Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Surfaces algébriques hyperboliques, propriétés de négativité de la courbure

Jawher El Goul

préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques, UMR 5582 du CNRS-UJF

soutenue le mercredi 29 octobre 1997 devant le jury :

Jean-Pierre Demailly (Université Joseph Fourier), directeur
Gerd Dethloff (Université de Brest)
Siegmund Kosarew (Université Joseph Fourier)
Mireille Martin-Deschamps (CNRS, ENS Ulm)
Mikhail Zaidenberg (Université Joseph Fourier)

au vu des rapports de :

Gerd Dethloff (Université de Brest) et Yum-Tong Siu (Harvard)

À ma fille Eya

Jean-Pierre Demailly m'a fait un grand honneur de m'avoir aimablement accueilli au sein de son groupe de recherche, guidé et encouragé tout au long des années de ma thèse. Ainsi, j'ai pu côtoyer, avec grand intérêt, sa compétence et sa large connaissance dans le domaine des mathématiques en général et la géométrie algébrique et analytique en particulier. La qualité et la lucidité de son enseignement et de ses exposés m'ont beaucoup appris. Sa rigueur mathématique et sa disponibilité constante m'ont beaucoup apporté. Qu'il trouve ici l'expression ' de ma grande gratitude et de mes remerciements les plus sincères.

Gerd Dethloff et Yum Tong Siu m'ont fait beaucoup d'honneur en acceptant de rapporter sur ma thèse. Je tiens à leurs exprimer mes vifs remerciements.

Je suis également très honoré par la participation à ce jury de Mireille Martin-Deschamps. Je la remercie sincèrement.

Je remercie Siegmund Kosarew et Mikhail Zaidenberg qui m'ont initié, par la clarté de leurs cours, aux éléments de la géométrie hyperbolique. Leur participation à ce jury me fait honneur et grand plaisir.

Je souhaite également remercier Arlette Guttin-Lombard pour sa gentillesse et la patience avec laquelle elle a saisi ce texte.

Mes remerciements vont aussi à mes camarades de travail, parmi lesquels Lahcène Haddak, Laurence Coudurier, Pan Feng et Yacine Rebahi.

Je n'aurais jamais terminé ce travail sans la chaleur et le réconfort que m'a apportés Faten. Je la remercie particulièrement pour avoir enrichi ma vie avec sa présence.

Enfin, je tiens à remercier chaleureusement mes parents, ainsi que toute ma famille (j'ai une pensée particulière pour mon frère Hassen) pour l'amour qu'ils m'ont toujours apporté. Qu'ils trouvent ici le témoignage de toute ma gratitude et ma profonde affection.

SOMMAIRE

INTRODUCTION ET PLAN DE LA THÈSE

INTRODUCTION ET PLAN DE LA THÈSE

Le thème central de cette thèse est l'étude de certaines propriétés de négativité de courbure des surfaces algébriques hyperboliques au sens de Kobayashi. La notion d'hyperbolicité (au sens de Kobayashi) est équivalente, dans le cas d'une variété complexe compacte X, à l'absence de courbes holomorphes entières non constantes $f : \mathbb{C} \to X$ (critère de Brody).

Un cadre commode pour notre étude sera la catégorie des "variétés dirigées", c'est à dire la catégorie des paires (X, V) où X est une variété complexe et V un sous fibré vectoriel holomorphe de T_X. On dispose d'une notion d'hyperbolicité "relative" pour les variétés dirigées: si X est compacte, la paire (X, V) est hyperbolique si et seulement si toute courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V est constante.

Une construction récente, due à J.-P. Demailly, de fibrés de k-jets de courbes $X_k = P_k V$, permet d'analyser l'hyperbolicité en termes de négativité de courbure. Le fibré $\pi_k : X_k \to X$ est une tour de fibrés projectifs sur X et il est muni d'un fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{X_k}(1)$. L' hyperbolicité de X est alors conjecturalement équivalente, d'après J.-P. Demailly, à l'existence d'une métrique hermitienne singulière convenable à courbure négative (dans un sens assez faible) sur $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ pour k assez grand.

Les images directes $(\pi_k)_\star \mathcal{O}_{X_k}(m)$ peuvent être vues comme des fibrés vectoriels de jets de différentielles invariantes, c'est à dire d'opérateurs différentiels d'ordre k et de degré m, agissant sur les germes de courbes holomorphes dans X tangents à V et invariants par reparamétrage. Lorsque $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ admet une métrique (éventuellement singulière) à coubure négative, J.-P. Demailly a montré que la relevée dans X_k de toute courbe holomorphe non constante $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V doit être contenue dans l'ensemble base de la métrique. Ce résultat, qui utilise un lemme-clé de type lemme d'Ahlfors-Schwarz, affine et précise une approche initiée par Green et Griffiths il y a une vingtaine d'années [Gre75, GG80].

L'étude que nous avons faite est divisée en deux parties: dans un premier temps (chapitre II), nous introduisons la notion de connexion projective partielle à coefficients méromorphes, et montrons comment de telles connexions peuvent servir à construire des opérateurs Wronskiens globaux agissant sur les jets de courbes holomorphes (un type très particulier de jets de différentielles invariantes). Grâce à un théorème d'annulation du Wronskien reposant sur des hypothèses de négativité de la courbure de Ricci et généralisant des résultats antérieurs de

Green-Griffiths, Siu et Nadel, nous donnons des exemples explicites de familles algébriques de surfaces hyperboliques dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, de degré quelconque ≥ 11. Ceci illustre une (toute petite) partie d'une conjecture célèbre de S. Kobayashi, qui prévoit qu'une hypersurface générique de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ degré d assez grand (par rapport à n) est hyperbolique.

Dans un deuxième temps (chapitre III), nous montrons la presque amplitude au sens de Miyaoka du fibré cotangent à toute surface de type général X fibrée sur une courbe de genre supérieur ou égal à deux, et qui admet au moins une fibre singulière. Nous introduisons, à cet effet, une notion qui généralise la presque amplitude au sens de Miyaoka au cas d'une variété complexe compacte dirigée (X, V) quelconque, et nous montrons que cette propriété implique, si on suppose que (X, V) n'admet pas de courbes rationnelles ou elliptiques tangentes à V, l'existence d'une bonne métrique singulière sur $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ à courbure négative le long de V_k. Comme application, nous obtenons une réponse positive à la conjecture de Demailly (citée plus haut) dans le cas d'une surface hyperbolique fibrant sur une courbe de genre au moins deux, et dans le cas d'une surface hyperbolique vérifiant $c_1^2 > 2c_2$. Ces résultats sont obtenus grâce à une étude algébro-géométrique qui nous permet de construire des sections globales des fibrés en droites tautologiques associés aux espaces des jets. Les techniques que nous utilisons sont assez variées, et combinent des outils algébriques tels que des théorèmes de rigidité et d'additivité des dimensions de Kodaira-Iitaka, et des outils analytiques de géométrie différentielle complexe: métriques hermitiennes singulières et techniques de recollement de métriques.

Chapitre I: Préliminaires

Le chapitre des préliminaires est une introduction aux principales notions de base utilisées; on donne d'abord un aperçu sur les notions classiques de négativité de courbure. On présente ensuite la notion d'hyperbolicité en précisant les propriétés de la métrique de Kobayashi, le critère fondamental de Brody et les concepts d'hyperbolicité algébrique et de dégénérescence algébrique. On introduit enfin les espaces des jets de Demailly, la notion centrale de négativité pour les fibrés de jets et le lien de cette notion avec l'hyperbolicité. En particulier, par des calculs de type Riemann-Roch, on a essayé de mettre l'accent sur l'importance de ces constructions en liaison avec la conjecture de Green-Griffiths sur la dégénérescence algébrique dans les variétés projectives de type général.

Chapitre II: Connexions méromorphes projectives et

variétés algébriques hyperboliques

Soit X une variété complexe de dimension n. Suivant des idées introduites par Y.T. Siu [Si87] and A. Nadel [Na89], on considère *des connections méromorphes*

$$\nabla_w v = \sum_{1\le i,k\le n} \Big(w_i \frac{\partial v_k}{\partial z_i} + \sum_{1\le j\le n} \Gamma^k_{ij} w_i v_j \Big) \frac{\partial}{\partial z_k} = d_w v + \Gamma\cdot(w,v)$$

agissant sur les champs de vecteurs tangents $w = \sum_i w_i \partial/\partial z_i$, $v = \sum_k v_k \partial/\partial z_k$, avec des *symboles de Christoffel* méromorphes $\Gamma = (\Gamma^k_{ij})_{1\le i,j,k\le n}$. Soit B le diviseur des pôles de ∇ et $b \in H^0(X, \mathcal{O}(B))$ la section canonique correspondante. Étant donné une courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ d'image non contenue dans le support $|B|$ de B, on définit inductivement les dérivées covariantes $f'_\nabla = f'$, $f^{(k+1)}_\nabla = \nabla_{f'}(f^{(k)}_\nabla)$ et on obtient *l'opérateur Wronskien*

$$W_\nabla(f) = f' \wedge f''_\nabla \wedge \cdots \wedge f^{(n)}_\nabla .$$

La section $b(f)^{n(n-1)/2} W_\nabla(f)$ peut être vue comme une section holomorphe à valeurs dans le fibré en droites $f^*\big(K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_X(\frac12 n(n-1)B)\big)$. Notre point de départ est le théorème suivant dû à Y.T. Siu [87]: *si X est compacte et $K_X \otimes \mathcal{O}_X(-\frac12 n(n-1)B)$ est ample, toute courbe holomophe non constante $f : \mathbb{C} \to X$ satisfait $f(\mathbb{C}) \subset |B|$ ou $W_\nabla(f) \equiv 0$.* La démonstration initiale de ce résultat repose sur une généralisation élaborée du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Dans le cas où la courbe f est une courbe de Brody, c'est à dire une courbe entière à dérivée bornée, on donne une démonstration beaucoup plus simple reposant en définitive seulement sur les inégalités de Cauchy. Ce cas est suffisant pour traiter le problème de l'hyperbolicité d'une variété complexe compacte, d'après le théorème de Brody [Br78].

