 0$. La formule de commutation $[\overline{\partial}, \Lambda] = i\partial^*$ permet ensuite d'écrire la première de ces conditions sous la forme $\Lambda\partial\overline{\partial}T - i\overline{\partial}^*\overline{\partial}T + i\partial\partial^*T = 0$, la seconde s'écrivant aussi $\delta(T) = 0$.

c. Cas des courants définis dans une variété projective.

Soit X une variété projective de dimension n, L un fibré en droites très ample au-dessus de X, V l'espace vectoriel dual de $H^0(X, L)$ et $j : X \to P(V)$ le plongement défini par L. Pour T courant de bidimension (p, p) dans X on définit $\mathcal{C}_L(T) = \mathcal{C}(j_*T)$ qui est un courant de bidegré $(1, 1)$ dans la grassmannienne $G(N-p, V)$.

On peut aussi formuler cette définition de la façon suivante : soit M un sous-espace vectoriel de dimension $p+1$ de $V^* = H^0(X, L)$ et Y_M l'ensemble base du système linéaire de diviseurs dans X défini par M autrement dit $Y_M = \bigcap_{h\in M} h^{-1}(0)$. Pour M générique, Y_M est une sous-variété de X de codimension $p+1$. Soit Γ' la sous-variété de $G(p+1, V^*)\times X$ associée à la famille des Y_M autrement dit l'ensemble des couples (M, z) avec $z \in Y_M$ et ψ' et φ' les restrictions à Γ' des projections canoniques sur $G(p+1, V^*)$ et X. Alors φ' est une submersion et identifiant $G(p+1, V^*)$ et $G(N-p, V)$ on a $\mathcal{C}_L(T) = \psi'_*\varphi'^*T$.

L'application j_* étant injective, ce qui précède implique que $\mathcal{C}_L$ est injective dans l'ensemble des courants de bidimension (p, p) de X.

4. Questions

(4.1). — Expliciter, pour un bidegré (q, q) quelconque, une formule d'inversion pour la transformation $\mathcal{C}$ qui exprime l'inverse comme le produit d'un polynôme en le laplacien de $P(V)$ agissant sur les formes de bidegré (q, q) et d'une transformation intégrale duale. Lorsque $q = N$, la formule de Helgason rappelée en (3.1) est bien de ce type là.

(4.2). — Lorsque T est un courant positif fermé, exprimer le nombre de Lelong de $\mathcal{C}(T)$ en un point s de $G(q, V)$ à l'aide de ceux de T le long de $P(s)$.

(4.3). — L'application $\mathcal{C}$ permet-elle de caractériser les cycles algébriques de l'espace projectif ? En d'autres termes, si T est un courant de bidegré (q,q) – éventuellement supposé localement plat – tel que $\mathcal{C}(T)$ est le courant associé à un diviseur de $G(q,V)$, T est -il lui-même le courant associé à un cycle algébrique de $P(V)$ de codimension q ?

On peut aussi imposer une condition plus forte. Au lieu d'intégrer T seulement sur les sous-espaces projectifs de dimension $q-1$, on peut l'intégrer sur d'autres cycles algébriques de dimension $q-1$ de $P(V)$: pour k entier ≥ 1, on considère, avec les notations du § 3.c, la transformation $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{\mathcal{O}_{P(V)}(k)}$ obtenue en composant l'image directe par le plongement $P(V) \to P(S^k V)$ et la transformation de Chow définie sur $P(S^k V)$. Si $\mathcal{C}_k(T)$ est, pour tout k, le courant associé à un diviseur, T est-il lui-aussi le courant associé à un cycle algébrique de $P(V)$?

Enfin, dans le cas où le courant T est positif fermé, on doit pouvoir répondre à la question en vérifiant la relation entre supports $\operatorname{supp} \mathcal{C}(T) = \psi(\varphi^{-1}(\operatorname{supp} T))$ qui entraîne que si $\mathcal{C}(T)$ est un diviseur alors la mesure de Hausdorff $(2N-2q)$-dimensionnelle de $\operatorname{supp} T$ est finie. Il s'agit alors de vérifier que cela implique que T est le courant associé à un cycle. Un raisonnement du même genre que celui mené dans [HS] devrait permettre d'arriver à cette conclusion.

Chapitre 2

POTENTIEL DE LELONG-SKODA ET THÉORIE DE L'INTERSECTION

1. Courant de bidegré (1,1) associé à un courant positif fermé de l'espace projectif

Soit $P(V)$ l'espace projectif des droites d'un espace vectoriel complexe V de dimension $N+1$. On munit $P(V)$ de la métrique de Fubini-Study induite par un produit scalaire sur V et on note $\omega = \frac{i}{2\pi}\Theta(\mathcal{O}(1))$ sa forme fondamentale. Étant donné un courant positif fermé T de bidimension (p,p) dans $P(V)$ avec $p \le N-1$, on va définir un courant positif fermé T_1 de bidegré $(1,1)$ dans $P(V)$ ayant même degré que T par rapport à ω et même nombre de Lelong que T en tout point de $P(V)$.

On note $G(p+2,V)$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de V de dimension $p+2$. Pour $W \in G(p+2,V)$ on désigne par $\sigma_W : V \longrightarrow W$ la projection orthogonale sur W et par $\tilde\sigma_W : P(V) \dashrightarrow P(W)$ l'application méromorphe induite. Les considérations qui suivent concernant les images inverses et directes par $\tilde\sigma_W$ de courants positifs fermés seront utiles à la définition de T_1.

(1.1) Proposition. — *L'image inverse par $\tilde\sigma_W$ d'un courant S de $P(W)$ est définie dans $P(V)$ et est positive fermée si S l'est.*

Démonstration. — Soit $Y = \{([z],[x]) \in P(V)\times P(W),\ \sigma_W(z) \text{ et } x \text{ colinéaires}\}$ et η, τ les restrictions à Y des projections de $P(V)\times P(W)$ sur $P(V)$, $P(W)$. En fait η représente l'éclatement de $P(V)$ de centre $P(W^\perp)$ et permet d'éliminer les singularités de $\tilde\sigma_W$ *i.e.* le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ P(V) \arrow[r, dashed, "\tilde\sigma_W"'] & P(W) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On pose alors $\tilde\sigma_W{}^*S = \eta_*\tau^*S$ qui est bien défini, τ étant une submersion puisqu'elle s'identifie à la projection du fibré projectivisé $P\big(W^\perp \oplus \mathcal{O}_{P(W)}(-1)\big)$ sur $P(W)$. $\blacksquare$

De la même façon l'image directe par $\tilde\sigma_W$ d'une forme u de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$ est bien définie en posant $\tilde\sigma_{W*}u = \tau_*\eta^*u$ et vérifie la relation

$$\int_{P(V)} \tilde\sigma_W{}^*S \wedge u = \int_{P(W)} S \wedge \tilde\sigma_{W*}u \quad \text{pour tout courant } S \text{ dans } P(W).$$

En particulier

(1.2) Lemme. — *Pour $\ell \leq p+1$, l'image directe $\tilde\sigma_{W*}(\omega^{\ell+N-p-1})$ est égale à $\omega^\ell_{|P(W)}$.*

Démonstration. — $\tilde\sigma_{W*}(\omega^{\ell+N-p-1})$ est une forme sur $P(W)$ invariante par l'action du groupe unitaire $U(W) \simeq U(W) \times \{\mathrm{id}_{W^\perp}\} \subset U(V)$. Elle est donc égale à $C\omega^\ell_{|P(W)}$ pour une certaine constante C. Pour tout courant S de bidimension (ℓ,ℓ) dans $P(W)$, on alors

$$\int_{P(V)} \tilde\sigma_W{}^*S \wedge \omega^{\ell+N-p-1} = C\int_{P(W)} S \wedge \omega^\ell_{|P(W)}.$$

Si on choisit en particulier pour S le courant d'intégration sur un sous-espace projectif de dimension ℓ, $\tilde\sigma_W{}^*S$ est alors le courant d'intégration sur un sous-espace projectif de dimension $\ell+N-p-1$ et les deux intégrales ci-dessus sont égales à 1. On a donc bien $C=1$. $\blacksquare$

On note μ l'unique mesure positive sur $G(p+2,V)$ invariante par le groupe unitaire de masse égale à 1.

(1.3) Lemme. — *Pour $\ell \leq p+1$, l'intégrale $\int_{W\in G(p+2,V)} \tilde\sigma_W{}^*\big(\omega^\ell_{|P(W)}\big)d\mu(W)$ existe et est égale à ω^ℓ.*

Démonstration. — Cette intégrale est faiblement convergente car si u est une forme différentielle continue de bidegré $(N-\ell, N-\ell)$ dans $P(V)$, la fonction $W \to \int_{P(W)} \tilde\sigma_{W*}u \wedge \omega^\ell_{|P(W)}$ est bornée dans $G(p+2,V)$. En effet, on peut supposer u positive et écrivant $u \leq C\omega^{N-\ell}$ avec une constante $C>0$, il suffit de considérer le cas où $u = \omega^{N-\ell}$ mais alors cette fonction est égale à 1 par le lemme (1.2).

Maintenant $\int_{W\in G(p+2,V)} \tilde\sigma_W{}^*\big(\omega^\ell_{|P(W)}\big)d\mu(W)$ est un courant sur $P(V)$ invariant par l'action de $U(V)$ donc est égal à $C\omega^\ell$ pour une constante C. En l'évaluant sur $\omega^{N-\ell}$ on trouve $C=1$. $\blacksquare$

(1.4) Proposition. — *L'image directe par $\tilde\sigma_W$ de la restriction à $P(V)$ $P(W^\perp)$ d'un courant positif fermé T défini dans $P(V)$ existe pour tout $W \in G(p+2,V)$ et c'est un courant positif fermé dans $P(W)$.*

Démonstration. — Il s'agit de justifier l'existence de $\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^* u$ pour u une forme différentielle continue de bidegré (p,p) dans $P(W)$. Il suffit de considérer le cas où $u = \omega^p_{|P(W)}$. Soit g la fonction dans $P(V)$ égale à $\log \frac{|\sigma_W(z)|}{|z|}$ en $[z]$. Alors

$$\tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega_{|P(W)}\big) = \omega + dd^c g. \tag{1.5}$$

Soit, pour $\varepsilon > 0$, $\omega_\varepsilon = \omega + dd^c g_\varepsilon$ avec $g_\varepsilon([z]) = \frac{1}{2}\log \frac{|\sigma_W(z)|^2 + \varepsilon|\sigma_{W^\perp}(z)|^2}{|z|^2}$. C'est une forme $\mathcal{C}^\infty$ qui, lorsque $\varepsilon \to 0$, converge faiblement dans $P(V)$ vers $\tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega_{|P(W)}\big)$. Par conséquent $T \wedge \omega^p_\varepsilon$ converge faiblement dans $P(V)$
$P(W^\perp)$ vers $T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^p_{|P(W)}\big)$ et donc

$$\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^p_{|P(W)}\big) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \omega^p_\varepsilon.$$

Or $\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \omega^p_\varepsilon = \int_{P(V)} \widetilde{T} \wedge \omega^p_\varepsilon$ en désignant par $\widetilde{T}$ l'extension triviale à $P(V)$ de $T_{|P(V)P(W^\perp)}$. Par le théorème de prolongement de Skoda (cf. [Sk2]), $\widetilde{T}$ est fermée et puisque ω_ε est cohomologue à ω dans $P(V)$ on a $\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \omega^p_\varepsilon = \int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \omega^p$ et donc

$$\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^p_{|P(W)}\big) \leq \int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \omega^p. \tag{1.6}$$

On note $\tilde{\sigma}_{W*}T$ l'image directe par $\tilde{\sigma}_W$ de $\widetilde{T}$. Pour vérifier que $d\tilde{\sigma}_{W*}T = 0$, on reprend l'idée de la démonstration du théorème de prolongement de Skoda-El Mir (cf. [EM] et [Sib]). k étant un entier ≥ 1, soit $\varphi_k = \chi\big(\frac{1}{k}g\big)$ avec χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]-\infty, 0]$ valant 1 en 0 et convexe croissante. Cette suite de fonctions vérifie les propriétés suivantes :

φ_k est $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$ et $0 \leq \varphi_k \leq 1$,

φ_k tend vers 1 uniformément sur tout compact de $P(V)$
$P(W^\perp)$,

$\varphi_k = 0$ au voisinage de $P(W^\perp)$.

