Thèse de Doctorat de Troisième Cycle
Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Densité des fonctions holomorphes irréductibles sur une variété de Stein

Fatma-Zohra MENARI

Préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques associé au C.N.R.S. (LA 188)

Soutenue le mercredi 24 mai 1989 devant la commission d'examen

Président : Alain DUFRESNOY
Examinateurs : Gérard BESSON, Jean-Pierre DEMAILLY (Directeur)

à mes parents

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Jean-Pierre Demailly qui m'a permis de mener à bien ce travail, grâce à ses encouragements et ses fructueux conseils. Je lui dois beaucoup plus que de simples remerciements pour sa grande disponibilité et la patience qu'il m'a toujours témoignée.

Je remercie également Monsieur Alain Dufresnoy qui n'a pas ménagé ses efforts pour m'apporter son soutien et a aimablement accepté de présider le jury, ainsi que monsieur Gérard Besson qui a accepté d'en faire partie.

Madame Arlette Guttin-Lombard a assuré avec beaucoup de gentillesse l'impression de ce travail, et messieurs René Bontron et Jean-Paul Girard ont réalisé le tirage. Je les en remercie vivement.

J'associe enfin à ces remerciements tous les membres du laboratoire, ma famille, ainsi que toutes mes amies de Grenoble pour leur soutien, et l'ambiance sympathique que j'ai ressentie autour de moi.

Résumé

Etant donné une variété de Stein X, connexe, de dimension $n \geq 2$, on se propose de montrer que l'ensemble des fonctions holomorphes sur X, ayant un diviseur irréductible, est dense dans certains espaces à poids. La méthode utilisée permet en fait de construire des hypersurfaces ayant un lieu singulier donné, avec contrôle précis de la croissance. Le résultat obtenu s'étend aux sections d'un fibré linéaire holomorphe et hermitien.

Abstract

Given a connected Stein manifold X of dimension $n \geq 2$, it is proved that the set of holomorphic functions on X which have an irreducible divisor, is dense in certain Fréchet spaces.

The method used here permits in fact the construction of hypersurfaces having preassigned singularities with a precise control of growth. The result obtained extends to sections of a holomorphic hermitian line bundle.

Mots-clés : Approximation d'Oka-Weil, Diviseurs irréductibles, Singularités d'hypersurfaces, Variétés de Stein.

Mathematical subject classification : 32E10, 32E30

Introduction

L'objet du présent travail est de généraliser au cas d'une variété de Stein (connexe, de dimension $n \geq 2$), un résultat de densité des fonctions holomorphes irréductibles dans certains espaces de Fréchet avec poids, obtenu par J.-P. Demailly dans $\mathbb{C}^n$ [2].

On commence par montrer, à partir des estimations L^2 classiques de Hörmander, l'existence de fonctions holomorphes avec contrôle précis de la croissance, puis à l'aide d'un théorème d'approximation de type Oka-Weil (Prop. 1.4, ch. II), et d'un théorème inspiré des résultats classiques de Whitney (Th. 2.4, ch. II) on arrive à construire une fonction F holomorphe sur X ayant les propriétés suivantes :

- sa croissance est contrôlée uniformément par rapport aux données,
- l'ensemble des zéros $Z_F = F^{-1}(0)$ forme une hypersurface partout lisse sur X , et l'une au moins de ses composantes connexes contient des points z_j fixés (Prop. 2.1, chap. II).

Ce résultat sera essentiellement utilisé pour démontrer notre théorème principal au chapitre III :

Théorème. – *Il existe un poids Φ sur X tel que les propriétés suivantes soient vraies* : *si S est un ensemble analytique de X, de codimension ≥ 2 en tout point, défini par les équations*

$$f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0, \quad \textit{où } f_j \in \mathcal{O}(X)$$

alors il existe des fonctions $g_1, \ldots, g_k$ dans l'espace de Fréchet E_Φ des fonctions holomorphes sur X, telles que les semi-normes $p_i(g) = \sup_{z \in X} |g(z)| e^{-\frac{1}{i}\Phi(z)}$, $i = 1, 2, \ldots$ soient finies, vérifiant

(1) *la fonction $F = \sum_{1 \leq j \leq k} f_j g_j$ est irréductible,*

(2) *l'hypersurface Z_F définie par l'équation $F = 0$ a son lieu singulier contenu dans S.*

L'idée de la démonstration consiste à construire deux familles d'ouverts U_p et V_p denses dans E^k_Φ, telles que U_p est formé de fonctions ayant un diviseur lisse sur un "grand" compact de $X \setminus S$, et V_p de fonctions ayant un diviseur irréductible sur un "grand" compact de X. Par le théorème de Baire, $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} (U_p \cap V_p)$ sera dense, c'est-à-dire que les $k$uplets de fonctions $(g_1, \ldots, g_k) \in E^k_\Phi$ satisfaisant aux conclusions (1) et (2) du théorème constitueront un G_δ dense dans E^k_Φ . En conséquence, on obtient la densité des fonctions holomorphes irréductibles appartenant à E_Φ dans tout espace à poids E_Ψ avec $\Psi \geq \Phi$.

Pour terminer notre travail, on montre que ce résultat s'étend au cas des sections d'un fibré linéaire holomorphe et hermitien.

Bibliographie

[1] Cartan, H. – *Cours de calcul différentiel*, Paris, Hermann, 1979

[2] Demailly, J.-P. – *Construction d'hypersurfaces irréductibles avec lieu singulier donné dans* $\mathbb{C}^n$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **30** (Fasc. 3) (1980), 219–236.

[3] Hervé, M. – *Fonctions de plusieurs variables complexes, ensembles analytiques*, Fac. des Sciences de Paris, 1966.

[4] Hörmander, L. – *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland/American Elsevier, 1973.