Une observation importante est de voir que pour définir le Wronskien W_∇ on n'a pas besoin de connaître entièrement le tenseur Γ^k_{ij}, mais seulement modulo des tenseurs de la forme $\alpha_i \delta_{jk} + \beta_j \delta_{ik}$. Ceci permet d'étendre le théorème d'annulation du Wronskien au cas des *connexions projectives partielles*, définies comme suit.

Définition . — *Une connexion projective partielle ∇ sur X est une section du faisceau quotient du faisceau des connexions méromorphes modulo l'addition de tenseurs méromorphes de la forme $(w,v) \mapsto \alpha(w)\cdot v + \beta(v)\cdot w$. En d'autres termes, ∇ est définie par la donnée de connexions méromorphes ${}_j\nabla$ sur les ouverts U_j d'un recouvrement de X, en sorte qu'on ait des relations de compatibilité ${}_k\nabla_w v - {}_j\nabla_w v = \alpha_{jk}(w)\cdot v + \beta_{jk}(v)\cdot w$ sur $U_j \cap U_k$.*

Étant donné un polynôme homogène $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_n \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$, on obtient une connexion projective partielle sur $\mathbb{C}^{n+1}$ et sur son quotient $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{n+1}$ $\{0\})/\mathbb{C}^\star$ en résolvant le système linéaire

$$\sum_{0\le k\le n} \Gamma^k_{ij} \frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i \partial z_j}, \qquad 0 \le i,j,\ell \le n.$$

Comme dans le travail de A. Nadel [Na89], la connexion correspondante ∇ est telle que pour tout indice α l'hypersurface $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$ est *totallement géodesique*. Si s est de degré d et s_j est divisible par $z_j^{d-k_j}$, pou un $k_j \ll d$, alors le degré des pôles de ∇ est petit. On notera $S_{d;k_0,\ldots,k_n}$ l'ensemble des polynômes de cette forme. Il résulte de ceci et du théorème d'annulation du Wronskien le résultat suivant

Théorème . — *Soient $d, k_0, \ldots, k_n$ des entiers et $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_n$ un élément de $S_{d;k_0,\ldots,k_n}$ tels que $\delta = \det\big(\partial s_\ell/\partial z_k\big)_{k,\ell} \not\equiv 0$, et $Y := \{s = 0\}$ soit une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Soient enfin $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$ et B le diviseur des pôles de la connexion projective partielle ∇ associée. Supposons $d > n+1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}(n+1+\sum_{i=0}^n k_i)$. Alors, toute courbe entière non constante tracée sur Y est algébriquement dégénérée et vérifie ou bien $f(\mathbb{C}) \subset Y \cap |B|$, ou bien $f(\mathbb{C}) \subset Y \cap Y_\alpha$ pour une certaine hypersurface Y_α distincte de Y.*

Dans le cas particulier de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, considérons la surface

$$(*) \qquad Y = \{z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0\},$$

définie par un élément s de $S_{d;0,0,0,2}$ (on supposera certaines conditions sur les paramètres $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ et ε_2). Lorsque $d > 10$, le théorème précédent montre que toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to Y$ est contenue dans une courbe intersection complète $Y \cap |B|$ ou $Y \cap Y_\alpha$. Grâce à un calcul du genre géométrique des intersections on obtient

Théorème. — *Sous certaines conditions sur les paramètres $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ et ε_2, la surface algébrique $Y \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ définie par $(*)$ est lisse et hyperbolique au sens de Kobayashi, en tout degré $d \geq 11$.*

Le théorème ci-dessus entraîne en fait le résultat plus fort suivant

Théorème. — *Soient d, k_0, k_1, k_2 et k_3 des entiers tels qu'il existe i_0 avec $k_{i_0} \geq 2$. Si $d > 8 + \sum_{i=0}^{3} k_i$, alors l'espace $H_{3,d}$ des surfaces hyperboliques dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ est non vide. De plus, $H_{3,d}$ contient un ouvert de Zariski de $S_{d;k_0,k_1,k_2,k_3}/\mathbb{C}^* \subset P_{3,d}$, de dimension*

$$\sum_{\ell=0}^{3} \binom{k_\ell + 3}{k_\ell} - 1 \ .$$

Chapitre III: Négativité de courbure au sens des jets des surfaces fibrées hyperboliques

On se place dans le cadre des variétés dirigées (X, V), à savoir les variétés

X munies d'un sous-fibré holomorphe $V \subset T_X$ (voir [Dem96]). On définit inductivement le fibré projectivisé X_k des k-jets et le sous-fibré associé $V_k \subset T_{X_k}$ par

$$(X_0, V_0) = (X, V), \quad (X_k, V_k) = (\widetilde{X}_{k-1}, \widetilde{V}_{k-1}),$$

en itérant le procédé suivant : on associe à (X, V) une nouvelle variété dirigée $(\widetilde{X}, \widetilde{V})$ telle que $\widetilde{X} = P(V)$ et $\widetilde{V}$ est le sous-fibré de $T_{\widetilde{X}}$ défini en tout point $(x, [v])$ associé à un vecteur $v \in V_x$
$\{0\}$ par

$$\widetilde{V}_{(x,[v])} = \left\{\xi \in T_{\widetilde{X},(x,[v])} \ ; \ \pi_*\xi \in \mathbb{C}{\cdot}v\right\}, \quad \mathbb{C}{\cdot}v \subset V_x \subset T_{X,x} \ ,$$

où $\pi : \widetilde{X} \to X$ est la projection naturelle et π_* sa différentielle. On définit aussi le sous-fibré tautologique en droites de $\pi_k^* V_{k-1}$ noté $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$, tel que $\mathcal{O}_{X_k}(-1)_{(x,[v])} = \mathbb{C}{\cdot}v$ pour tout $(x, [v]) \in X_k = P(V_{k-1})$.

Une observation importante est que toute courbe holomorphe $f : \Delta_r \to X$ tangente à V peut être relevée d'une façon unique à une courbe $f_{[k]} : \Delta_r \to X_k$ tangente à V_k, appelée relevée de f à l'étage k. On note X_k^{sing} l'hypersurface de X_k constituée des $f_{[k]}(0)$ avec f décrivant les germes singuliers dont le relevé devient régulier à une étape $\leq k-1$.

Grâce à un lemme de type Ahlfors-Schwarz, si (X, V) admet une métrique h_k singulière (au sens de [Dem90']), à courbure négative dans la direction de V_k sur le fibré $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$, alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V est telle que sa relevée $f_{[k]}(\mathbb{C})$ est contenue dans l'ensemble base Σ_{h_k} de h_k . En particulier, si $\Sigma_{h_k} \subset X_k^{\mathrm{sing}}$ (la métrique est dite dans ce cas non dégénérée), alors (X, V) est hyperbolique.

Dans la perspective de la réciproque, J.-P. Demailly a observé qu'étant donné un entier $k \geq 1$ quelconque, il existe une surface algébrique X (dépendant de k), qui est hyperbolique, mais qui n'admet aucune métrique non dégénérée à courbure négative sur les k-jets. La construction de cette surface est la suivante: étant donné deux courbes lisses Γ et Γ' de genre ≥ 2, on construit X en tant que fibration $X \to \Gamma$, avec une fibre singulière C_0 qui a pour normalisation Γ'.

Ce "contre-exemple" suggère l'étude suivante, que nous avons entreprise de manière détaillée dans le chapitre III: Soit X une surface algébrique compacte lisse telle qu'il existe une fibration $f : X \to B$ sur une courbe lisse B de genre ≥ 2 et dont toutes les fibres sont de genre ≥ 2. Existe-t-il pour k assez grand une métrique non dégénérée h_k sur X_k à courbure négative au sens des jets ?

Dans le cas où la fibration est lisse (df partout surjective), il y a une construction très simple d'un métrique lisse à courbure sectionnelle négative sur T_X. On utilise essentiellement les métriques de Poincaré des fibres de f et de la base B, qu'on recolle au moyen d'un scindage et d'un changement d'échelle approprié.

Lorsque la fibration est singulière, on se sert de deux résultats concernant les surfaces fibrées en courbes de genre au moins deux. Le premier, dû à T. Fujita [Fu77], concerne l'additivité des dimensions de Kodaira-Iitaka. Le deuxième est un théorème de rigidité, dû à S.J. Arakelov [Ar71], sur la positivité du faisceau dualisant relatif. Grâce à ces deux resultats combinés, on démontre la presque amplitude au sens de Miyaoka [Mi82] du fibré cotangent T^*_X. Plus précisément, on obtient le

Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration singulière (c'est-à-dire qu'au moins une fibre est singulière), dont les fibres sont des courbes de genre générique au moins deux et dont la base B est une courbe hyperbolique lisse. Alors $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est gros, et la restriction $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\Sigma}$ est encore gros pour toute surface $\Sigma \subset X_1$ telle que $\pi(\Sigma) = X$.*

Dans le cas où les singularités des fibres de f sont à croisements normaux (fibrations dites "stables"), on montre que la restriction de $\mathcal{O}_{X_1}(-1)$ à toute courbe de X_1 est à courbure négative dans la direction de V_1. Ceci et le théorème précédent nous permettent de faire un nombre fini de recollements de métriques singulières et d'obtenir le résultat suivant.

Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration stable en courbes réduites et irréductibles de genre ≥ 2 sur une courbe lisse de genre ≥ 2. Alors, il existe sur $\mathcal{O}_{X_1}(-1)$ une métrique h_1 lisse à courbure négative le long de V_1.*

Pour finir avec le cas d'une fibration singulière quelconque, on a considèré la situation typique d'une variété dirigée (X, V) qui a une propriété de positivité qui généralise la notion de presque amplitude au sens de Miyaoka de la façon suivante.

Définition. — *Soient (X, V) une variété compacte dirigée et n_0 un entier strictement positif. Alors le fibré $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ est dit presque partout gros en dimension $\geq d$, si sa restriction à tout sous-espace analytique irréductible non contenu dans X_k^{sing} et qui se projette sur un sous-espace de dimension $\geq d$ dans X, est gros.*

Grâce à des techniques de recollements de métriques singulières on démontre le résultat suivant (pour rendre possibles ces recollements, on fait une étude géométrique de l'ensemble X_k^{sing} qui nous permet d'introduire un sous-espace analytique beaucoup moins gros et plus facile à manipuler que cet ensemble singulier).

Théorème. — *Soit (X, V) une variété compacte dirigée. Supposons que (X,V) n'admet pas de courbes rationnelles ou elliptiques tangentes à V, que $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ est presque partout gros en dimension ≥ 2 pour un certain $n_0 > 0$. Alors, il existe $k_0 \geq n_0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ possède une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets.*

Comme application des résultats précédents on obtient la réponse positive suivante à la conjecture de Demailly.

Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration à fibres réduites et irréductibles de genre ≥ 2 sur une courbe lisse de genre ≥ 2. Alors, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ possède une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets.*

Grâce à un résultat de Miyaoka [Mi82] sur la presque amplitude du fibré cotangent à une surface minimale de type général d'indice topologique $c_1^2 - 2c_2$

strictement positif, on obtient aussi le

Théorème. — *Soit X une surface hyperbolique telle que $c_1^2 > 2c_2$. Alors, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ possède une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets.*

Chapitre I

PRÉLIMINAIRES

1. Notions de négativité de courbure

1.1. Connexion et forme de courbure de Chern

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur une variété complexe X de dimension n. On munit E d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on note $T_{\mathbb{C}}X$ le complexifié du fibré tangent réel sous-jacent au fibré holomorphe T_X. Une connexion $D : \mathcal{C}^\infty(X, E) \to \mathcal{C}^\infty(X, T_{\mathbb{C}}{}^*X \otimes E)$ sur le fibré hermitien E est dite compatible avec la structure hermitienne h ou tout simplement hermitienne, si pour toutes sections locales e et e' de E,

$$dh(e, e') = \{De, e'\} + \{e, De'\} ,$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ est l'accouplement sesquilinéaire naturel entre les formes à valeurs dans E.

Remarquons qu'on a $T_{\mathbb{C}}X = T_X \oplus \overline{T_X}$, de sorte qu'on peut décomposer une connexion D sur E en deux parties, une de type $(1, 0)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(X, T_X^* \otimes E)$ notée $D^{(1,0)}$ et l'autre de type (0,1) à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(X, \overline{T_X^*} \otimes E)$ notée $D^{(0,1)}$.

Étant donné une connexion D_0 de type (0,1) sur le fibré hermitien holomorphe E, il existe une connexion hermitienne unique D sur E telle que $D^{(0,1)} = D_0$. Ceci motive la définition suivante :

1.1.1. Définition. — *L'unique connexion hermitienne sur le fibré holomorphe hermitien E telle que $D^{(0,1)} = \overline{\partial}_E$ est appelée la connexion de Chern de E; son tenseur de courbure sera noté $\Theta_h(E)$.*

Le tenseur de courbure de Chern est tel que $i\,\Theta_h(E)$ est une (1,1)-forme sur X à valeurs dans les endomorphismes hermitiens de E. Soit θ une trivialisation de E sur un ouvert Ω de X. Si H est la matrice hermitienne représentant la métrique h le long des fibres de $E_{|\Omega}$ alors on a

$$i\,\Theta_h(E) = i\,\overline{\partial}(\overline{H}^{-1}\partial\overline{H}) \quad \text{sur} \quad \Omega \; .$$

Dans le cas particulier où $r = 1$, la matrice H est en fait une fonction positive qui peut être écrite $H = e^{-\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ (φ est appelé poids de la métrique H) et donc le tenseur de courbure est une (1,1)-forme réelle fermée sur X donnée par

$$i\,\Theta_h(E) = i\,\partial\overline{\partial}\varphi \quad \text{sur} \quad \Omega \; .$$

Soit maintenant $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée $\mathcal{C}^\infty$ de E sur Ω, et $(z_1, \ldots, z_n)$ des coordonnées holomorphes. Alors le tenseur de courbure de Chern peut être donné sous la forme

$$i\,\Theta_h(E) = i \sum_{1\leq j,k\leq n;1\leq\lambda,\mu\leq r} c_{jk\lambda\mu} dz_j \wedge \overline{dz}_k \otimes e_\lambda^* \otimes e_\mu \; ,$$

avec des coefficients complexes $c_{jk\lambda\mu}$ vérifiant $\overline{c}_{jk\lambda\mu} = c_{kj\mu\lambda}$.

1.1.2. Forme de courbure. — On associe à $i\,\Theta_h(E)$ une forme hermitienne naturelle sur $T_X \otimes E$ notée $\langle\Theta_h(E)\rangle$ définie par

$$\langle\Theta_h(E)\rangle = \sum_{j,k,\lambda,\mu} C_{jk\lambda\mu}(dz_j \otimes e^*_\lambda) \otimes (\overline{dz_k \otimes e^*_\mu}),$$

telle que

$$\langle\Theta_h(E)\rangle(U,U) = \sum_{j,k,\lambda,\mu} C_{jk\lambda\mu} U_{j\lambda} \overline{U}_{k\mu}, \quad U \in T_{X,x} \otimes E_x\ .$$

1.2. Négativité au sens de Griffiths et courbure sectionnelle

Soit $(E,h) \to X$ un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur une variété complexe X. Rappelons la définition suivante introduite dans [Gr69].

1.2.1. Définition. — *Le fibré E est dit négatif (resp. positif) au sens de Griffiths si $\forall \xi \in T_{X,x} \smallsetminus \{0\}$ et $s \in E_x \smallsetminus \{0\}$ on a*

$$\langle\Theta_h(E)\rangle(\xi \otimes s\,, \xi \otimes s) < 0 \quad (\text{resp. } > 0)\ .$$

La notion de négativité au sens de Griffiths se comporte bien par passage au dual, plus précisément on a

1.2.2. Proposition. — *Le fibré E est négatif au sens de Griffiths si et seulement si son dual E^* est positif au sens de Griffiths.*

Dans le cas où E est un sous-fibré vectoriel V de T_X et ξ et s des vecteurs unitaires de V_x, le nombre $\langle\Theta_h(V)\rangle(\xi \otimes s, \xi \otimes s)$ est appelé courbure bissectionnelle de V déterminée par ξ et s.

En particulier, le nombre $\langle\Theta_h(V)\rangle(\xi \otimes \xi, \xi \otimes \xi)$ est appelé courbure sectionnelle de V déterminée par le vecteur tangent ξ.

1.2.3. Définition. — *On dit qu'un sous-fibré V de T_X est à courbure sectionnelle négative si pour tout vecteur tangent unitaire $\xi \in V_x$ on a*

$$\langle\Theta_h(E)\rangle(\xi \otimes \xi, \xi \otimes \xi) < 0.$$

1.3. Négativité au sens de Grauert et métriques de Finsler

Soit E un fibré holomorphe de rang r sur une variété complexe X. Le fibré projectif $P(E)$ est défini comme étant le quotient de $E \smallsetminus \{0\}$ par l'action multiplicative de $\mathbb{C}^*$. C'est un fibré sur X de fibre type $\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$. Géométriquement, un point de $P(E)$ au dessus d'un point $x \in X$, représente une droite complexe dans la fibre E_x. Si le vecteur directeur de cette droite est un vecteur $v \in E_x$, on utilisera la notation $(x,[v])$ pour désigner un tel point. On considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \pi^*E & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & E \\ {\scriptstyle \tilde{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P(E) & \xrightarrow[\pi]{} & X \end{array}$$

où π et p sont les projections naturelles.

On note $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$ le sous fibré en droites de π^*E tel que la fibre en un point $(x,[v]) \in P(E)$ est la droite $\mathbb{C}{\cdot}v$. On peut voir que $\tilde{\pi}$ envoie biholomorphiquement $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)\smallsetminus\{0\}$ sur $E\smallsetminus\{0\}$. En fait, $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$ peut être obtenu à partir de E en éclatant la section nulle de $E \to X$.

1.3.1. Définition. — *On dit que E est négatif au sens de Grauert [Gra62] si on peut munir $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$ d'une métrique hermitienne à courbure négative au sens de Griffiths.*

Cette notion de négativité de E est, en fait, équivalente à la notion algébrique d'amplitude du dual E^* de E (voir [Ha66]).

Rappelons le théorème suivant concernant la relation entre la négativité au sens de Grauert et celle au sens de Griffiths.

1.3.2. Théorème. — *Si E est négatif au sens de Griffiths alors E est négatif au sens de Grauert. Si de plus $\operatorname{rang} E = 1$ et si X est compacte (ou pseudoconvexe non compacte) alors on a l'équivalence.*

Dans le cas $\operatorname{rang} E > 1$ la réciproque de ce théorème pour les variétés compactes est ce qu'on appelle la conjecture de Griffiths, que l'on espère vraie pour toutes les variétés projectives.