On va aussi estimer le hessien de φ_k. On a

$$dd^c\varphi_k = \frac{1}{k^2}\chi''\big(\frac{1}{k}g\big)dg \wedge d^c g + \frac{1}{k}\chi'\big(\frac{1}{k}g\big)dd^c g.$$

Compte-tenu de la convexité de χ le premier terme est positif. Pour le second, on utilise que $dd^c g \geq -\omega$ d'après (1.5) et que χ' est positive et majorée par une constante C. D'où la minoration $dd^c\varphi_k \geq -\frac{C}{k}\omega$.

Puisque $\tilde{\sigma}_{W*}T$ est réel, il suffit de vérifier qu'il est d'-fermé. Comme c'est la limite de $\tilde{\sigma}_{W*}(\varphi_k T)$ il s'agit de voir que $\tilde{\sigma}_{W*}(d'\varphi_k \wedge T)$ tend vers 0.

Comme toute forme $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(W)$ de bidegré $(p-1,p)$ est une somme de formes s'écrivant $i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta} \wedge \bar{\beta}$ avec θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ d-fermée de bidegré $(p-1,0)$ et β de classe $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré $(1,0)$, cela revient à montrer que la suite $\int_{P(V)} d'\varphi_k \wedge T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(i^{(p-1)^2}\theta \wedge$

$\bar{\theta}\big) \wedge \overline{\tilde{\sigma}_W{}^*\beta}$ tend vers 0. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la forme hermitienne qui associe $\int_{P(V)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}\big) \wedge i\gamma_1 \wedge \bar{\gamma}_2$ à γ_1 et γ_2 dans $\mathcal{C}^\infty_{1,0}(P(V))$, le carré de sa valeur absolue est inférieur à

$$\left(\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(i^{p^2}\theta \wedge \beta \wedge \overline{\theta \wedge \beta}\big)\right)\left(\int_{P(V)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(i^{p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}\big) \wedge id'\varphi_k \wedge d''\varphi_k\right).$$

Compte-tenu de la relation $d'\varphi_k \wedge d''\varphi_k = \frac{1}{2}d'd''\varphi_k^2 - \varphi_k d'd''\varphi_k$, la dernière intégrale est égale à

$$\int_{P(V)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}\big) \wedge \varphi_k(-id'd''\varphi_k) \leq \frac{CC'}{k}\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^{p-1}_{|P(W)}\big) \wedge \omega$$

après majoration de $i^{(p-1)^2}\theta \wedge \bar{\theta}$ par $C'\omega^{p-1}_{|P(W)}$ et utilisation de l'estimation de hessien de φ_k.

Enfin, l'intégrale $\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^{p-1}_{|P(W)}\big) \wedge \omega$ est convergente puisque par un raisonnement analogue à celui effectué pour établir (1.6) on voit qu'elle est inférieure à $\int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \omega^p$. ■

Il résulte de tout ceci que $\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ est, pour tout $W \in G(p+2, V)$, un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ bien défini dans $P(V)$. De plus, d'après (1.2),

$$\int_{P(V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T \wedge \omega^{N-1} = \int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^p_{|P(W)}\big)$$

et d'après (1.6) le second membre est inférieur au degré de T. Autrement dit, le degré de $\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ est toujours inférieur à celui de T. La formule

$$\text{(1.7)} \qquad \int_{W\in G(p+2,V)} d\mu(W) \int_{P(V)P(W^\perp)} T \wedge \tilde{\sigma}_W{}^*\big(\omega^p_{|P(W)}\big) = \int_{P(V)} T \wedge \omega^p$$

qui est une conséquence de la formule de Fubini et de (1.3) implique alors que pour presque tout W il y a égalité.

Enfin, l'intégrale $\int_{W\in G(p+2,V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T d\mu(W)$ est faiblement convergente. En effet, les courants $\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ étant positifs, cela résulte du fait que la fonction qui à W associe $\int_{P(V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T \wedge \omega^{N-1}$ est, comme on vient de le voir, majorée. On note

$$T_1 = \int_{W\in G(p+2,V)} \tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T d\mu(W).$$

Alors

(1.8) Proposition. — *T_1 est un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ dans $P(V)$ qui possède même degré que T.*

2. Conservation des nombres de Lelong

On note $\pi : V \dashrightarrow P(V)$ l'application canonique.

(2.1) Lemme.

(i) Pour toute forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans V, l'image directe $\pi_* u$ calculée par intégration le long des fibres de π existe et est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$.

(ii) L'image inverse par π d'un courant S de $P(V)$ est définie dans V et est positive fermée si S l'est.

Démonstration. — On considère le fibré $Y = \mathcal{O}_{P(V)}(-1) \xrightarrow{\tau} P(V)$ et l'application $\eta : Y \longrightarrow V$ qui est en fait l'éclatement de V en 0. η résout la singularité de π *i.e.* le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ V \arrow[r, dashed, "\pi"'] & P(V) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On pose alors $\pi_* u = \tau_* \eta^* u$ et $\pi^* S = \eta_* \tau^* S$. ■

En fait en notant ℓ le degré de $\pi_* u$, on a la formule

$$(\pi_* u)_{[z]}(\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell) = \int_{\mathbb{C}} u_{tz}(z, iz, t\zeta^1(z), \ldots, t\zeta^\ell(z))\, d\lambda(t) \tag{2.2}$$

pour $\zeta^1, \ldots, \zeta^\ell$ dans $T_{[z]}P(V) = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}z, V/\mathbb{C}z)$, λ désignant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}$.

(2.3) Proposition. — *Les nombres de Lelong d'un courant positif fermé sont conservés par image réciproque par submersion.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas d'une projection $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^n$. L'image réciproque d'un courant de $\mathbb{C}^n$ est alors égale à son produit tensoriel avec le courant d'intégration sur $\mathbb{C}^m$ et on conclut grâce au fait suivant. ■

(2.4) Lemme. — *Si T et S sont des courants positifs fermés définis au voisinage de* 0 *respectivement dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$, on a l'égalité $\nu(T \otimes S, 0) = \nu(T, 0)\nu(S, 0)$.*

Démonstration. — Appelons (p,p) et (q,q) les bidimensions respectives de T et S. Alors

$$\nu(T\otimes S,0,r)=\binom{p+q}{p}\Big(\frac{1}{\pi^q r^{2q}}\Big)\int_{|z|<r}\Big(1-\frac{|z|^2}{r^2}\Big)^p\nu(T,0,\sqrt{r^2-|z|^2})S(z)\wedge\Big(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\Big)^q$$
$$\sim\nu(T,0)\binom{p+q}{p}\Big(\frac{1}{\pi^q r^{2q}}\Big)\int_{|z|\le r}\Big(1-\frac{|z|^2}{r^2}\Big)^p S(z)\wedge\Big(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\Big)^q\ .$$

Notons τ la mesure trace de S et $\tau(r)$ la masse de τ sur la boule $\overline{B}(0,r)$. Pour toute fonction w de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{\overline{B}(0,r)}w(|z|)\ d\tau(z)=w(r)\tau(r)-\int_0^r w'(t)\tau(t)\ dt.$$

En effet, lorsque S est une forme différentielle continue, τ s'obtient à partir de la mesure de Lebesgue à l'aide d'une densité h et la relation

$$\tau(r)=\int_{\overline{B}(0,r)}h\ dV=\int_0^r\Big(\int_{|z|=t}h(z)\ dA(z)\Big)\ dt$$

implique que $\tau(r)$ est dérivable de dérivée égale à $\int_{|z|=r}h(z)\ dA(z)$. On a alors

$$\int_{\overline{B}(0,r)}w(|z|)\ d\tau(z)=\int_0^r w(t)\Big(\int_{|z|=t}h(z)\ dA(z)\Big)=\int_0^r w(t)\tau'(t)\ dt$$

puis l'égalité annoncée après une intégration par parties. Lorsque S est quelconque, on effectue une régularisation et on utilise le fait suivant.

(2.5) Lemme. — *Soit ρ_ℓ une suite de mesures positives dans V convergeant faiblement vers une mesure ρ. Alors*

$$\int_{\overline{B}(0,r)}\rho=\lim_{\varepsilon\to0}\liminf_{\ell}\int_{B(0,r+\varepsilon)}\rho_\ell=\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{\ell}\int_{\overline{B}(0,r+\varepsilon)}\rho_\ell.$$

Démonstration. — Cela résulte des inégalités

$$\int_{B(0,r)}\rho\le\liminf_{\ell}\int_{B(0,r)}\rho_\ell\le\limsup_{\ell}\int_{\overline{B}(0,r)}\rho_\ell\le\int_{\overline{B}(0,r)}\rho.$$ ∎

Ainsi

$$\frac{1}{\pi^q r^{2q}}\int_{|z|\le r}\Big(1-\frac{|z|^2}{r^2}\Big)^p S(z)\wedge\Big(\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}|z|^2\Big)^q=\int_0^1 2pt(1-t^2)^{p-1}\frac{\tau(rt)}{\frac{\pi^q}{q!}r^{2q}}\ dt$$

qui tend vers $\nu(S,0)\int_0^1 2pt^{2q+1}(1-t^2)^{p-1}\ dt$, la dernière intégrale valant $\frac{1}{\binom{p+q}{p}}$. ∎

Les considérations suivantes vont permettre, T étant un courant positif fermé dans $P(V)$, d'exprimer le courant $\pi^*\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$ à l'aide de π^*T. On note $\pi_W : W-\{0\}\longrightarrow P(W)$ l'application canonique et on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[d, "\sigma_W"] & P(V) \arrow[d, dashed, "\tilde{\sigma}_W"] \\ W \arrow[r, dashed, "\pi_W"] & P(W)\ . \end{tikzcd}$$

(2.6) LEMME. — *Pour toute forme différentielle u de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans W, l'image directe $\pi_*\sigma_W{}^*u$ calculée par intégration de $\sigma_W{}^*u$ le long des fibres de π existe dans $P(V)$*
$P(W^\perp)$ et y est égale à $\tilde{\sigma}_W{}^*\pi_{W*}u$.