Grâce à un résultat de Umemura [Um73] (voi aussi [CF90]), on sait qu'elle est vraie si X est une courbe compacte. Pour une étude de quelques questions relatives de ce sujet, voir [Mo97].

La difficulté majeure concernant la conjecture de Griffiths est de construire une métrique hermitienne sur E à partir d'une métrique hermitienne sur le fibré en droite associé $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$. Néanmoins, il y a une manière naturelle pour passer d'une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}_{P(E)}(-1)$ à ce qu'on appelle une métrique finslérienne sur E.

1.3.3. Définition. — *Une pseudo-métrique finslérienne sur E est une fonction $F : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors de la section nulle, telle que $F(\lambda\xi_x) = |\lambda|F(\xi_x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\xi_x \in E_x$. On omet le préfixe pseudo si F est en plus non dégénérée, c'est-à-dire, $F(\xi_x) = 0$ si et seulement si $\xi_x = 0$ pour tout $\xi_x \in E_x$.*

Dans le cas d'une métrique finslérienne F sur un fibré vectoriel E (convexe au sens de [Kob76]), on peut définir une connexion finslérienne sur E de la même façon que dans le cas hermitien. On a donc une notion de négativité au sens de Griffiths pour la courbure de cette connexion finslérienne.

On va pouvoir se contenter de la géométrie finslérienne en s'appuyant sur le théorème classique suivant ([Kob75], [Kob76]).

1.3.4. Théorème. — *Un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complexe compacte est négatif au sens de Grauert si et seulement si E admet une métrique finslérienne à courbure négative au sens de Griffiths.*

Remarquons, enfin, qu'étant donné une métrique finslérienne F sur un fibré

E, on n'a pas a priori une métrique duale F^* bien définie sur le dual E^*, de sorte qu'il est difficile d'utiliser des arguments de dualité d'un point de vue métrique. La conjecture de Griffiths permetterait de résoudre positivement ce problème.

2. Variétés hyperboliques au sens de Kobayashi

2.1. La pseudo-métrique de Kobayashi-Royden

Soit X une variété complexe de dimension n. On notera $f : \Delta \to X$ une application holomorphe arbitraire du disque unité de $\mathbb{C}$, dans X. La pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden sur X ([Roy71], [Roy74]) est la pseudo-métrique finslérienne sur T_X définie par

$$\mathbf{k}_X(\xi) = \inf\big\{\lambda > 0;\ \exists f : \Delta \to X,\ f(0) = x,\ \lambda f'(0) = \xi\big\},\ x \in X,\ \xi \in T_{X,x}\ .$$

La pseudo-distance de Kobayashi $d_K(x, y)$ ([Kob70], [Kob76]) est la pseudo-distance géodésique obtenue en intégrant la pseudo-métrique $\mathbf{k}_X$.

2.1.1. Définition. — *Une variété complexe X est dite hyperbolique (au sens de Kobayashi) si d_X est non dégénérée, c'est-à-dire, $d_X(x, y) > 0$, pour tout couple de points $x \neq y$ dans X.*

En fait, on peut définir d_X d'une autre façon, comme S. Kobayashi l'avait défini en 1970. On considère la métrique de Poincaré sur le disque unité

$$\mathbf{k}_\Delta(\xi) = \frac{|\xi|_{\mathrm{euc}}}{1 - |t|^2},\ \xi \in T_t\Delta\ ,$$

et d_Δ la distance hyperbolique associée. Alors, étant donné deux points x et y dans X, on relie x et y par une chaîne de disques unités, c'est-à-dire, des points $x_0 = x,\ x_1, \ldots, x_m = y$ de X, des paires de points $(p_1, q_1), \ldots, (p_m, q_m)$ de Δ et des applications holomorphes $f_1, f_i, \ldots, f_m$ de Δ dans X tels que

$$f_i(p_i) = x_{i-1} \text{ et } f_i(q_i) = x_i, \quad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m\ .$$

On additionne les distances hyperboliques entre p_i et q_i et on prend l'infimum pour tous les choix des chaînes qui relient x et y. Ceci définit la pseudo-distance de Kobayashi

$$d_X(x, y) = \inf \sum_{i=1}^{m} d_\Delta(p_i, q_i)\ .$$

Les objets d_X et $\mathbf{k}_X$ vérifient, entre autres, les deux propriétés suivantes de la proposition 2.1.2.

2.1.2. Proposition.

1. (Coercivité) Si $f : X \to Y$ est une application holomorphe entre deux variétés complexes, alors

$$d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq d_X(x, x'), \quad \text{pour tous } x, x' \in X,$$

$$\mathbf{k}_Y\big(f(x), f_{*x}(\xi)\big) \leq \mathbf{k}_X(x, \xi), \quad \text{pour tout } \xi \in T_{X,x}\ .$$

2. (Maximalité) Soit X une variété complexe et soient d et F, respectivement une pseudo-distance et une pseudo-métrique sur X vérifiant

$$d\big(f(p), f(q)\big) \leq d_\Delta(p, q) \text{ et } F\big(f(p), f_{*p}(\xi)\big) \leq \mathbf{k}_\Delta(p, \xi)$$

pour toute application holomorphe $f : \Delta \to X$, tous points p et q dans Δ et tout vecteur $\xi \in T_p\Delta$.

Alors

$$d \leq d_X \quad et \quad F \leq \mathbf{k}_X \ .$$

La pseudo-distance de Kobayashi d_X ainsi que la pseudo-métrique $\mathbf{k}_X$ sont aussi invariantes par biholomorphismes et revêtements non ramifiés. D'où, puisque le disque unité est hyperbolique, toute surface de Riemann de genre $g \geq 2$ est aussi hyperbolique.

On peut étendre la notion d'hyperbolicité d'une manière naturelle aux espaces complexes non nécessairement lisses et on peut voir que si la normalisation d'un espace complexe X est hyperbolique, alors X est aussi hyperbolique. Il en résulte que toute courbe algébrique de genre géométrique (le genre de sa normalisation) $g \geq 2$ est hyperbolique. (Pour plus de de détails on renvoie à [La87])

2.2. Critère de Brody pour les variétés compactes

Une définition équivalente de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden sur une variété complexe X est la suivante

$$\mathbf{k}_X(\xi) = \inf\left\{\frac{1}{R};\ \exists f : \Delta_R \to X;\ f(0) = x, f'(0) = \xi\right\},\ x \in X,\ \xi \in T_{X,x}\ ,$$

où Δ_R est le disque de rayon R dans $\mathbb{C}$.

Puisque dans $\mathbb{C}$ on peut mettre un disque de rayon aussi grand que l'on veut, on voit bien que $\mathbf{k}_{\mathbb{C}} \equiv 0$ et $d_{\mathbb{C}}$ est donc dégénérée (nulle). Ainsi, à cause de la coercivité de la distance de Kobayashi, une application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans une variété hyperbolique est nécessairement constante. La réciproque n'est vraie en général que dans le cas compact grâce aux résultats suivants de R. Brody [Bro78].

2.2.1. Lemme de reparamétrisation de Brody. — *Soit ω une métrique hermitienne sur une variété complexe X et soit $f : \Delta \to X$ une application holomorphe. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rayon $R \geq (1-\varepsilon)\|f'(0)\|_\omega$ et une transformation homographique ψ du disque Δ_R sur $(1-\varepsilon)\Delta$ tels que*

$$\|(f \circ \psi)'(0)\|_\omega = 1, \quad \|(f \circ \psi)'(t)\|_\omega \leq \frac{1}{1-\frac{|t|^2}{R^2}},\ \textit{pour tout } t \in \Delta_R\ .$$

En particulier, si X est compacte, étant donné une suite d'applications holomorphes $f_\nu : \Delta \to X$ telles que $\lim_{\nu \to +\infty} \|f'_\nu(0)\|_\omega = +\infty$, on peut trouver une suite de transformations homographiques $\psi_\nu : \Delta_{R_\nu} \to \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\Delta$ avec $\lim_{+\infty} R_\nu = +\infty$. Après un passage éventuel à une sous-suite, $(f_\nu \circ \psi_\nu)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une application holomorphe non constante $g : \mathbb{C} \to X$ avec $\|g'(0)\|_\omega = 1$ et $\sup_{\mathbb{C}} \|g'(t)\|_\omega \leq 1$. Une telle courbe est dite courbe de Brody. On obtient comme corollaire le théorème important suivant :

2.2.2. Théorème de Brody. — *Une variété complexe compacte X est hyperbolique si, et seulement si, l'une ou l'autre des conditions suivantes est satisfaite*

i) il n'existe aucune courbe de Brody $g : \mathbb{C} \to X$.
ii) toute courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ est constante.

2.3. Négativité de courbure et hyperbolicité

L'idée de base de cette thèse est d'étudier la relation entre l'hyperbolicité et une notion adéquate de négativité de courbure. Le point-clé qui gère cette liaison est le lemme d'Ahlfors qu'on peut le présenter sous la forme suivante :

2.3.1. Lemme d'Ahlfors-Pick-Schwarz. — *Soit $h = \frac{i}{2\pi} h_0 \; dt \wedge d\bar{t}$ une pseudo-métrique hermitienne sur le disque Δ_R avec $\log h_0$ sous harmonique, telle que $i\partial\overline{\partial} \log h_0(t) \geq A \; h(t)$ au sens des courants, c'est-à-dire que la courbure de h est $\leq -A$. Alors on peut comparer h à la métrique de Poincaré sur le disque Δ de la façon suivante :*

$$h \leq \frac{1}{A} \, \frac{i}{2\pi} \, \frac{dt \wedge d\bar{t}}{(1-|t|)^2} \; .$$

Grâce à la propriété de maximalité (Proposition 2.1.2) de la métrique de Kobayashi on a le résultat suivant dû à S. Kobayashi ([Kob70], [Kob75]) :

2.3.2. Théorème. — *Soit X une variété complexe. Supposons que T_X admet une métrique finslérienne à courbure sectionnelle majorée par une constante négative. Alors X est hyperbolique.*

Des théorèmes 2.3.2 et 1.3.4, on déduit :

2.3.3. Corollaire. — *Supposons que le fibré tangent à une variété complexe compacte X est négatif au sens de Grauert. Alors X est hyperbolique.*

S. Kobayashi avait soulevé le problème de savoir si la réciproque du théorème 2.3.2 était vraie dans le cas compact, ou même projectif. On sait, maintenant, que ce n'est pas le cas. En fait, l'exemple de J.-P. Demailly [Dem96], qui va être d'ailleurs l'objet central du Chapitre 3, ne vérifie pas des propriétés de négativité même beaucoup plus faibles.

2.4. Hyperbolicité algébrique et dégénérescence algébrique

Soit X une variété complexe. Si X est hyperbolique, alors toute application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ est constante. En particulier, X ne contient ni courbes rationnelles, ni elliptiques, et plus généralement, il n'existe pas d'application non constante d'un tore complexe dans X. Ceci a suggéré la définition suivante :

2.4.1. Définition. — *Une variété complexe X est dite algébriquement hyperbolique au sens de Lang, s'il n'existe pas d'application holomorphe non triviale d'un tore complexe dans X.*

Dans le cas des variétés projectives, S. Lang [La86] a conjecturé que l'hyperbolicité au sens de Kobayashi est équivalente à l'hyperbolicité algébrique au sens de la définition 2.4.1. Dans le cas particulier des sous-variétés d'un tore complexe, la conjecture a été démontré par M. Green [Gr78] (voir aussi [Kob77]) et ceci est en fait une conséquence du célèbre théorème suivant qui a été longtemps connu sous le nom de la conjecture de Bloch [Bl26].

2.4.2. Théorème de Bloch. — *Lorsque l'irrégularité, c'est à dire la dimension de l'espace des 1-formes holomorphes sur une variété projective X, est strictement superieure à la dimension de X, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ est contenue dans une sous variété propre de X.*

C'est T. Ochiai [Och77] qui a considérablement clarifié des idées originales de A. Bloch, a démontré la conjecture dans plusieurs cas particuliers et a formulé un résultat technique suffisant pour conclure dans le cas général. Le théorème de Bloch a été finalement démontré par des techniques différentes dans [No77, 81],[GG80] et [Ka80]. Une difficulté technique dans [GG80] est remarquée et surmontée dans [Dem96].

Une autre approche pour lier l'hyperbolicité à des propriétés algébriques repose sur le théorème suivant :

2.4.3. Théorème ([Dem96]). — *Soit X une variété complexe compacte et soit ω une métrique hermitienne sur X. Si X est hyperbolique alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute courbe compacte C dans X satisfait*

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C)$$

où $\overline{C}$ est la normalisation de C, $g(\overline{C})$ son genre, $\chi(\overline{C})$ sa caractéristique d'Euler et $\deg_\omega(C) = \int_C \omega$.

D'où la définition suivante :

2.4.4. Définition. — *Une variété complexe projective X est dite algébriquement hyperbolique au sens de Demailly s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute courbe compacte $C \subset X$ satisfait*

$$2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega C$$

où ω est une métrique hermitienne donnée sur X.

Remarquons que, H. Clemens ([Cle86] et [CKL88]) a démontré que sur une surface générique de degré $d \geq 5$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$, les courbes de type (d, k) ont un genre $g > kd(d-5)/2$. Améliorant ce résultat, G. Xu ([Xu94])a démontré que toute courbe algébrique contenue dans une surface générique de degré $d \geq 5$ dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ satisfait la condition $g \geq \frac{d(d-3)}{2} - 2$. Ainsi une surface générique de degré d dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ est algébriquement hyperbolique au sens de Lang si $d \geq 5$ et au sens de Demailly si $d \geq 6$.

Une propriété plus faible qui peut servir de pont entre l'hyperbolicité et hyperbolicité algébrique est la suivante :

2.4.5. Définition. — *Une variété algébrique complexe X a la propriété de dégénérescence algébrique si toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ est contenue dans une sous-variété algébrique propre de X.*

Une conjecture de M. Green et P. Griffiths ([GrGr80]) prévoit qu'une variété projective de type général (def. 2.4.6) a la propriété de dégénérescence algébrique.

2.4.6. Définition. — *Soit L un fibré en droites sur une variété complexe X. La dimension de Kodaira-Iitaka ([Ii71]) $\kappa(L)$ est le supremum pour $m \geq 1$ des rangs des applications canoniques :*

$$\Phi_m : X \smallsetminus B_m \longrightarrow \mathbb{P}(V_m) \ , \quad x \longmapsto H_x = \{\sigma \in V_m \ ; \ \sigma(x) = 0\};$$

avec $V_m = H^0(X, L^{\otimes m})$ et $B_m = \bigcap_{\sigma \in V_m} \sigma^{-1}(0) :=$ ensemble base de V_m.

Dans le cas où $V_m = \{0\}$ pour tout $m \geq 1$, on pose $\kappa(L) = -\infty$. Le fibré L est dit gros si $\kappa(L) = \dim X$.

Enfin, X est dite de type général si le fibré canonique K_X est gros.

En dimension deux, S. Lang a conjecturé [La86] la finitude du nombre de courbes rationnelles et elliptiques dans une surface X de type général, et donc l'image d'une application holomorphe $f : \mathbb{C} \to X$ devrait atterrir dans ces courbes. Remarquons que sous des conditions fortes sur les classes de Chern d'une surface de type général certaines de ces conjectures ont été démontré, ceci sera expliquer dans le paragraphe 3.4 de ce chapitre (pour une bonne exposition sur plus de problèmes recents on renvoie à [NO90], [Wo93] et [Za93]).

3. Espaces des jets et hyperbolicité

3.1. Fibrés des jets de courbes

Soit X une variété complexe de dimension n. D'après [GrGr80], on définit le fibré $J_k \to X$ des k-jets de germes de courbes dans X, comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des applications holomorphes $f : (\mathbb{C}, 0) \to (X, x)$ modulo la relation d'équivalence suivante: $f \sim g$ si et seulement si toutes les dérivées $f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0)$ coïncident pour $0 \leq j \leq k$ (le calcul étant fait par exemple dans un système de coordonnées locales au voisinage de x). L'application projection $J_k \to X$ est simplement $f \mapsto f(0)$. Grâce à la formule de Taylor appliquée à un germe f au voisinage d'un point $x \in X$, on peut identifier $J_{k,x}$ à l'ensemble des k-uplets de vecteurs $\big(f'(0), \ldots, f^{(k)}(0)\big) \in \mathbb{C}^{nk}$. Ainsi, J_k est un fibré holomorphe sur X de fibre type $\mathbb{C}^{nk}$. On peut voir qu'il ne s'agit pas d'un fibré vectoriel pour $k \geq 2$ (pour $k = 1$, c'est tout simplement le fibré tangent T_X).

On va se placer dans le cadre des variétés dirigées (X, V), en considérant des variétés X munies d'un sous-fibré holomorphe $V \subset T_X$ (voir[Dem96]). Le fibré des k-jets $J_k V$ est défini comme suit :

3.1.1. Définition. — *Soit (X, V) une variété complexe dirigée. Le fibré $J_k V \to X$ est l'espace des k-jets de courbes $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ tangentes à V, c'est-à-dire, telles que $f'(t) \in V_{f(t)}$ pour t au voisinage de 0, l'application projection sur X étant $f \mapsto f(0)$.*

Il sera commode, dans notre étude, de considérer des fibrés de jets projectivisés, qui sont, en fait, des quotients naturels des fibrés $J_k V$. D'après [Dem96], on définit inductivement le fibré projectivisé X_k des k-jets et le sous-fibré associé $V_k \subset T_{X_k}$ par

$$(X_0, V_0) = (X, V), \quad (X_k, V_k) = (\widetilde{X}_{k-1}, \widetilde{V}_{k-1}) \ ;$$

en itérant le procédé suivant : on associe à (X, V) une nouvelle variété dirigée $(\widetilde{X}, \widetilde{V})$ telle que $\widetilde{X} = P(V)$ et $\widetilde{V}$ est le sous-fibré de $T_{\widetilde{X}}$ défini en tout point $(x, [v])$ associé à un vecteur $v \in V_x \smallsetminus \{0\}$ par

$$\widetilde{V}_{(x,[v])} = \Big\{\xi \in T_{\widetilde{X},(x,[v])} \ ; \ \pi_* \xi \in \mathbb{C}{\cdot}v\Big\}, \quad \mathbb{C}{\cdot}v \subset V_x \subset T_{X,x} \ ,$$

où $\pi : \widetilde{X} \to X$ est la projection naturelle et π_* sa différentielle. On a par construction

$$\dim X_k = n + k(r{-}1), \quad \operatorname{rang} V_k = r := \operatorname{rang} V \ .$$

Soit π_k la projection naturelle $\pi_k : X_k \to X_{k-1}$, on notera $\pi_{j,k} : X_k \to X_j$ la composition $\pi_{j+1} \circ \pi_{j+2} \circ \cdots \circ \pi_{k-1}$, pour $j \leq k$. On définit aussi le sous-fibré tautologique en droites (voir §1.3) de $\pi_k^* V_{k-1}$ noté $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$, tel que $\mathcal{O}_{X_k}(-1)_{(x,[v])} = \mathbb{C}{\cdot}v$ pour tout $(x, [v]) \in X_k = P(V_{k-1})$.