Démonstration. — Le support de $\sigma_W{}^*u$ est contenu dans $\operatorname{supp} u + W^\perp$. Puisque $\operatorname{supp} u$ est compact, pour z hors de $W^\perp$, l'ensemble des t tels que tz appartienne à $\operatorname{supp} u + W^\perp$ est borné. On peut alors calculer $(\pi_*\sigma_W{}^*u)_{[z]}$ à l'aide de la formule (2.2) :

$$(\pi_*\sigma_W{}^*u)_{[z]}(\zeta^1,\ldots,\zeta^\ell) = \int_{\mathbb{C}} u_{t\sigma_W(z)}\big(\sigma_W(z), i\sigma_W(z), t\sigma_W(\zeta^1(z)),\ldots,t\sigma_W(\zeta^\ell(z))\big)d\lambda(t)$$

pour $(\zeta^1,\ldots,\zeta^\ell)$ dans $T_{[z]}P(V)$. C'est la même chose que $(\tilde{\sigma}_W{}^*\pi_{W*}u)_{[z]}(\zeta^1,\ldots,\zeta^\ell)$. ∎

(2.7) PROPOSITION. — *L'image directe $\sigma_{W*}\pi^*T$ existe pour tout $W \in G(p+2,V)$ et est égale à $\pi_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T$.*

Démonstration. — Soit u une forme différentielle continue à support compact dans W. Il s'agit de voir que la mesure $\pi^*T\wedge\sigma_W^*u$ est de masse finie dans V. D'une part, d'après (2.6), on a

$$\begin{aligned}\int_{V W^\perp} \pi^*T\wedge\sigma_W{}^*u &= \int_{P(V) P(W^\perp)} T\wedge\tilde{\sigma}_W{}^*\pi_{W*}u\\ &= \int_{P(W)} \pi_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T\wedge u.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_{W^\perp} \pi^*T\wedge\sigma_W{}^*u = \int_W \sigma_{W*}(\mathbb{1}_{W^\perp}\cdot\pi^*T)\wedge u = 0$$

par le résultat suivant (cf. [Fe], § 4.1.15). ∎

(2.8) LEMME. — *Soit S un courant localement plat, Ψ et Ψ' deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ dont les restrictions au support de S sont égales à une même application propre. Alors les images directes Ψ_*S et Ψ'_*S sont égales.*

Par (2.7) on a pour tout W dans $G(p{+}2,V)$ la relation $\pi^*\tilde{\sigma}_W{}^*\tilde{\sigma}_{W*}T{=}\sigma_W{}^*\sigma_{W*}\pi^*T$ et donc

$$\pi^*T_1 = \int_{W\in G(p+2,V)} \sigma_W{}^*\sigma_{W*}\pi^*T\ d\mu(W)\ . \tag{2.9}$$

On va maintenant calculer le nombre de Lelong de T_1 au point $[z_0]$ en utilisant la proposition (2.3) :

$$\nu(T_1,[z_0]) = \nu(\pi^*T_1,z_0) = \lim_{r\to 0}\nu(\pi^*T_1,z_0,r)$$

où, en notant $\alpha = dd^c \log |z|$ l'image réciproque de ω dans V,

$$\nu(\pi^* T_1, z_0, r) = \int_{B(0,r)} (\pi^* T_1)(z_0 + z) \wedge \alpha^N = \int_V (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \phi_r \tag{2.10}$$

avec $\phi_r = \int_{W \in G(p+2,V)} {\sigma_W}^* \sigma_{W*}(\mathbb{I}_{B(0,r)} \cdot \alpha^N)\ d\mu(W)$.

Remarquons que la forme différentielle ϕ_r vérifie la relation $\phi_r = h_{r*}\phi_1$ en désignant par h_r l'homothétie de rapport r.

L'inégalité $\mathbb{I}_{B(0,r)} \cdot \alpha^N \leq \alpha^N$ et les lemmes (1.2) et (1.3) impliquent par ailleurs $\phi_r \leq \alpha^{p+1}$.

Ceci assure que l'intégrale (2.10) converge *a priori* . En effet

$$\int_{B(0,R)} (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \alpha^{p+1} = \frac{1}{R^{2p+2}} \int_{B(z_0,R)} \pi^* T \wedge \Big(\frac{1}{2} dd^c |z|^2\Big)^{p+1}$$

et la seconde intégrale est majorée par la masse de $\pi^* T \wedge \Big(\frac{1}{2} dd^c |z|^2\Big)^{p+1}$ sur $B(0, R+|z_0|)$ qui, à cause de l'invariance de $\pi^* T$ par homothétie, est proportionnelle à $(R + |z_0|)^{2p+2}$.

Maintenant, ϕ_1 étant une forme positive invariante par l'action du groupe unitaire s'écrit $f(|z|)\alpha^{p+1} + g(|z|)\alpha^p \wedge d \log |z| \wedge d^c \log |z|$ avec des fonctions f et g positives dans $\mathbb{R}_+^*$. La croissance de ϕ_r par rapport à r implique la décroissance de f et g. Le fait que $\lim_{r \to \infty} \phi_r = \alpha^{p+1}$ implique $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$. En particulier g est nulle et donc

$$\nu(\pi^* T_1, z_0, r) = \int_V f\Big(\frac{|z|}{r}\Big)(\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \alpha^{p+1}.$$

La forme α^N étant à coefficients localement intégrables, on a $\lim_{r \to 0} \phi_r = 0$ et donc $f(\infty) = 0$. Grâce au théorème de convergence monotone on obtient finalement

$$\nu(\pi^* T_1, z_0) = \int_{\{0\}} (\pi^* T)(z_0 + z) \wedge \alpha^{p+1} = \nu(\pi^* T, z_0).$$

3. Inégalités d'auto-intersection

On va maintenant utiliser le courant construit précédemment pour établir le résultat suivant :

(3.1) Proposition. — *Étant donné T un courant positif fermé de bidimension (p,p) dans $P(V)$ on a, avec les notations de l'Introduction, l'inégalité suivante pour $q \leq p$*

$$\sum_{k \geq 1} (\nu_{q,k} - b_p) \cdots (\nu_{q,k} - b_q) \delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)^{p+1-q}.$$

Démonstration. — On écrit $T_1 = \delta(T)\omega + dd^cU$ où U est une fonction dans $P(V)$. Le théorème d'atténuation des singularités des fonctions presque plurisousharmoniques (cf. [De3] et [De5]) donne l'existence pour tout $c > 0$ d'une suite décroissante $(U_{c,\ell})_{\ell\geq 1}$ de fonctions convergeant vers U telles que

(i) $U_{c,\ell}$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans $P(V)$

E_c ;

(ii) $dd^cU_{c,\ell} + (\delta(T) + \delta_\ell)\omega \geq 0$ où δ_ℓ est une suite décroissante de constantes positives convergeant vers 0 ;

(iii) en tout point $[z]$ de $P(V)$, $\nu\big(U_{c,\ell}, [z]\big) = \big(\nu(T, [z]) - c\big)_+$.

Pour $c_j > b_j$ l'ensemble des points au voisinage desquels $U_{c_j,\ell}$ n'est pas minorée est contenu dans E_{c_j} qui est de dimension inférieure ou égale à j.

Le courant $T\wedge\Big(dd^cU_{c_{p-1},\ell}+(\delta(T)+\delta_\ell)\omega\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(dd^cU_{c_q,\ell}+(\delta(T)+\delta_\ell)\omega\Big)$ est alors bien défini d'après la théorie des opérateurs de Monge-Ampère et son nombre de Lelong en un point $[z]$ est supérieur à $\nu(T,[z])\big(\nu(T,[z])-c_{p-1}\big)_+\cdots\big(\nu(T,[z])-c_q\big)_+$. La formule de Siu entraîne que ce courant est supérieur à $\sum_k \nu_{q,k}(\nu_{q,k} - c_{p-1})_+ \cdots (\nu_{q,k} - c_q)_+[Z_{q,k}]$.

En comparant les degrés, on obtient

$$\sum_k \nu_{q,k}(\nu_{q,k} - c_{p-1})_+ \cdots (\nu_{q,k} - c_q)_+\delta(Z_{q,k}) \leq \delta(T)(\delta(T) + \delta_\ell)^{p-q}$$

puis l'inégalité annoncée par passages à la limite. ∎

Le résultat précédent souffre de la critique suivante :

L'inégalité (3.1) fournit certes une borne pour $\sum_k(\nu_{q,k} - b_p)\cdots(\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k})$. Cependant celle-ci doit pouvoir être améliorée au moins dans le cas où T est le courant associé à un sous-ensemble algébrique. Par exemple, pour une courbe irréductible de $\mathbb{P}_2$ de degré d et de genre g, l'inégalité (3.1) s'écrit $\sum_k \nu_k(\nu_k - 1) \leq d^2$, les ν_k étant les multiplicités des points singuliers, alors qu'on a en fait l'inégalité $\sum_k \nu_k(\nu_k - 1) \leq (d-1)(d-2)-2g$. Pour un sous-ensemble algébrique A de dimension quelconque dans $\mathbb{P}_n$ une borne analogue pour $\sum_k(\nu_{q,k} - b_p)\cdots(\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k})$ faisant intervenir la topologie de A serait intéressante.

(3.2) Corollaire. — *Soit X une variété projective de dimension n et ω une métrique kählérienne sur X dont la classe de cohomologie est entière. Il existe une constante C ne dépendant que de n, $\{\omega\}^n$ et $\{\omega\}^{n-1}\cdot c_1(X)$ telle que pour tout courant positif fermé T de bidimension (p,p) dans X on a l'inégalité suivante pour $q \leq p$*

$$\sum_{k\geq 1}(\nu_{q,k} - b_p)\cdots(\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \leq C\delta(T)^{p+1-q}$$

en désignant par $\delta(\cdot)$ les degrés calculés par rapport à ω.

Démonstration. — Puisque $\{\omega\}$ est entière, c'est la première classe de Chern d'un fibré en droites ample L. Il existe un entier m ne dépendant que de n, $\{\omega\}^n$ et $\{\omega\}^{n-1}\cdot c_1(X)$ tel que mL soit très ample (cf. [KM]). On applique alors l'inégalité (3.1) à l'image directe de T par le plongement dans l'espace projectif défini par les sections de ce fibré et on obtient

$$\sum_k (\nu_{q,k} - b_p)\cdots(\nu_{q,k} - b_q)\delta(Z_{q,k}) \le m^{(p+1)(p-q)}\delta(T)^{p+1-q}\ . \qquad \blacksquare$$

Dans l'inégalité précédente, la présence d'une constante dépendant notamment de $\{\omega\}^{n-1}\cdot c_1(X)$ est naturelle comme le montre déjà le cas où X est une surface et T le courant associé à une courbe irréductible A : on a alors

$$\sum_k \nu_k(\nu_k - 1) \le \{A\}^2 - c_1(X)\cdot\{A\} + 2 - 2g\ .$$

4. Calcul du potentiel

(4.1) Lemme. — *Soit X une variété complexe, pr_1 et pr_2 les projections de $X\times X$ sur X et Δ_X la diagonale de $X\times X$. Pour tout courant S dans X, le produit ${\mathrm{pr}_2}^*S\wedge[\Delta_X]$ est bien défini et on a l'égalité $S = \mathrm{pr}_{1*}({\mathrm{pr}_2}^*S\wedge[\Delta_X])$.*

Démonstration. — On note $i : X \longrightarrow X\times X$ l'injection définie par $i(x) = (x,x)$. Alors $[\Delta_X] = i_*1$ et ${\mathrm{pr}_2}^*S\wedge[\Delta_X] = i_*S$. $\blacksquare$

T désignant un courant positif fermé de bidimension (p,p) dans $P(V)$, la relation (2.9) entraîne que π^*T_1 s'obtient à partir de π^*T à l'aide de la formule

$$(\pi^*T_1)(z) = \int_V (\pi^*T)(x)\wedge K(z,x)$$

où

$$\begin{aligned} K &= \int_{W\in G(p+2,V)} (\sigma_W\times\sigma_W)^*[\Delta_W]\ d\mu(W) \\ &= \int_{W\in G(p+2,V)} \big(dd^c\log|\sigma_W(z) - \sigma_W(x)|\big)^{p+2}\ d\mu(W) \\ &= \big(dd^c\log|z-x|\big)^{p+2} \end{aligned}$$

grâce au lemme (1.3).

Écrivant de plus que

$$\big(dd^c\log|z-x|\big)^{p+2} = dd^c\Big(-C\frac{(dd^c|z-x|^2)^{p+1}}{|z-x|^{2p+2}}\Big)\quad\text{avec}\quad C = \frac{1}{(p+1)2^{p+2}}$$

on obtient l'expression

$$(\pi^*T_1)(z) = dd^c\left(-C\int_V\left\{\frac{1}{|z-x|^{2p+2}} - \frac{1}{(1+|x|^2)^{p+1}}\right\}(\pi^*T)(x)\wedge\big(dd^c|x|^2\big)^{p+1}\right).$$

On va maintenant exprimer T_1 à partir de T. La formule précédente peut s'écrire

$$(4.2) \qquad (\pi^* T_1)(z) = \lim_{r\to\infty} dd^c \left(-C \int_{|x|<r} (\pi^* T)(x) \wedge \frac{\big(dd^c|x|^2\big)^{p+1}}{|z-x|^{2p+2}} \right)$$

et il s'agit de calculer l'image directe $\pi_* \Big(C \frac{1_{B(0,r)}(x) \big(dd^c|x|^2\big)^{p+1}}{|z-x|^{2p+2}} \Big)$. Par la formule (2.2), sa valeur au point $[x]$ est

$$\Big(\frac{1}{2\pi} \int_{|t|<r} \frac{|t|^{2p}}{|z - t\frac{x}{|x|}|^{2p+2}} d\lambda(t) \Big) \omega^p([x]).$$

Mais

$$\begin{aligned} \big|z - t\frac{x}{|x|}\big|^2 &= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\Big(\frac{\langle z|x\rangle}{|x|}\bar t\Big) + |t|^2 \\ &= |z|^2 \Big(1 - \frac{|\langle z|x\rangle|^2}{|z|^2|x|^2} + \Big|\frac{\langle z|x\rangle}{|z||x|} - \frac{t}{|z|}\Big|^2 \Big) \end{aligned}$$

et l'intégrale ci-dessus s'écrit donc, en notant $a = \frac{|\langle z|x\rangle|}{|z||x|}$,

$$\int_{B(0,r)} \frac{|t|^{2p}}{|z|^{2p+2}\big(1 - a^2 + |a - \frac{t}{|z|}|^2\big)^{p+1}} d\lambda(t)$$

puis après le changement de variables $t' = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\big(a - \frac{t}{|z|}\big)$

$$\int_{B\big(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{r}{|z|\sqrt{1-a^2}}\big)} \frac{|a - t'\sqrt{1-a^2}|^{2p}}{(1-a^2)^p (1+|t'|^2)^{p+1}} d\lambda(t').$$

Compte tenu du fait que lorsque $r \to \infty$

$$\int_{B\big(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{r}{|z|\sqrt{1-a^2}}\big)} \frac{d\lambda(t')}{1+|t'|^2} = 2\pi \log \frac{r}{|z|\sqrt{1-a^2}} + o(1)$$

on obtient $T_1 = \delta(T)\omega + dd^c U$ avec

$$U([z]) = \int_{P(V)} \mathcal{K}([z],[x]) (T \wedge \omega^p)([x])$$

et

$$\mathcal{K}([z],[x]) = \log \sqrt{1-a^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \Big\{ \frac{|a - t'\sqrt{1-a^2}|^{2p}}{(1-a^2)^p(1+|t'|^2)^{p+1}} - \frac{1}{1+|t'|^2} \Big\}\, d\lambda(t').$$

Ce noyau est singulier lorsque $a = 1$ c'est-à-dire le long de la diagonale de $P(V) \times P(V)$ et il a pour partie principale lorsque $a \to 1$

$$\Big(-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(1+|t'|^2)^{p+1}} d\lambda(t') \Big) \frac{1}{(1-a^2)^p} = -\frac{1}{2p(1-a^2)^p} \ .$$

Pour déterminer l'expression de T_1 en fonction de T on peut aussi appliquer le lemme (4.1) directement à $P(V)$. On trouve que

$$T_1([z]) = \int_{P(V)} \widetilde{K}([z],[x]) \wedge T([x])$$

avec

$$\widetilde{K} = \int_{W\in G(p+2,V)} (\tilde{\sigma}_W \times \tilde{\sigma}_W)^*[\Delta_{P(W)}]\ d\mu(W)\ . \tag{4.3}$$

Se pose alors la question d'exprimer le courant $[\Delta_{P(W)}]$. Pour cela on considère, au-dessus de $P(W) \times P(W)$, le fibré vectoriel $E = {\mathrm{pr}_1}^*\mathcal{O}_{P(W)}(1) \otimes {\mathrm{pr}_2}^*F$ avec F le fibré quotient $W/\mathcal{O}_{P(W)}(-1)$. La fibre de E au-dessus de $([z],[x])$ est $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}z, W/\mathbb{C}x)$ et $\Delta_{P(W)}$ s'interprète comme l'ensemble des zéros de la section s de E définie par $s([z],[x])$: $z \longrightarrow z \bmod \mathbb{C}x$. On munit E de la métrique induite par le produit scalaire induit sur W et on a alors $|s| = \frac{|z\wedge x|}{|z||x|} = \sqrt{1-a^2}$.

Afin d'appliquer les calculs généraux du § 5, on calcule maintenant la forme de Chern de degré maximal de ce fibré hermitien. On écrit pour cela

$$c_{p+1}(\Theta) = \sum_{j=0}^{p+1} c_1\big({\mathrm{pr}_1}^*\Theta_{\mathcal{O}(1)}\big)^j \wedge c_{p+1-j}({\mathrm{pr}_2}^*\Theta_F).$$

Puis, grâce à la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow W \longrightarrow F \longrightarrow 0$, on a l'égalité entre formes de Chern totales

$$c(\Theta_F) = c\big(\Theta_{\mathcal{O}(1)}\big)^{-1} = \big(1 - c_1(\Theta_{\mathcal{O}(1)})\big)^{-1}$$

qui fournit $c_{p+1-j}(\Theta_F) = c_1(\Theta_{\mathcal{O}(1)})^{p+1-j}$ puis, comme $c_1(\Theta_{\mathcal{O}(1)}) = \omega_{|P(W)}$,

$$c_{p+1}(\Theta) = \sum_{j=0}^{p+1} {\mathrm{pr}_1}^*\big(\omega^j_{|P(W)}\big) \wedge {\mathrm{pr}_2}^*\big(\omega^{p+1-j}_{|P(W)}\big).$$

Grâce à la proposition (5.10), on peut alors écrire

$$[\Delta_{P(W)}] = \sum_{j=0}^{p+1} {\mathrm{pr}_1}^*\big(\omega^j_{|P(W)}\big) \wedge {\mathrm{pr}_2}^*\big(\omega^{p+1-j}_{|P(W)}\big) + \big(dd^c \log|s|\big)^{p+1} + dd^c\psi'$$

avec une forme différentielle ψ' à coefficients $O\Big(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\Big)$.

Il reste pour obtenir $\widetilde{K}$ à faire la moyenne par rapport à $W \in G(p+2,V)$ de l'image réciproque dans $P(V)\times P(V)$ des différents termes du second membre de l'égalité précédente. On ne l'a pas fait mais tout laisse penser que ce noyau peut s'écrire comme la somme du courant $\sum_{j=0}^{p+1} {\mathrm{pr}_1}^*\omega^j \wedge {\mathrm{pr}_2}^*\omega^{p+1-j} + \big(dd^c \log|s|\big)^{p+1}$ et d'un terme qui est le dd^c d'une forme à coefficients $O\Big(\frac{1}{|s|^{2p-2}}\Big)$.

5. Formes d'Euler-Green

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r au-dessus d'une variété complexe X et s une section holomorphe de E transverse à la section nulle. L'ensemble Z des

zéros de s est une sous-variété lisse de X de codimension r dont la classe de cohomologie est la $r^{\text{ème}}$ classe de Chern – aussi appelée classe d'Euler – de E. On munit E d'une métrique hermitienne et on va expliciter une forme différentielle ψ à coefficients localement intégrables dans X, $\mathcal{C}^\infty$ dans X
Z telle que

$$[Z] = c_r(\Theta) + dd^c\psi \tag{5.1}$$

où Θ désigne la forme de courbure de la connexion de Chern de E et $c_r(\Theta)$ sa $r^{\text{ème}}$ forme de Chern.

a. Formule de King.

Lorsque E est de rang 1, la formule de Poincaré-Lelong dit précisément que $\psi = \log|s|$ satisfait l'équation (5.1). Le cas général s'y ramène en éclatant X le long de Z.

Soit $\pi : P(E) \longrightarrow X$ le fibré des droites de E, $\widetilde{X} = \big\{a \in P(E),\ a \ni s(\pi(a))\big\}$, $\eta : \widetilde{X} \longrightarrow X$ la restriction de π et $H = \eta^{-1}(Z)$. L'application η réalise bien l'éclatement : elle induit un biholomorphisme de $\widetilde{X}$
H sur X
Z et H étant le fibré des droites de $E_{|Z}$ est isomorphe au fibré normal à Z dans X à cause de la suite exacte $0 \longrightarrow TZ \longrightarrow TX \xrightarrow{ds} E \longrightarrow 0$. Soit L_E le fibré en droites tautologique sur $P(E)$ muni de la métrique induite par celle de E, L sa restriction à $\widetilde{X}$ et ξ la première forme de Chern de L. Puisque $L_{E|P(E_x)} = \mathcal{O}_{P(E_x)}(-1)$ on a $\big(\eta_{|H}\big)_*\big((-\xi)^{r-1}_{|H}\big) = 1$ et donc $[Z] = \eta_*\big((-\xi)^{r-1} \wedge [H]\big)$. Mais H est précisément le diviseur des zéros de la section de L induite par s donc $[H] = dd^c \log|\eta^* s| + \xi$ puis

$$[Z] = dd^c\eta_*\big((-\xi)^{r-1}\log|\eta^* s|\big) - \eta_*\big((-\xi)^r\big).$$

Or l'image directe par η de $(-\xi)^{r-1}\log|\eta^* s|$ (respectivement de $(-\xi)^r$) est une forme à coefficients localement intégrables dans X, de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X
Z où elle est égale à $\big(dd^c\log|s|\big)^{r-1}\log|s|$ (respectivement à $\big(dd^c\log|s|\big)^r$). Ainsi

$$[Z] = dd^c\left\{\Big(\big(dd^c\log|s|\big)^{r-1}\log|s|\Big)_{|XZ}\right\} - \big(dd^c\log|s|\big)^r_{|XZ}$$

ou encore

$$[Z] = \big(dd^c\log|s|\big)^r - \big(dd^c\log|s|\big)^r_{|XZ}. \tag{5.2}$$

On va maintenant exprimer $\big(dd^c\log|s|\big)^r_{|XZ}$ en suivant la méthode de [BC1].

b. Rappels sur les classes de Chern d'une suite exacte.

On considère une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes $0 \longrightarrow S \xrightarrow{j} E \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$. La métrique sur E induit des métriques sur S et Q et on note D, D_S et D_Q

les connexions de Chern. $j^* \oplus g$ est un isomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de E sur $S \oplus Q$ et permet de définir une connexion hermitienne D_0 sur E comme image réciproque de $D_S \oplus D_Q$. On note Θ_0 la forme de courbure de D_0. Alors

(5.3) Proposition. — *Soit P un polynôme sur $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ de degré k invariant par conjugaison. On a $P(\Theta) - P(\Theta_0) = -d'd''\varphi$ où*

$$\varphi = \int_0^1 \frac{2k}{t} \Big\{ P\big(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t\big) - P\big(\sigma, \Theta_0, \ldots, \Theta_0\big) \Big\}\ dt$$

avec $\sigma = jj^*$ la projection orthogonale sur S et Θ_t la forme de courbure de $D_t = (1-t)D_0 + tD$.