L'injection canonique $\mathcal{O}_{X_k}(-1) \hookrightarrow \pi_k^* V_{k-1}$ et la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_{X_{k-1}/X_{k-2}} \longrightarrow V_{k-1} \overset{(\pi_{k-1})_*}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{X_{k-1}}(-1) \longrightarrow 0$$

induisent un morphisme canonique de fibrés en droites

$$\mathcal{O}_{X_k}(-1) \overset{(\pi_k^*)\circ(\pi_{k-1})_*}{\hookrightarrow} \pi_k^* \, \mathcal{O}_{X_{k-1}}(-1)$$

qui admet la section hyperplane $D_k := P(T_{X_{k-1}/X_{k-2}}) \subset X_k$ comme diviseur des zéros, d'où

$$\mathcal{O}_{X_k}(-1) = \pi_k^* \, \mathcal{O}_{X_{k-1}}(-1) \otimes \mathcal{O}(D_k) \ .$$

Observation importante. — *Toute courbe holomorphe $f : \Delta_r \to X$ tangente à V peut être relevée d'une façon unique à une courbe $f_{[k]} : \Delta_r \to X_k$ tangente à V_k, appelée relevée de f à l'étage k. En plus, la dérivée $(f_{[k-1]})'$ donne une section*

$$f'_{[k-1]} : T_{\Delta_r} \longrightarrow f^*_{[k]} \mathcal{O}_{X_k}(-1) \ .$$

En effet, on définit $f_{[1]}$ par $f \mapsto (f(t), [f'(t)])$, ce qui est bien défini sauf éventuellement en un point stationnaire t_0. Dans ce cas on écrit $f'(t) = (t-t_0)^s u(t)$ avec $u(t_0) \neq 0$ et on pose $[f'(t)] = [u(t)]$ pour t voisin de t_0. Par définition, $f'(t) \in \mathcal{O}_{X_1}(-1)_{f_{[1]}(t)}$, donc f' définit une section

$$f' : T_{\Delta_r} \to f^*_{[1]} \mathcal{O}_{X_1}(-1).$$

Puisque $\pi \circ f_{[1]} = f$, on a $\pi_* f'_{[1]} = f'$ donc $f'_{[1]} \in V_{1,(f(t),[f'(t)])}$. Pour construire $f_{[k]}$ on itère ce procédé k-fois. □

Soit $f : \Delta_r \to X$ une courbe holomorphe. On appelle multiplicité de f en un point $t_0 \in \Delta_r$, notée $m(f, t_0)$, le plus petit entier $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(s)}(t_0) \neq 0$.

Remarquons que puisque $f_{[k-1]} = \pi_k \circ f_{[k]}$, il est clair que la suite $m(f_{[k]}, t_0)$ est décroissante au sens large avec k. En fait, on a une affirmation plus précise dont la démonstration se trouve dans [Dem96].

3.1.2. Proposition. — *Soit $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ un germe non constant de courbes holomorphes tangentes à V. Alors, pour tout $j \geq 2$ on a*

$$m(f_{[j-2]}, 0) \geq m(f_{[j-1]}, 0)$$

et l'inégalité est stricte si et seulement si $f_{[j]}(0) \in D_j$.

Inversement, si $\omega \in X_k$ et $m_0 \geq m_1 \geq \cdots \geq m_{k-1} \geq 1$ une suite d'entiers vérifiant :

$$\text{pour tout } j \in \{2, \ldots, k\}, \quad m_{j-2} > m_{j-1} \text{ si et seulement si } \pi_{j,k}(\omega) \in D_j \ ,$$

alors, il existe un germe $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ tangent à V tel que $f_{[k]}(0) = \omega$ et $m(f_{[j]}, 0) = m_j$, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

Points réguliers et points singuliers. — Un point $\omega \in X_k$ est dit régulier, s'il existe un germe $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ tel que $f_{[k]}(0) = \omega$ et $m_0(f, 0) = m(f_{[1]}, 0) = \cdots = m(f_{[k-1]}, 0) = 1$, ceci est possible par la proposition 3.1.2 si et seulement si $\pi_{j,k}(\omega) \notin D_j$ pour tout $j \in \{2, \ldots, k\}$. On définit par suite

$$X_k^{\mathrm{reg}} = \bigcap_{2 \le j \le k} \pi_{j,k}^{-1}(X_j \smallsetminus D_j)$$
$$X_k^{\mathrm{sing}} = \bigcup_{2 \le j \le k} \pi_{j,k}^{-1}(D_j) \ .$$

Remarquons qu'un germe singulier f ($f'(0) = 0$) peut atteindre des points $f_{[k]}(0) \in X_k^{\mathrm{reg}}$. En fait, X_k^{sing} est constitué des $f_{[k]}(0)$ avec f décrivant les germes singuliers dont le relevé devient régulier à une étape $\le k - 1$.

3.2. Fibrés des jets de différentielles

Soit (X, V) une variété complexe dirigée. Le concept de jet de différentielles (qui remonte aux travaux de A. Bloch [Blo26,26'], H. Cartan [Ca28] et L. Ahlfors [Ah41]) décrit d'une manière intrinsèque les équations différentielles que peut vérifier un germe de courbe $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ (on supposera toujours f tangent à V). D'après [GrGr80], on a un fibré vectoriel noté $E_{k,m}^{GG} V^* \to X$, dont les fibres sont les polynômes à valeurs complexes $Q(f', f'', \ldots, f^{(k)})$, de degré m par rapport à l'action de $\mathbb{C}^*$ sur les fibres de $J_k V$, c'est-à-dire tels que

$$Q(\lambda f', \lambda^2 f'', \ldots, \lambda^k f^{(k)}) = \lambda^m \, Q(f', f'', \ldots, f^{(k)}) \ ,$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $(f', f'', \ldots, f^{(k)}) \in J_k V$.

L'espace $E_{k,m}^{GG} V^*$, appelé fibré des jets de différentielles de degré k et de poids m, admet une filtration canonique dont les termes gradués sont

$$G^\ell(E_{k,m}^{GG} V^*) = S^{\ell_1} V^* \otimes S^{\ell_2} V^* \otimes \cdots \otimes S^{\ell_k} V^* \ ,$$

où $\ell := (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k) \in \mathbb{N}^k$ vérifiant $\ell_1 + 2\ell_2 + \cdots + k\ell_k = m$.

On va s'intéresser plutôt à un sous-fibré de $E_{k,m}^{GG} V^*$ noté $E_{k,m} V^*$, introduit dans [Dem96]. Par définition $E_{k,m} V^*$ est formé par des jets de différentielles invariants, non seulement par les homothéties, mais par tous les biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$. Plus précisément, soit $\mathbb{G}_k$ le groupe des germes des k-jets de biholomorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$, c'est-à-dire, le groupe des germes d'applications holomorphes

$$t \longmapsto \varphi(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k, \quad a_1 \in \mathbb{C}^*, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad j \ge 2 \ .$$

Le groupe $\mathbb{G}_k$ agit sur les jets dans $J_k V$ en reparamétrisant les applications $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ à la source au moyen d'un biholomorphisme $\varphi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, c'est-à-dire, $(f, \varphi) \mapsto f \circ \varphi$.

3.2.1. Définition. — *Le fibré $E_{k,m} V^*$ des jets de différentielles invariants d'ordre k et de degré m est le sous-fibré de $E_{k,m}^{GG}$ constitué par les opérateurs différentiels polynomiaux $Q(f', f'', \ldots, f^{(k)})$ vérifiant*

$$Q\big((f \circ \varphi)', (f \circ \varphi)'', \ldots, (f \circ \varphi)^{(k)}\big) = (\varphi'(0))^m Q(f', f'', \ldots, f^{(k)}) \ ,$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{G}_k$.

Autrement dit, si $\mathbb{G}'_k$ le sous-groupe de $\mathbb{G}_k$ des germes φ tangents à l'identité (c'est-à-dire telsque $\varphi'(0) = 1$), on a une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow \mathbb{G}'_k \longrightarrow \mathbb{G}_k \longrightarrow \mathbb{C}^\star \longrightarrow 1,$$

et on peut voir que $E_{k,m}V^* = (E^{\mathrm{GG}}_{k,m}V^*)^{\mathbb{G}'_k}$ est l'ensemble des invariants de $E_{k,m}V^*$ sous l'action de $\mathbb{G}'_k$.

Le résultat suivant dans [Dem96] donnera les liens existants entre tous les espaces des jets définis ci-dessus.