Démonstration. — On écrit tout d'abord $P(\Theta) - P(\Theta_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t)\ dt$ puis

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t) = kP\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t\Big).$$

Soit $\Gamma = D - D_0 \in \mathcal{C}_1^\infty(X, \mathrm{Hom}(E,E))$ de sorte que $D_t = D_0 + t\Gamma$ et

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta_t = \Big(\frac{\partial}{\partial t}D_t\Big) \circ D_t + D_t \circ \Big(\frac{\partial}{\partial t}D_t\Big) = \Gamma \circ D_t + D_t \circ \Gamma = D_t\Gamma.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(\Theta_t) &= kP(D_t\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \\ &= kdP(\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \end{aligned}$$

compte-tenu de la relation de Bianchi $D_t\Theta_t = 0$ puis

$$P(\Theta) - P(\Theta_0) = d\Big(\int_0^1 kP\big(\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t\big)\ dt\Big). \tag{5.4}$$

Il s'agit maintenant d'expliciter Γ. Pour cela on écrit, v étant une section locale $\mathcal{C}^\infty$ de E,

$$\begin{aligned} D_0 v &= jD_S(j^*v) + g^*D_Q(gv) \\ &= j\big\{j^*Dv + Dj^* \otimes v\big\} + g^*\big\{gDv + Dg \otimes v\big\} \end{aligned}$$

où on note encore par D les connexions de Chern induites sur $\mathrm{Hom}(E,S)$ et $\mathrm{Hom}(E,Q)$. Ceci fait apparaître $\Gamma = -(jDj^* + g^*Dg)$. De plus, le fait que j et g soient holomorphes s'écrit $d''j = 0$ et $d''g = 0$ ou en prenant les adjoints $D'j^* = 0$ et $D'g^* = 0$. Ainsi $\Gamma = -(jd''j^* + g^*D'g) = -(d''(jj^*) + D'(g^*g))$ puis, compte-tenu du fait que $g^*g = \mathrm{id}_E - jj^*$, il vient

$$\Gamma = -d''\sigma + D'\sigma. \tag{5.5}$$

Les relations (5.4) et (5.5) suggèrent maintenant de considérer

$$dP(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = P(D\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) + (k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t).$$

On va exprimer différemment le second terme. Le fait que $D = D_t + (1-t)\Gamma$ et la relation de Bianchi appliquée à Θ_t impliquent $D\Theta_t = (1-t)[\Gamma, \Theta_t]$ puis

$$(k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = (k-1)(1-t)P\big(\sigma, [\Gamma, \Theta_t], \Theta_t, \ldots, \Theta_t\big).$$

L'invariance de P par conjugaison entraîne après dérivation la relation

$$\sum_j P(A_1, \ldots, [B, A_j], \ldots, A_k) = 0$$

pour $A_1, \ldots, A_k$, B dans $M_r(\mathbb{C})$. Lorsque $A_1, \ldots, A_k$, B sont des matrices $r \times r$ de formes de degrés respectifs $p_1, \ldots, p_k$, q, on en déduit que

$$\sum_j (-1)^{q(p_1+\cdots+p_{j-1})} P(A_1, \ldots, [B, A_j], \ldots, A_k) = 0.$$

Appliquant cette dernière relation, on obtient

$$(k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = (t-1)P\big([\Gamma, \sigma], \Theta_t, \ldots, \Theta_t\big).$$

Or $[\Gamma, \sigma] = [D - D_0, \sigma] = (D - D_0)\sigma$ et $D_0\sigma = 0$ donc

$$(k-1)P(\sigma, D\Theta_t, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = (t-1)P(D\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t)$$

puis

$$dP(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(D\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t). \tag{5.6}$$

Pour identifier les composantes de bidegrés $(k, k-1)$ et $(k-1, k)$ des deux membres de cette dernière égalité, il faut vérifier que Θ_t est de bidegré $(1,1)$. En effet

$$\Theta_t = D_t^2 = (D - (1-t)\Gamma)^2 = \Theta - (1-t)D\Gamma + (1-t)^2\Gamma^2.$$

Ensuite (5.5) permet d'écrire que

$$D\Gamma = -D'd''\sigma + d''D'\sigma \tag{5.7}$$

et

$$\Gamma^2 = -d''\sigma D'\sigma - D'\sigma d''\sigma \tag{5.8}$$

car $d''\sigma d''\sigma = \big\{(-d''g^*)g\big\}(jd''j^*) = 0$ en vertu de $gj = 0$ et par conséquent $D'\sigma D'\sigma = (d''\sigma d''\sigma)^* = 0$ aussi.

La relation (5.6) s'écrit donc

$$\begin{cases} d'P(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(D'\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \\ d''P(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(d''\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) \end{cases}$$

et fournit $(d' - d'')P(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = tP(\Gamma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t)$.

Comme $d(d' - d'') = -2d'd''$ et $P(\sigma, \Theta_0, \ldots, \Theta_0)$ est fermée, on a bien la formule annoncée. ∎

Pour exploiter cette formule dans le cas des classes de Chern, on utilise les notations suivantes (cf. [Fl]et [BC2]) : $\mathrm{Hom}(E, E) = E \otimes E^*$ s'injecte dans l'algèbre extérieure $\bigwedge(E \oplus E^*)$ et la forme de Chern totale de Θ s'écrit alors $c(\Theta) = (I + \widetilde{\Theta})^r$ en identifiant $\bigwedge^r E \otimes \bigwedge^r E^*$ avec $\mathbb{C}$ à l'aide de I^r et en notant par ailleurs $^\sim$ la multiplication par $\frac{i}{2\pi}$. Ainsi $c_k(\Theta) = \binom{r}{k} I^{r-k}\widetilde{\Theta}^k$ puis $c_k(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = \binom{r}{k}\tilde{\sigma} I^{r-k}\widetilde{\Theta}_t^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{r} kc_k(\sigma, \Theta_t, \ldots, \Theta_t) = r\tilde{\sigma}(I + \widetilde{\Theta}_t)^{r-1}$ de sorte que $c(\Theta) - c(\Theta_0) = -dd^c\varphi$ avec

$$\varphi = r\sigma \int_0^1 \big\{(I + \widetilde{\Theta}_t)^{r-1} - (I + \widetilde{\Theta}_0)^{r-1}\big\}\frac{dt}{t}.$$

c. Cas d'un sous-fibré de rang 1.

Supposons S de rang 1 et soit v une section holomorphe locale de S, $v^* \in E^*$ l'adjoint, de sorte que $\sigma = \frac{vv^*}{|v|^2}$. On note $\alpha = \frac{DvDv^*}{|v|^2}$ et on va exprimer, en utilisant (5.7) et (5.8), les quantités $\sigma D\Gamma$ et $\sigma\Gamma^2$ à l'aide de $\sigma\alpha$. On a d'abord

$$\begin{aligned} D'\sigma &= \frac{(D'v)v^*}{|v|^2} + \frac{vD'v^*}{|v|^2} + vv^*d'\frac{1}{|v|^2} \\ &= \frac{(Dv)v^*}{|v|^2} + vv^*d'\frac{1}{|v|^2} \end{aligned}$$

car $d''v = 0$ et $D'v^* = (d''v)^* = 0$;

$$\begin{aligned} d''\sigma &= \frac{vd''v^*}{|v|^2} + vv^*d''\frac{1}{|v|^2} \\ &= \frac{vDv^*}{|v|^2} + vv^*d''\frac{1}{|v|^2}. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} D'd''\sigma &= \alpha + \text{ termes contenant } v \text{ ou } v^*, \\ d''D'\sigma &= -\alpha \quad + \text{ termes contenant } v \text{ ou } v^*, \end{aligned}$$

et considérant les produits avec σ on obtient $\sigma D\Gamma = -2\sigma\alpha$.

De même, $d''\sigma D'\sigma$ est une somme de termes contenant tous v ou v^* et

$$D'\sigma d''\sigma = \alpha + \text{ termes contentant } v \text{ ou } v^*$$

de sorte que $\sigma\Gamma^2 = -\sigma\alpha$.

Tout ceci permet finalement d'écrire, j étant un entier,

$$\sigma\Theta_t^j = \sigma\big(\Theta + 2(1-t)\alpha - (1-t)^2\alpha\big)^j = \sigma\big(\Theta + (1-t^2)\alpha\big)^j$$

puis

$$\begin{aligned} \varphi &= r\sigma\int_0^1 \big\{\big(I+\widetilde{\Theta}+(1-t^2)\tilde{\alpha}\big)^{r-1} - (I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-1}\big\}\frac{dt}{t} \\ &= \frac{r}{2}\sigma\int_0^1 \big\{\big(I+\widetilde{\Theta}+(1-t)\tilde{\alpha}\big)^{r-1} - (I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-1}\big\}\frac{dt}{t}\ . \end{aligned}$$

Écrivant

$$\big(I+\widetilde{\Theta}+(1-t)\tilde{\alpha}\big)^{r-1} - (I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-1} = -t\tilde{\alpha}\sum_{j=1}^{r-1}\big(I+\widetilde{\Theta}+(1-t)\tilde{\alpha}\big)^{j-1}(I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-j-1}$$

et intégrant il vient

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{r}{2}\sigma\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}\big\{(I+\widetilde{\Theta})^j - (I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^j\big\}(I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-j-1} \\ &= \frac{r}{2}\sigma\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}(I+\widetilde{\Theta})^j(I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-j-1} - \frac{r}{2}\Big(\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}\Big)\sigma(I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-1}\ . \end{aligned}$$

Pour j compris entre 0 et $r-1$, les formes $\sigma I^j(I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-j-1} = \sigma I^j(I+\widetilde{\Theta}_0)^{r-j-1}$ sont fermées d'après (5.6) et on peut donc prendre

$$\varphi = \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{j}\sigma\big\{(I+\widetilde{\Theta})^j - I^j\big\}(I+\widetilde{\Theta}+\tilde{\alpha})^{r-j-1}. \tag{5.9}$$

Le fait d'avoir retranché I^j dans le crochet permettra d'assurer par la suite que les singularités des composantes bihomogènes de φ sont convenablement dominées.

d. Application.

Tout ceci permet maintenant d'exprimer $\big(dd^c\log|s|\big)^r_{|XZ}$ en considérant au-dessus de X
Z le sous-fibré en droites de E engendré par s et la suite exacte $0\to\mathbb{C}s\to E\to Q\to 0$ avec $Q=E/\mathbb{C}s$. On a alors $c(\Theta_0)=c(\Theta_{\mathbb{C}s})c(\Theta_Q)$ puis, avec φ donnée par (5.9), $c(\Theta) - c(\Theta_{\mathbb{C}s})c(\Theta_Q) = -dd^c\varphi$ qui s'écrit aussi $c(\Theta_Q) = c(\Theta_{\mathbb{C}s})^{-1}c(\Theta) + dd^c\big(c(\Theta_{\mathbb{C}s})^{-1}\varphi\big)$. On exprime alors le fait que $c_r(\Theta)=0$. Comme $c(\Theta_{\mathbb{C}s}) = 1-dd^c\log|s|$ et donc $c(\Theta_{\mathbb{C}s})^{-1} = \sum\limits_{k\geq 0}\big(dd^c\log|s|\big)^k$ il vient dans X
Z

$$0=\sum_{k=0}^{r}\big(dd^c\log|s|\big)^k\wedge c_{r-k}(\Theta)+dd^c\psi$$

avec $\psi = \sum\limits_{k=0}^{r-1}\big(dd^c\log|s|\big)^k\wedge\varphi_{r-k-1}$ et φ_{r-k-1} la composante de bidegré $(r-k-1,r-k-1)$ de φ.

Or φ est une combinaison linéaire des $\sigma I^{j-\ell}\widetilde{\Theta}^\ell I^{r-j-1-\ell'-\ell''}\widetilde{\Theta}^{\ell'}\tilde{\alpha}^{\ell''}$ avec $\ell\geq 1$ dont le degré est $2(\ell+\ell'+\ell'')$ et dont la singularité est dominée par $\frac{1}{|s|^{2\ell''}}$. Ainsi la singularité de φ_{r-k-1} est dominée par $\frac{1}{|s|^{2(r-k-2)}}$ et donc celle de ψ l'est par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$. On peut alors écrire dans X

$$-\big(dd^c\log|s|\big)^r_{|XZ} = c_r(\Theta)+\sum_{k=1}^{r-1}\big(dd^c\log|s|\big)^k\wedge c_{r-k}(\Theta)+dd^c\psi.$$

Puis, comme

$$\big(dd^c\log|s|\big)^k = dd^c\Big\{\frac{1}{2(k-1)}\Big(\frac{dd^c|s|^2}{2|s|^2}\Big)^{k-1}\Big\}$$

pour $k\geq 2$, on a

$$-\big(dd^c\log|s|\big)^r_{|XZ} = c_r(\Theta)+dd^c\psi'$$

avec

$$\psi' = (\log|s|)c_{r-1}(\Theta)+\sum_{k=2}^{r-1}\frac{1}{2(k-1)}\Big(\frac{dd^c|s|^2}{2|s|^2}\Big)^{k-1}\wedge c_{r-k}(\Theta)+\psi\ ,$$

qui est à coefficients dominés par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$.

En combinant avec (5.2) on obtient la conclusion suivante :

(5.10) PROPOSITION. — *Il existe une forme différentielle ψ' à coefficients dominés par $\frac{1}{|s|^{2(r-2)}}$ telle que*

$$[Z] = c_r(\Theta) + \big(dd^c \log |s|\big)^r + dd^c \psi'.$$

Signalons qu'un calcul explicite des formes d'Euler-Green est aussi effectué dans [BGS] et que les formes de Green pour des sous-ensembles analytiques quelconques sont étudiées dans [So].

Chapitre 3

IMAGE INVERSE D'UN COURANT POSITIF FERMÉ PAR UNE APPLICATION ANALYTIQUE SURJECTIVE

1. Cas d'un courant de bidegré $(1,1)$

Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe surjective entre variétés complexes connexes de dimensions respectives $\dim X = n$ et $\dim Y = m$. Pour T un courant positif fermé dans Y de bidegré $(1,1)$ on définit l'image inverse f^*T de la façon suivante.

Soit Ω un ouvert de Y sur lequel $T_{|\Omega} = i\partial\overline{\partial}u$ avec u une fonction plurisousharmonique dans Ω. L'application f étant de rang générique égal à m, la fonction plurisousharmonique $u \circ f$ est, sur toute composante connexe de $f^{-1}(\Omega)$, non identique à $-\infty$ et on définit $(f^*T)_{|f^{-1}(\Omega)} = i\partial\overline{\partial}(u \circ f)$. Si Ω' est un autre ouvert de Y sur lequel on a une écriture analogue $T_{|\Omega'} = i\partial\overline{\partial}u'$, la fonction $u - u'$ est pluriharmonique sur $\Omega \cap \Omega'$ et il en est de même pour $u \circ f - u' \circ f$ sur $f^{-1}(\Omega) \cap f^{-1}(\Omega')$ de sorte que la définition précédente est indépendante du choix de l'ouvert Ω et du potentiel u.

(1.1) Proposition. — *Le courant f^*T est positif fermé et appartient à la classe de cohomologie $f^*\{T\}$.*

Démonstration. — On peut écrire $T = \theta + i\partial\overline{\partial}u$ avec θ une forme $\mathcal{C}^\infty$ de bidegré $(1,1)$ et u une fonction presque plurisousharmonique dans Y. En effet, soit (Ω_α) un recouvrement de Y par des ouverts biholomorphes à une boule et (λ_α) une partition $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité associée. On écrit $T_{|\Omega_\alpha} = i\partial\overline{\partial}u_\alpha$ pour chaque α et on considère $u = \sum_\alpha \lambda_\alpha u_\alpha$. Alors, pour α_0 fixé, $u_{\alpha_0} - u_\alpha$ est pluriharmonique sur $\Omega_{\alpha_0} \cap \Omega_\alpha$ et donc $u_{\alpha_0} - u_{|\Omega_{\alpha_0}} = \sum_\alpha \lambda_\alpha (u_{\alpha_0} - u_\alpha)_{|\Omega_{\alpha_0} \cap \Omega_\alpha}$ est $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω_{α_0} de sorte que $T - i\partial\overline{\partial}u$ l'est aussi.

On a alors $f^*T = f^*\theta + i\partial\overline{\partial}(u \circ f)$. ∎

(1.2) Proposition. — *Pour toute suite de courants positifs fermés T_j convergeant faiblement dans Y vers T, la suite des images inverses f^*T_j converge faiblement dans X vers f^*T.*

Démonstration. — En raisonnant localement, on est amené à considérer le cas d'une application $f : U \to V$ de rang générique m entre des ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^m$. Soit alors χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans V vérifiant $0 \leq \chi \leq 1$ et $\chi \equiv 1$ sur un ouvert $\Omega \subset V$. On note v le potentiel local associé à T, défini par $v = (\chi\sigma_T) * \mathcal{N}$ avec σ_T la mesure $T \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^{m-1}$ et $\mathcal{N}(z) = -\frac{c_m}{|z|^{2m-2}}$, $c_m = \frac{1}{(m-1)(2\pi)^m}$, le noyau de Newton dans $\mathbb{C}^m$.

Alors la suite des potentiels v_j associés aux T_j converge vers v pour la topologie L^1_{loc}. En effet, v_j tend vers v faiblement et il résulte du lemme suivant que l'ensemble des v_j est relativement compact pour la topologie L^1_{loc} :

(1.3) Lemme. — *Pour tout noyau $\mathcal{N}$ localement intégrable dans $\mathbb{R}^k$, l'ensemble des fonctions $\mu * \mathcal{N}$ avec μ une mesure positive à support compact dans $\mathbb{R}^k$ de masse totale inférieure à une constante donnée est relativement compact pour la topologie L^1_{loc}.*

En particulier v_j converge vers v presque partout. L'application f étant de rang générique égal à m, la suite $v_j \circ f$ converge vers $v \circ f$ presque partout dans U.

Par ailleurs, les fonction v_j étant sous-harmoniques négatives, l'inégalité de moyenne implique, r étant fixé, l'existence d'une constante $C>0$ telle que, pour tout z, $v_j(z) \leq C \int_{B(z,r)} v_j d\lambda$ en désignant par $d\lambda$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^m$. On en déduit pour $z \in B(z', r/2)$ l'inégalité $v_j(z) \leq C \int_{B(z',r/2)} v_j d\lambda$ qui entraîne, comme $\overline{\lim} \int_{B(z',r/2)} v_j d\lambda \leq \int_{B(z',r/2)} v \, d\lambda$, que les v_j sont localement uniformément majorées.

Écrivons maintenant $T_{j|\Omega} = i\partial\overline{\partial} v_{j|\Omega} + \gamma_j$ avec des $\gamma_j \in \mathcal{C}^\infty_{1,1}(\Omega)$ qui s'obtiennent à partir des T_j par convolution à l'aide d'un même noyau $\mathcal{C}^\infty$. Ces formes γ_j convergent dans $\mathcal{C}^\infty_{1,1}(\Omega)$ vers $\gamma = (T - i\partial\overline{\partial}v)_{|\Omega}$. Sur une boule $B(z,r) \subset \Omega$ écrivons $\gamma_j = i\partial\overline{\partial} w_j$ respectivement $\gamma = i\partial\overline{\partial} w$ avec w_j respectivement w de classe $\mathcal{C}^\infty$ obtenue en combinant l'opérateur d'homotopie de Poincaré et le noyau de Bochner-Martinelli. Les w_j convergent alors dans $\mathcal{C}^\infty(B(z,r))$ vers w.

Le lemme suivant implique finalement la convergence L^1_{loc} dans $f^{-1}(B(z,r))$ de la suite
$(v_j + w_j) \circ f$ vers $(v + w) \circ f$.

(1.4) Lemme. — *Soit φ_j une suite de fonctions sous-harmoniques définies dans un ouvert connexe de $\mathbb{R}^k$, qui sont localement uniformément majorées. Alors ou bien $\varphi_j \to -\infty$ localement uniformément ou bien il existe une suite qui en est extraite et qui converge pour la topologie L^1_{loc}.* ■

Remarquons enfin que si Z est un diviseur de Y, on a $f^*[Z] = \big[f^{-1}(Z)\big]$ où $f^{-1}(Z)$ désigne le diviseur image inverse. Cette égalité s'obtient en appliquant localement la formule de Poincaré-Lelong.

2. Cas d'une application ouverte

a. Cas d'un morphisme fini.

On considère une application surjective $f : U \to V$ entre des ouverts U et V de $\mathbb{C}^m$ qui est propre et finie. On note Σ le sous-ensemble analytique strict de U formé des points en lesquels le rang de f est strictement inférieur à m et V_0 l'image $f(U$
$\Sigma)$ qui est un ouvert de V.

(2.1) PROPOSITION. — *Pour tout courant positif fermé T dans V, l'image inverse $f^*(T_{|V_0})$ de T dans U*
Σ est de masse finie localement près de Σ.

Démonstration. — Désignant par (p,p) la bidimension de T et par K un compact de U, on a

$$\int_{K\Sigma} f^*\big(T_{|V_0}\big) \wedge \big(i\partial\overline{\partial}|z|^2\big)^p = \int_{f(K\Sigma)} T \wedge f_*\Big\{(i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p_{|U\Sigma}\Big\} .$$

La forme différentielle $f_*\Big\{(i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p_{|U\Sigma}\Big\}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans V_0 est majorée par la restriction à V_0 du courant $f_*\big((i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p\big)$ lui-même majoré par $(i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$ avec $\varphi = f_*(|z|^2)$ qui est une fonction plurisousharmonique continue dans V. L'opérateur de Monge-Ampère $T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$ est bien défini dans V d'après [BT] et l'intégrale du second membre est majorée par $\int_{f(K)} T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$. ■

Pour prolonger $f^*\big(T_{|V_0}\big)$ à travers Σ on va utiliser un potentiel local associé à T. Soit χ une fonction positive $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans V telle que $\chi \equiv 1$ sur un ouvert $\Omega \subset\subset V$. On définit dans $\mathbb{C}^m$ une forme différentielle S de bidegré $(m-p-1, m-p-1)$ par

$$S(z) = -c_m \int_{\mathbb{C}^m} (\chi T)(x) \wedge \frac{(i\partial\overline{\partial}|z-x|^2)^{m-1}}{|z-x|^{2m-2}}$$

le $\partial\overline{\partial}$ étant calculé par rapport à (z,x).

Cette forme est négative, à coefficients L^1_{loc} et $\gamma = (T - i\partial\overline{\partial}S)_{|\Omega}$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour $\varepsilon > 0$, on note

$$S_\varepsilon(z) = -c_m \int_{\mathbb{C}^m} (\chi T)(x) \wedge \frac{(i\partial\overline{\partial}|z-x|^2)^{m-1}}{(|z-x|^2+\varepsilon)^{m-1}} .$$

Les S_ε forment une famille croissante de formes $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent vers S lorsque $\varepsilon \to 0$ et vérifient :

(2.2) LEMME. — *Pour $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ des fonctions plurisousharmoniques localement bornées dans Ω, le produit $S \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi_q$ est bien défini dans Ω comme limite* *faible lorsque* $\varepsilon \to 0$ *des courants* $S_\varepsilon \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge i\partial\overline{\partial}\varphi_q$ (cf. [BMEM] pour l'étude de cet opérateur).

Il en résulte que la forme différentielle f^*S est à coefficients L^1_{loc} dans $f^{-1}(\Omega)$. En effet, avec les notations de (2.1), on a

$$\begin{aligned} -\int_K f^*S \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^{p+1} &= -\int_{K\Sigma} f^*S \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^{p+1} \\ &= -\int_{f(K\Sigma)} S \wedge f_*\Big\{(i\partial\overline{\partial}|z|^2)^{p+1}_{|U\Sigma}\Big\} \\ &\leq -\int_{f(K)} S \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^{p+1} \ . \end{aligned}$$

On définit alors f^*T à l'aide de la relation

$$(f^*T)_{|f^{-1}(\Omega)} = i\partial\overline{\partial}\big\{(f^*S)_{|f^{-1}(\Omega)}\big\} + f^*\gamma \ . \tag{2.3}$$

Considérons une autre fonction $\mathcal{C}^\infty$ positive à support compact dans V identique à 1 sur un autre ouvert $\Omega' \subset\subset V$. Soit S' le potentiel local associé à T construit à partir de cette fonction et $\gamma' = (T - i\partial\overline{\partial}S')_{|\Omega'}$ qui est une forme $\mathcal{C}^\infty$. Alors la restriction de $S - S'$ à $\Omega \cap \Omega'$ est une forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ dont le $i\partial\overline{\partial}$ est $(\gamma' - \gamma)_{|\Omega\cap\Omega'}$ de sorte que les courants $i\partial\overline{\partial}\big\{(f^*S)_{|f^{-1}(\Omega)}\big\} + f^*\gamma$ et $i\partial\overline{\partial}\big\{(f^*S')_{|f^{-1}(\Omega')}\big\} + f^*\gamma'$ coïncident sur $f^{-1}(\Omega) \cap f^{-1}(\Omega')$. La définition précédente est donc indépendante du choix de Ω et de χ.