3.2.2. Théorème. — *Supposons que rang* $V = r \geq 2$ *et soit* J_kV^{reg} *le fibré des* k*-jet réguliers de courbes* $f : (\mathbb{C}, 0) \to X$ *(c'est à dire telles que* $f'(0) \neq 0$*). Alors*

i) *On a un plongement* $J_kV^{\mathrm{reg}}/\mathbb{G}_k \hookrightarrow X$ *sur* X *qui identifie* J_kV^{reg} *à* X_k^{reg}. *Donc* X_k *est une compactification de* $J_kV^{\mathrm{reg}}/\mathbb{G}_k$ *relative sur* X.

ii) *Le faisceau image directe*

$$(\pi_{0,k})_\star \mathcal{O}_{X_k}(-1) \simeq \mathcal{O}(E_{k,m}V^\star)$$

est identifié au faisceau des sections holomorphes de $E_{k,m}V^\star$.

iii) *Pour* $m > 0$, *l'ensemble base relatif du système linéaire* $|\mathcal{O}_{X_k}(m)|$ *est égal à* X_k^{sing} *l'ensemble des* k*-jets singuliers.*

3.3. Négativité sur les k-jets et hyperbolicité

Soit (X, V) une variété complexe dirigée. Dans [Dem96], est définie une notion d'hyperbolicité qui coïncide avec l'hyperbolicité classique si on se place dans le cas standard $V = T_X$(et si X est compacte): la métrique de Kobayashi-Royden $\mathbf{k}_{(X,V)}$ est définie en considérant seulement les courbes tangentes à V et on dit que la variété dirigée (X, V) est hyperbolique s'il existe $\varepsilon > 0$ et ω une métrique hermitienne sur X telles que $\mathbf{k}_{(X,V)} \geq \varepsilon\omega$. La caractérisation de Brody 2.2.2 reste vraie en considérant des courbes entières tangentes à V.

En généralisant la notion de métrique finslérienne à courbure négative, J.-P. Demailly a introduit une notion de négativité sur les fibrés en droites $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$, qui par le lemme d'Ahlfors 2.3.1, entraîne l'hyperbolicité de (X, V) (l'utilisation de métriques à courbure négative sur les jets remonte aux travaux de H. Grauert [Gra89], Cowen-Griffiths [CG] et Green-Griffiths [GG]). Cependant, les métriques que nous utiliserons seront singulières au sens de [Dem90'] et sont définies comme suit :

3.3.1. Définition. — *On dit qu'une métrique* h *sur un fibré en droites* L *sur* X *est singulière si dans toute trivialisation de* L *le poids* φ *associé à* h *est localement intégrable. La forme de courbure* $i\Theta_h(L) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\varphi$ *est un courant fermé de type* $(1, 1)$ *calculé au sens des distributions.*

On appelle ensemble de dégénérescence de h, *qu'on note* Σ_h, *le fermé de* X *tel que* φ *soit localement bornée sur* $X \smallsetminus \Sigma_h$ *et non borné dans un voisinage de tout point de* Σ_h.

On dit qu'une métrique singulière h est à courbure positive s'il existe une fonction continue positive ε sur X et une métrique hermitienne lisse ω telles que $\Theta_h(L) \geq \varepsilon\omega$.

Dans le cas des variétés compactes, la positivité de courbure d'un fibré en droites est lié à l'abondance de ses sections globales, plus précisément on a la proposition suivante dont une démonstration se trouve dans [Dem90',92,96].

3.3.2. Proposition. — *Soit L un fibré en droites sur une variété complexe compacte X.*

(i) L admet une métrique singulière h à courbure positive si et seulement si L est gros. Soit B_m l'ensemble base du système linéaire $|H^0(X, L^{\otimes m})|$ et soit

$$\phi_m : X \smallsetminus B_m \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

l'application méromorphe associée. Soit Σ_m l'ensemble analytique fermé égal à l'union de B_m et l'ensemble des points $x \in X \smallsetminus B_m$ tels que $\dim\left(\phi_m^{-1}(\phi_m(x)\right) > 0$.

(ii) Si $\Sigma_m \neq X$ et G un fibré en droites quelconque, l'ensemble base de $L^{\otimes k} \otimes G^{-1}$ est contenu dans Σ_m pour k assez grand. En conséquence, L admet une métrique singulière h à courbure positive telle que $\Sigma_h = \Sigma_m$.

(iii) Inversement, si L admet une métrique singulière h à courbure positive. Alors, il existe $m > 0$ tel que $B_m \subset \Sigma_h$ et $\phi_m : X \smallsetminus \Sigma_h \longrightarrow \mathbb{P}^N$ est un plongement.

Avant de définir la notion de négativité de courbure au sens de Demailly [Dem96], rappelons qu'une fonction réelle est dite quasi psh si elle est la somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction lisse. En particulier, une fonction quasi psh est localement intégrable.

3.3.3. Définition. — *On appelle métrique de k-jet sur (X, V) toute métrique h_k singulière à poids quasi psh sur le fibré $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$. On dit que h_k est à courbure négative au sens des jets (resp. à courbure négative totale au sens des jets) si $\Theta_{h_k}(\mathcal{O}_{X_k}(-1))$ est négative le long de V_k (resp. sur tout T_{X_k}) c'est-à-dire, s'il existe $\varepsilon > 0$ et une métrique hermitienne lisse ω_k sur T_{X_k} telles que*

$$\langle \Theta_{h_k^{-1}}(\mathcal{O}_{X_k}(1)) \rangle \geq \varepsilon |\xi|^2_{\omega_k}, \quad \textit{pour tout} \;\; \xi \in V_k \;\; (\text{resp. } \xi \in T_{X_k}) \ .$$

Rappelons que $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ n'est pas relativement ample par rapport à X pour $k \geq 2$ (théo. 3.2.2), il est donc important d'autoriser des singularités dans les métriques de la définition 3.3.3.

Dans le cas spécial des métriques sur les 1-jets, une métrique h_1 sur $\mathcal{O}_{X_1}(-1)$ correspond à une métrique finslérienne $\tilde{h}$ sur $V \subset T_X$ et on peut vérifier sans peine que la condition de négativité de courbure dans la direction de V, est équivalente à la négativité de la courbure sectionnelle de la métrique $\tilde{h}$ sur V.

Comme pour le théorème 2.3.2, la négativité sur les k-jets implique l'hyperbolicité. Ceci découle aussitôt du lemme d'Ahlfors.

3.3.4. Théorème. — *Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée. Si (X, V) admet une métrique h_k à courbure négative au sens des jets, alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V est telle que $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset \Sigma_{h_k}$. En particulier, si $\Sigma_{h_k} \subset X_k^{\text{sing}}$ alors (X, V) est hyperbolique.*

En particulier, l'existence de suffisamment de jets de différentielles globales implique l'hyperbolicité, plus précisément :

3.3.5. Corollaire. — *Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée. Supposons qu'il existe des entiers $k, m > 0$ et un fibré en droites ample L sur X tels que $H^0(X_k, \mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes L^{-1}) \simeq H^0(X, E_{k,m}V^* \otimes \pi_{0,k}^* L^{-1})$ contient des sections non nulles $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$. Soit $Z \subset X_k$ l'ensemble base de ces sections. Alors, toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to X$ tangente à V est telle que $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset Z$. En particulier si pour des entiers $k, m > 0$ convenables $E_{k,m}V^*$ est ample (négatif au sens de Grauert) alors (X, V) est hyperbolique.*

Les théorèmes 3.3.4 et 3.3.5 permettent de donner la définition suivante :

3.3.6. Définition. — *On dit que (X, V) admet une métrique non dégénérée à courbure négative sur les k-jets s'il existe sur $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ une métrique h_k à courbure négative au sens des k-jets et telle que $\Sigma_{h_k} \subset X_k^{\text{sing}}$.*

La question importante qui se pose en conséquence est la suivante:

3.3.7. Conjecture ([Dem96]). — *Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée. Alors, (X, V) est hyperbolique si et seulement si (X, V) admet une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets pour k assez grand.*

3.4. L'ensemble base des jets au sens de Demailly

Soit A un fibré en droites ample sur une variété complexe compacte X dirigée d'une manière standard par son tangent T_X. L'ensemble base des k-jets invariants est définit dans [Dem96] comme étant l'intersection

$$B_k := \bigcap_{m>0} B_{k,m} \subset X_k$$

des ensembles bases $B_{k,m}$ des fibrés $\mathcal{O}_{X_k}(m) \otimes \pi_{0,k}^\star \mathcal{O}(-A)$. D'aprés le corollaire 3.3.5 toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ doit satisfaire $f_{[k]}(\mathbb{C}) \subset B_k$, et donc

$$f(\mathbb{C}) \subset Y := \bigcap_{k>0} \pi_{k,0} B_k.$$

La compréhension des ensembles B_k est donc intéressante en rapport avec la conjecture de Green et Griffiths sur la dégénérescence des courbes entières dans les variétés de type général.

Supposons, désormais, que X est une surface lisse de type général (et donc algébrique, voir [BPV84]). Dans le cas des 1-jets $E_{1,m}T_X^\star = S^m T_X^\star$, on a d'après le théorème de Riemann-Roch [Hi66]

$$\chi(X, S^m T_X^\star) = \frac{m^3}{6}(c_1^2 - c_2) + O(m^2),$$

où c_1 et c_2 sont les classes de Chern de X. Par la dualité de Serre on a

$$h^2(X, S^m T_X^\star) = h^0(X, S^m T_X^\star \otimes K_X^{1-m})$$

et donc
$$h^2(X, S^m T_X^\star) \leq h^0(X, S^m T_X^\star),$$
puisque K_X^{m-1} est effectif pour m assez grand. D'où
$$h^0(X, S^m T_X^\star) = h^0(P(T_X), \mathcal{O}_{P(T_X)}(m)) \geq \frac{m^3}{12}(c_1^2 - c_2) + O(m^2).$$
Il en résulte que lorsque $c_1^2 > c_2$, le fibré $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est gros et donc
$$B_1 = \bigcap_{m>0} Bs\mathcal{O}_{X_1}(m) \otimes \mathcal{O}(-A)$$
est un sous-ensemble algébrique propre de $X_1 = P(T_X)$. Soit, dans ce cas, Σ une surface irréductible horizontale contenue dans B_1, c'est à dire telle que $\pi_{0,1}(\Sigma) = X$, alors le sous fibré $V_1 \subset T_{X_1}$ induit sur toute désingularisation $\widetilde{\Sigma}$ de Σ un feuilletage algébrique en courbes. D'après le théorème 3.3.4 , la relevée dans X_1 de toute courbe non constante $f : \mathbb{C} \to X$ est contenue dans B_1 et donc peut être vue, sauf pour un nombre fini de courbes contenues dans le lieu des singularités du feuilletage comme une courbe intégrale de celui-ci. Ceci est en particulier le cas pour les courbes rationelles ou elliptiques contenues dans X. Grâce à cette remarque et en utilisant un théorème de A. Seidenberg [Se68] sur la désingularisation des feuilletages analytiques sur les surfaces, F. Bogomolov [Bo77] a montré le résultat suivant.