Vérifions que f^*T est positif. On introduit pour cela les formes différentielles

$$T_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{C}^m} (\chi T)(x) \wedge \Big\{\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\big(|z-x|^2 + \varepsilon\big)\Big\}^m$$

qui sont positives $\mathcal{C}^\infty$ et qui convergent faiblement vers χT. Il s'agit de vérifier que f^*T_ε tend faiblement dans $f^{-1}(\Omega)$ vers f^*T. Or, dans Ω, on peut écrire $T_\varepsilon = i\partial\overline{\partial}S_\varepsilon + \gamma_\varepsilon$ avec γ_ε qui converge dans $\mathcal{C}^\infty_{m-p,m-p}(\Omega)$ vers γ. Les formes $f^*\gamma_\varepsilon$ convergent alors faiblement vers $f^*\gamma$ et le théorème de convergence monotone entraîne par ailleurs la convergence de f^*S_ε vers f^*S pour la topologie L^1_{loc}.

(2.4) Lemme. — *Pour tout compact K de U on a l'inégalité*

$$\int_K f^*T \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p \leq \int_{f(K)} T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p \ .$$

Démonstration. — Pour tout ouvert $\Omega \subset\subset V$ contenant $f(K)$ on a

$$\int_K f^*T \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p \leq \int_{f^{-1}(\Omega)} f^*T \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p \leq \underline{\lim}\int_{f^{-1}(\Omega)} f^*T_\varepsilon \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p \ .$$

Or

$$\int_{f^{-1}(\Omega)} f^*T_\varepsilon \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p = \int_\Omega T_\varepsilon \wedge f_*(i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p \leq \int_\Omega T_\varepsilon \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$$

et, comme φ est continue, les $T_\varepsilon \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$ convergent faiblement vers $T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p$ donc

$$\int_K f^*T \wedge (i\partial\overline{\partial}|z|^2)^p \leq \int_\Omega T \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^p \ .$$

Faisant décroître Ω vers K, on obtient l'inégalité annoncée. ■

Enfin, il reste à montrer que la définition (2.3) est indépendante du choix des coordonnées. Pour cela, il faudrait vérifier que si (T_j) est une suite de courants positifs fermés qui converge faiblement vers T, la suite des images inverses f^*T_j converge faiblement vers f^*T.

b. Cas général.

Considérons maintenant $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe surjective entre des variétés complexes connexes de dimensions respectives $\dim X = n$ et $\dim Y = m$ telle que pour tout $y \in Y$ la dimension de la fibre $f^{-1}(y)$ est $n - m$. Soit Σ le sous-ensemble analytique strict de X formé des points en lesquels le rang de f est strictement inférieur à m et Y_0 l'image $f(X$
$\Sigma)$ qui est un ouvert de Y.

(2.5) Proposition. — *Pour tout courant positif fermé T dans Y, l'image inverse $f^*(T_{|Y_0})$ est de masse finie localement près de Σ.*

Démonstration. — L'hypothèse faite sur la dimension des fibres de f signifie que f est ouverte. Il suffit de considérer le cas d'une application $f : U \longrightarrow V$ surjective et ouverte entre des ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^m$. On suppose alors $0 \in U$ et on considère un système de coordonnées $z = (z', z'')$ dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ ayant la propriété suivante : il existe des boules $B' \subset \mathbb{C}^{n-m}$ et $B'' \subset \mathbb{C}^m$ centrées en 0 telles que pour tout $z' \in B'$, la restriction de f à $z' \times B''$ est propre, finie et surjective à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{C}^m$. L'image inverse par $f_{|z' \times B''}$ de la restriction de T à cet ouvert est alors bien définie. On la note $(f^*T)_{|z' \times B''}$. Le lemme (2.4) et l'inégalité de Chern-Levine-Nirenberg entraînent, pour $K' \subset B'$ et $K'' \subset B''$ des compacts, que la fonction $\int_{K''} (f^*T)_{|z' \times B''} \wedge (i\partial\overline{\partial}|z''|^2)^p$ est majorée pour $z' \in K'$. La convergence de l'intégrale $\int_{K'} (i\partial\overline{\partial}|z'|^2)^{n-m} \int_{K''} (f^*T)_{|z' \times B''} \wedge (i\partial\overline{\partial}|z''|^2)^p$ entraîne alors celle de $\int_{K' \times K'' \Sigma} f^*(T_{|V_0}) \wedge (i\partial\overline{\partial}|z'|^2)^{n-m} \wedge (i\partial\overline{\partial}|z''|^2)^p$.

Enfin la propriété vérifiée par le système de coordonnées (z', z'') reste vraie après perturbation. On conclut en considérant suffisamment de systèmes de coordonnées $(z_1^\alpha, \ldots, z_{n-m}^\alpha,\ z_{n-m+1}^\alpha, \ldots, z_n^\alpha)$ ayant cette propriété et tels que les $idz_1^\alpha \wedge d\bar{z}_1^\alpha \wedge \cdots \wedge idz_{n-m}^\alpha \wedge d\bar{z}_{n-m}^\alpha$ respectivement les $\Big(\sum_{n-m<j\leq n} idz_j^\alpha \wedge d\bar{z}_j^\alpha\Big)^p$ engendrent toutes les formes de bidegré $(n-m, n-m)$ respectivement de bidegré (p,p). ■

On étend $f^*(T_{|V_0})$ à U par un courant noté f^*T vérifiant, u étant une fonction continue à support compact dans $B' \times B''$, la relation

$$\int_{B' \times B''} f^*T \wedge u(z', z'')(i\partial\overline{\partial}|z'|^2)^{n-m} \wedge (i\partial\overline{\partial}|z''|^2)^p$$

$$= \int_{B'} (i\partial\overline{\partial}|z'|^2)^{n-m} \int_{B''} (f^*T)_{|z'\times B''} \wedge u(z',z'')(i\partial\overline{\partial}|z''|^2)^p$$

pour chacun des systèmes de coordonnées précédents.

Mais il reste là aussi à vérifier que cette définition est indépendante des choix qui sont faits.

3. Cas d'un éclatement

Tous les éclatements ayant le même modèle local, il suffit de considérer le cas de l'éclatement du polydisque unité $D^m \subset \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{m-k}$ le long de $D^k = D^k \times \{0\}$.

Pour un point $z \in \mathbb{C}^m$ on désigne par z' et z'' ses projections sur $\mathbb{C}^k$ et $\mathbb{C}^{m-k}$. Soit $X = \big\{(z,[\xi]) \in D^m \times \mathbb{P}_{m-k-1},\ z'' \text{ et } \xi \text{ colinéaires}\big\}$, $\mu : X \longrightarrow D^m$ la projection sur le premier facteur, $E = D^k \times \mathbb{P}_{m-k-1}$ le diviseur exceptionnel et ω la restriction à X de $i\partial\overline{\partial}|z|^2 + i\partial\overline{\partial}\log|\xi|$. La restriction X
$E \xrightarrow{\mu} D^m$
D^k est un biholomorphisme dont l'inverse est l'application $z \longrightarrow (z,[z''])$.

Pour T un courant positif fermé de bidimension (p,p) dans D^m, la question est de savoir si l'image inverse $\mu^*(T_{|D^m D^k})$ est de masse finie au voisinage de tout point de E. Soit $z'_0 \in D^k$ et $r > 0$ tel que l'adhérence de $D_{z'_0,r} = z'_0 + D^m_r$ soit contenue dans D^m. Alors $\mu^{-1}(D_{z'_0,r})$ est relativement compact dans X et

$$\int_{\mu^{-1}(D_{z'_0,r})E} \mu^*(T_{|D^m D^k}) \wedge \omega^p = \int_{D_{z'_0,r}D^k} T \wedge \mu_*\omega^p\ .$$

Dans D^m
D^k on a $\mu_*\omega = i\partial\overline{\partial}|z|^2 + i\partial\overline{\partial}\log|z''|$. Par ailleurs on peut après translation supposer $z'_0 = 0$ de sorte qu'on est ramené à étudier la convergence de l'intégrale

$$(*) \qquad \int_{D^m_r D^k} T \wedge \big(i\partial\overline{\partial}|z|^2 + i\partial\overline{\partial}\log|z''|\big)^p\ .$$

a. Cas où $p = m-1$.

Le produit $T \wedge (i\partial\overline{\partial}\log|z''|)^j$ est alors bien défini d'après la théorie des opérateurs de Monge-Ampère pour tout $j \le m-1-k$. D'autre part, pour $j \ge m-k$, on a $(i\partial\overline{\partial}\log|z''|)^j = 0$ si $|z''| \ne 0$. Il y a donc convergence.

b. Cas où T est le courant associé à un ensemble analytique irréductible A non contenu dans D^k.

Le courant $\mu^*(T_{|D^m D^k})$ est alors la restriction à X
E du courant d'intégration associé à la transformée stricte $\overline{\mu^{-1}(AD^k)} = \overline{\mu^{-1}(A)E}$ qui

est un sous-ensemble analytique de X de dimension p. Ceci implique directement la convergence de l'intégrale $\int_{\mu^{-1}(D_r^m)E}\mu^*(T_{|D^mD^k})\wedge\omega^p$.

c. Exemple où l'intégrale $(*)$ *diverge dans le cas où* $k\leq p\leq m-2$.

On s'est inspiré d'un exemple d'opérateur de Monge-Ampère de masse infinie donné dans [Kis2]. Pour $0<a<1$ on considère la fonction $u_a(z)=(|z'|^2-1)(-\log|z''|)^a$.

Vérifions que u_a est plurisousharmonique dans un voisinage de 0 (dépendant de a). On écrit pour cela $u_a(z)=g_a\big(\log|z'|,\log|z''|\big)$ avec $g_a(t_1,t_2)=(e^{2t_1}-1)(-t_2)^a$. Pour t_1 et t_2 négatifs, g_a est croissante par rapport à chaque variable et pour vérifier qu'elle est convexe pour t_1 et t_2 dans un voisinage de $-\infty$, considérons son hessien

$$\begin{pmatrix} 4e^{2t_1}(-t_2)^a & -2ae^{2t_1}(-t_2)^{a-1}\\ -2ae^{2t_1}(-t_2)^{a-1} & -a(1-a)(e^{2t_1}-1)(-t_2)^{a-2}\end{pmatrix}=e^{2t_1}(-t_2)^{a-2}\begin{pmatrix}4t_2^2 & 2at_2\\ 2at_2 & a(1-a)(e^{-2t_1}-1)\end{pmatrix}.$$

La trace de la seconde matrice est $4t_2^2+4at_2+a(1-a)(e^{-2t_1}-1)$ et son déterminant est $4a(1-a)(e^{-2t_1}-1)t_2^2-4a^2t_2^2=4a\big((1-a)e^{-2t_1}-1\big)t_2^2$. Ils sont bien tous deux strictement positifs pour t_1 et t_2 tendant vers $-\infty$.

Calculons le hessien de u_a :

$$i\partial\overline{\partial}u_a=\big(i\partial\overline{\partial}|z'|^2\big)\big(-\log|z''|\big)^a-i\overline{\partial}|z'|^2\wedge\partial(-\log|z''|)^a+i\partial|z'|^2\wedge\overline{\partial}\big(-\log|z''|\big)^a+\big(|z'|^2-1\big)i\partial\overline{\partial}\big(-\log|z''|\big)^a$$

avec

$$\partial\big(-\log|z''|\big)^a=-a\big(-\log|z''|\big)^{a-1}\partial\log|z''|$$

et

$$i\partial\overline{\partial}\big(-\log|z''|\big)^a=-a\big(-\log|z''|\big)^{a-1}i\partial\overline{\partial}\log|z''|-a(1-a)\big(-\log|z''|\big)^{a-2}i\partial\log|z''|\wedge\overline{\partial}\log|z''|.$$

Considérons maintenant le courant $T=(i\partial\overline{\partial}u_a)^2\wedge\big(i\partial\overline{\partial}\log|z''|\big)^{m-p-2}$ qui est bien défini à l'aide de la théorie des opérateurs de Monge-Ampère puisque $p\geq k$. Soit $r>0$ un nombre réel assez petit. On a

$$\int_{\substack{|z'|<r\\ 0<|z''|<r}}T\wedge\big(i\partial\overline{\partial}|z|^2+i\partial\overline{\partial}\log|z''|\big)^p \geq\binom{p}{k-1}\int_{\substack{|z'|<r\\ 0<|z''|<r}}T\wedge\big(i\partial\overline{\partial}|z'|^2\big)^{k-1}\wedge\big(i\partial\overline{\partial}\log|z''|\big)^{p-k+1}.$$

La dernière intégrale qui s'écrit aussi

$$\int_{\substack{|z'|<r\\ 0<|z''|<r}}(i\partial\overline{\partial}u_a)^2\wedge\big(i\partial\overline{\partial}|z'|^2\big)^{k-1}\wedge\big(i\partial\overline{\partial}\log|z''|\big)^{m-k-1}$$

se calcule en développant $(i\partial\overline{\partial}u_a)^2$. Les seuls termes du développement qui contribuent à l'intégrale sont $2\big(i\partial\overline{\partial}|z'|^2\big)\big(-\log|z''|\big)^a\wedge\big(|z'|^2-1\big)i\partial\overline{\partial}\big(-\log|z''|\big)^a$ et $-2i\overline{\partial}|z'|^2\wedge\partial\big(-$

$\log|z''|\big)^a \wedge i\partial|z'|^2 \wedge \overline{\partial}\big(-\log|z''|\big)^a$. On trouve donc

$$\Big\{\int_{|z'|<r} 2a(a-1)\big(|z'|^2-1\big)\big(i\partial\overline{\partial}|z'|^2\big)^k - 2a^2 i\partial|z'|^2 \wedge \overline{\partial}|z'|^2 \wedge \big(i\partial\overline{\partial}|z'|^2\big)^{k-1}\Big\}$$
$$\times\Big\{\int_{0<|z"|<r}\big(-\log|z''|\big)^{2a-2} i\partial\log|z''| \wedge \overline{\partial}\log|z''| \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\log|z''|\big)^{m-k-1}\Big\}.$$

L'intégrale du premier facteur est > 0 et celle du second qui est proportionnelle à

$$\int_{0<|z''|<r} \frac{\big(-\log|z''|\big)^{2a-2}}{|z''|^{2(m-k)}}\big(i\partial\overline{\partial}|z''|^2\big)^{m-k}$$

est infinie si $a \geq \frac{1}{2}$.

4. Nombres de Lelong d'une image inverse

Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre variétés complexes.

(4.1) Proposition. — *On désigne par $\Gamma \subset X \times Y$ le graphe de f et par pr_1 et pr_2 les projections de $X \times Y$ respectivement sur X et Y.*

i) Pour tout courant T dans X, le produit $[\Gamma] \wedge pr_1^* T$ est bien défini et lorsque $f_{|\,\mathrm{supp}\,T}$ est propre, on a $f_* T = pr_{2*}\big([\Gamma] \wedge {pr_1}^* T\big)$.

ii) Pour toute forme différentielle θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Y, on a $f^*\theta = pr_{1*}\big([\Gamma] \wedge {pr_2}^*\theta\big)$.

Démonstration.

i) On a $\Gamma = g(X)$ avec $g : X \to X \times Y$ définies par $g(x) = (x, f(x))$. Autrement dit $[\Gamma] = g_* 1$ ce qui permet d'écrire

$$[\Gamma] \wedge {pr_1}^* T = g_*(g^* {pr_1}^* T) = g_* T\ .$$

Maintenant si $f_{|\,\mathrm{supp}\,T}$ est propre, la restriction de pr_2 à $\Gamma \cap (\mathrm{supp}\,T \times Y)$ l'est aussi et on peut donc calculer

$$pr_{2*}\big([\Gamma] \wedge {pr_1}^* T\big) = pr_{2*} g_* T = f_* T\ .$$

ii) Cette formule s'obtient par dualité à l'aide de celle de *i)*. ∎

Soit maintenant $f : U \to V$ une application holomorphe entre des ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^m$ et T un courant positif fermé dans V.

(4.2) Proposition. — *Supposons qu'il existe une suite (θ_j) de formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ positives fermées convergeant vers T telle que $(f^*\theta_j)$ possède une limite notée f^*T. Alors* *i) le courant* $[\Gamma] \wedge pr_2{}^*T$ *est bien défini comme limite de la suite des* $[\Gamma] \wedge pr_2{}^*\theta_j$ *et la relation* $f^*T = pr_{1*}\big([\Gamma] \wedge pr_2{}^*T\big)$ *est vérifiée.*

ii) On a l'inégalité entre nombres de Lelong $\nu(f^*T, x) \geq \nu(T, f(x))$ *en tout point* x *de* U.

Démonstration.

i) On a $[\Gamma] \wedge pr_2{}^*\theta_j = g_*(g^*pr_2{}^*\theta_j) = g_*f^*\theta_j$ qui converge vers g_*f^*T.

ii) L'application $pr_{1|\Gamma} : \Gamma \to U$ étant un biholomorphisme on a d'abord l'égalité $\nu(f^*T, x) = \nu\big([\Gamma] \wedge pr_2{}^*T, g(x)\big)$. Ensuite on écrit $[\Gamma] = (dd^c u)^m$ en notant $u(z, y)$ la fonction $\log|f(z) - y|$ et on applique l'inégalité rappelée dans le § 3 du chapitre 0. On obtient $\nu(f^*T, x) \geq \nu(u, g(x))^m \nu(pr_2{}^*T, g(x))$. Or $\nu(u, g(x)) = 1$ et les nombres de Lelong sont conservés par submersion (cf. chap. 2, § 2) donc $\nu\big(pr_2{}^*T, g(x)\big) = \nu\big(T, f(x)\big)$. ■

Pour les courants de bidegré (1,1), l'inégalité *ii)* de (4.2) figure dans [Kis1] sous la forme $\nu\big(u \circ f, x\big) \geq \nu\big(u, f(x)\big)$ avec u une fonction plurisousharmonique.

Supposons f surjective, propre et finie et U connexe. f est un revêtement ramifié dont on note s le degré. La relation $f_*(f^*T) = (f_*1)T = sT$ et les résultats de [De1] et [De4] entraînent alors l'inégalité

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu_p(f, x)\nu(f^*T, x) \leq s\nu(T, y)$$

où $\mu_p(f, x) = \nu\big((dd^c \log|f - y|)^p, x\big)$. Ces multiplicités sont en fait des entiers non nuls et on a donc

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \nu(f^*T, x) \leq s\nu(T, y)\ .$$

Supposons maintenant f surjective et ouverte. Considérant un point x dans U et la tranche de f^*T sur un sous-espace affine générique de dimension m passant par x, on déduit de l'inégalité précédente que $\nu(f^*T, x) \leq \mu_m(f, x)\nu(T, f(x))$.

Bibliographie

[BT] Bedford E., Taylor B.A. — *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Mathematica **149** (1982), 1–41.

[BMEM] Ben Messaoud H., El Mir H. — *Opérateur de Monge-Ampère et formule de tranchage pour un courant positif fermé*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Série I, tome **321** (1995), 277–282.

[BGS] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C. — *Complex immersions and Arakelov geometry*, The Grothendieck Festschrift, Volume I, Progress in Mathematics **86** , Birkhäuser (1990), 249–331.

[Bo] Bott R. — *Homogeneous vector bundles*, Annals of Mathematics **66** (1957), 203–248.

[BC1] Bott R., Chern S.-S. — *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections*, Acta Mathematica **114** (1965), 71–112.

[BC2] Bott R., Chern S.-S. — *Some formulas related to complex transgression*, Essays on topology and related topics, Mémoires dédiés à G. de Rham, Springer Verlag (1970), 48–57.

[De1] Demailly J.-P. — *Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé*, Annales de l'Institut Fourier **32** (1982), 37–66.

[De2] Demailly J.-P. — *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité*, Acta Mathematica **159** (1987), 153–169.

[De3] Demailly J.-P. — *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, Journal of Algebraic Geometry **1** (1992), 361–409.

[De4] Demailly J.-P. — *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*, Complex analysis and geometry, The University Series in Mathematics, Plenum Press (1993), 115–193.

[De5] Demailly J.-P. — *Regularization of closed positive currents of type* $(1,1)$ *by the flow of a Chern connection*, Contributions to complex analysis and analytic geometry dedicated to P. Dolbeault, Aspects of Mathematics E **26**, Vieweg (1994), 105–126.

[EM] El Mir H. — *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Mathematica **153** (1984), 1–45.

[Fe] Federer H. — *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **153**, Springer Verlag, 1969.

[Fl] Flanders H. — *Development of an extended exterior differential calculus*, Transactions of the American Mathematical Society **75** (1953), 311–326.

[FS] Fornaess J.E., Sibony N. — *Oka's inequality for currents and applications*, à paraître.

[GGG] Gelfand I.M., Gindikin S.G., Graev M.I. — *Integral geometry in affine and projective spaces*, Journal of Soviet Mathematics **18** (1980), 39–167.

[GGS] Gelfand I.M., Graev M.I., Shapiro Z.Ya. — *Differential forms and integral geometry*, Functional Analysis and its Applications **3** (1969), 101–114.

[Gr] Grinberg E.L. — *On images of Radon transforms*, Duke Mathematical Journal **52** (1985), 939–972.

[HS] Harvey R., Shiffman B. — *A characterization of holomorphic chains*, Annals of Mathematics **99** (1974), 553–587.

[He1] Helgason S. — *The Radon transform on euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds*, Acta Mathematica **113** (1965), 153–180.

[He2] HELGASON S. — *The Radon transform*, Progress in Mathematics **5**, Birkhäuser, 1980.

[Kin] KING J.R. — *A residue formula for complex subvarieties*, Proceedings of the Carolina conference on holomorphic mappings and minimal surfaces, University of North Carolina, Chapel Hill (1970), 43–56.

[Kis1] KISELMAN C.O. — *Stabilité du nombre de Lelong par restriction à une sous-variété*, Colloque de Wimereux sur les fonctions plurisousharmoniques en dimension finie ou infinie organisé en l'honneur de P. Lelong, Lecture Notes in Mathematics **919**, Springer Verlag (1982), 324–336.

[Kis2] KISELMAN C.O. — *Sur la définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe*, Analyse Complexe, Proceedings of the Journées Fermat - Journées SMF held at Toulouse, 1983, Lecture Notes in Mathematics **1094**, Springer Verlag (1984), 139–150.

[KM] KOLLÁR J., MATSUSAKA T. — *Riemann-Roch type inequalities*, American Journal of Mathematics **105** (1983), 229–252.

[Le1] LELONG P. — *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bulletin de la Société Mathématique de France **85** (1957), 239–262.

[Le2] LELONG P. — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, 6ème session, été 1967, Presses Universitaires de Montréal, 1968.

[Sib] SIBONY N. — *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Mathematical Journal **52** (1985), 157–197.

[Siu1] SIU Y.-T. — *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Inventiones Mathematicae **27** (1974), 53–156.

[Siu2] SIU Y.-T. — *Extension of meromorphic maps into Kähler manifolds*, Annals of Mathematics **102** (1975), 421–462.

[Sk1] SKODA H. — *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bulletin de la Société Mathématique de France **100** (1972), 353–408.

[Sk2] SKODA H. — *Prolongement des courants positifs fermés de masse finie*, Inventiones Mathematicae **66** (1982), 361–376.

[So] SOULÉ C. — *Lectures on Arakelov geometry*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **33**, Cambridge University Press, 1992.

[Th] THIE P. — *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Mathematische Annalen **172** (1967), 269–312.

– ◇ –

Institut Fourier
B.P.74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex
(France)

(11 janvier 1996)