3.4.1. Théorème. — *Sur une surface de type général telle que $c_1^2 > c_2$, il n'existe qu'un nombre fini de courbes rationnelles ou elliptiques.*

Cette réponse positive partielle à une conjecture de S. Lang peut être vue (voir [M-De78]) comme une conséquence directe du cas particulier suivant d'un théorème de J.-P. Joanoulou [Jo78].

3.4.2. Théorème. — *Soit L un sous faisceau du fibré cotangent à une variété projective complexe lisse définissant un feuilletage algébrique de codimension 1. Soit H la distribution duale d'hyperplans dans T_X. S'il y a une infinité d'hypersurfaces tangentes à H, alors H est le faisceau tangent relatif à une fibration méromorphe de X sur une courbe.*

En effet, grâce au théorème 3.4.2. si une surface X de type général telle que $c_1^2 > c_2$ contenait une infinité de courbes rationelles ou elliptiques, elle ne peut être que fibré en ses courbes, ce qui est le cas seulement si X était réglée ou elliptique.

Ceci ne donne pas malheureusement d'information concernant les courbes transcendantes contenues dans X. Cependant, lorsque on suppose de plus que l'indice topologique $c_1^2 - 2c_2$ est positif, on a le résultat suivant de Y. Miyaoka [Mi82] sur la presque amplitude de $T_X^\star$ (voir [ScTa85] pour le cas général d'un fibré vectoriel semi-stable). Rappelons tout d'abord qu'un fibré en droites L sur une variété algébrique est dit numériquement effectif (nef) si l'intersection $L.C$ est positive ou nulle pour toute courbe C dans X. Une surface X de type général est dite minimale si le fibré canonique K_X est nef.

3.4.3. Théorème. — *Soit X une surface de type général minimale telle que $c_1^2 - 2c_2 > 0$, alors la restriction $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\Sigma}$ est gros pour toute surface irréductible horizontale de X_1.*

Démonstration. — Soit Σ une surface horizontale de X_1. Le groupe de Picard de X se décompose

$$Pic(X_1) = Pic(X) \oplus \mathbb{Z}[u]$$

où $u := \mathcal{O}_{X_1}(1)$. On peut donc écrire $\Sigma = ku - \pi^\star F$ pour un certain $k > 0$ et un diviseur F sur X. D'où une injection de faisceaux

$$F \hookrightarrow \pi_\star \mathcal{O}_{X_1}(k) = S^k T_X^\star.$$

En utilisant la semi-stabilité de $T_X^\star$ par rapport à K_X (voir [Yau78] ou [Bo79]) on aura

$$F \cdot K_X \leq \frac{c_1(S^k T_X^\star) \cdot K_X}{k+1} = \frac{k}{2} c_1^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(u_{|\Sigma})^2 = u^2 \cdot (ku - \pi^\star F) &= k(c_1^2 - c_2) - K_X \cdot F \\ &\geq \frac{k}{2}(c_1^2 - 2\,c_2) > 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(u_{|\Sigma}) \cdot \pi^\star K_X = u \cdot K_X \cdot (ku - \pi^\star F) &= kc_1^2 - K_X \cdot F \\ &\geq \frac{k}{2} c_1^2 > 0.\end{aligned}$$

Grâce à la formule de Riemann-Roch et puisque K_X est nef on déduit directement que $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\Sigma}$ est gros. □

En applicant le théorème 3.4.3. aux composantes horizontales de B_1, S. Lu et S.T. Yau [LuYa90] ont obtenu le résultat suivant qui est en fait une conséquence directe du théorème 3.3.4.

3.4.4. Théorème. — *Soit X une surface de type général telle que $c_1^2 - 2c_2 > 0$. Alors, toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$ est algébriquement dégénérée.*

Remarquons que S. Lu a récemment résolu le cas $c_1^2 = 2c_2$ (voir [Lu96]).

La construction des fibrés des jets de Demailly donne un espoir de pouvoir itérer ce qui a été fait ci-dessus et d'obtenir une condition meilleure que $c_1^2 > 2c_2$ sous laquelle on a la dégénerescence algébrique des courbes entières dans les surfaces de type général. Malheureusement, il est difficile de trouver une décomposition simple des fibrés $E_{k,m} T_X^\star$ pour pouvoir calculer leur caractéristique d'Euler. Cependant, pour $k = 2$ et sur une surface X on a une filtration relativement simple

$$\mathrm{Gr}^\bullet E_{2,m} T_X^\star = \bigoplus_{0 \leq j \leq m/3} S^{m-3j} T_X^\star \otimes K_X^j.$$

Ceci donne

$$\chi\big(E_{2,m}T_X^\star\big) = \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

Lorsque X est une surface de type général, en utilisant un théorème d'annulation de Bogomolov [Bo79] ceci implique le résultat énoncé dans [Dem96].

3.4.5. Théorème. — *Soit X une surface de type général, alors*

$$h^0(X, E_{2,m}T_X^\star) \geq \frac{m^4}{648}(13c_1^2 - 9c_2) + O(m^3).$$

Par conséquent $\mathcal{O}_{X_2}(1)$ est gros et admet une métrique singulière non triviale à courbure positive sur X_2 dès que $13c_1^2 - 9c_2 > 0$.

Remarquons (voir [Dem96]) que le fibré

$$\mathcal{O}_{X_2}(2,1) := \pi^*\mathcal{O}_{X_1}(2) \otimes \mathcal{O}_{X_2}(1)$$

est relativement nef par rapport à la projection $X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X$ et qu'on a un isomorphisme

$$\pi_*\big(\mathcal{O}_{X_2}(2,1)\big) \simeq E_{2,m}T_X^\star,$$

il est intéressant d' étudier sa restriction aux composantes de B_2. Ceci est fait dans la proposition suivante.

3.4.6. Proposition. — *Soit X une surface minimale de type général. Si $c_1^2 - \frac{9}{7}c_2 > 0$, alors la restriction de $\mathcal{O}_{X_2}(2,1)$ à toute composante horizontale (se projetant sur X) de dimension 3 de B_1 différente de D_2 est gros.*

Démonstration. — On va procéder comme dans la démonstration du théorème de Miyaoka 3.4.3. Soit Σ une composante irréductible horizontale de B_2 de dimension 3 et notons $u_1 = c_1\big(\pi_{1,2}^*\mathcal{O}_{X_1}(1)\big)$ et $u_2 = c_1\big(\mathcal{O}_{X_2}(1)\big)$. Dans $Pic(X_2) = Pic(X) \oplus \mathbb{Z}u_1 \oplus \mathbb{Z}u_2$, on trouve alors une égalité

$$\Sigma = a_1u_1 + a_2u_2 - \pi_{0,2}^*F$$

pour certains $a_1,\ a_2 \in \mathbb{Z}$ et un diviseur F sur X. Puisque Σ est effective, on doit avoir $a_2 \geq 0,\ a_1 + a_2 \geq 0$. En plus, F peut être vu comme un sous faisceau de $\big(\pi_{0,k}\big)_*\big(\mathcal{O}_{X_2}(a_1,a_2)\big) \subset E_{2,m}T_X^\star$ ou $m = a_1 + a_2$. Par conséquent, il y a un morphisme non trivial

$$F \hookrightarrow S^{m-3j}T_X^* \otimes K_X^j$$

pour un certain j, et l'inégalité de semistabilité donne

$$F \cdot K_X \leq \frac{m-j}{2}K_X^2 \leq \frac{m}{2}c_1^2.$$

Un calcul aisé donne

$$(2u_1 + u_2)^2 \cdot Y = (a_1 + a_2)(13\,c_1^2 - 9\,c_2) - 12\,c_1 \cdot F \geq m(7\,c_1^2 - 9\,c_2).$$

La surface Σ étant différente de D_2 en utilisant le fait que $\mathcal{O}_{X_2}(2,1)$ est relativement nef et le théorème d'annulation de Bogomolov pour les surfaces de type général [Bo79], on déduit que $\mathcal{O}_{X_2}(2,1)_{|\Sigma}$ est gros. □

La proposition 3.4.6 implique que la relevée dans X_2 de toute courbe entière non constante dans une surface de type général avec $c_1^2 - \frac{9}{7}c_2 > 0$ est nécessairement contenue dans une sous-espace de codimension ≥ 2 dans X_2. Il reste à vérifier, pour conclure à la dégénérescence algébrique, que la restriction de $\mathcal{O}_{X_2}(2,1)$ à toute surface horizontale de X_2 est encore gros. Ceci paraît difficile à vérifier par des techniques semblables à celles utilisées dans la démonstration de 3.4.6 car on ignore le cône effectif des 2-cycles dans X_2. Remarquons, enfin, qu'il se peut que le résultat 3.4.6 soit suffisant pour conclure à la dégénérescence algébrique, grâce au fait que les relevées de notre courbe entière dans X_1 et X_2 sont solutions de deux feuilletages algébriques en courbes sur des surfaces de X_1 et X_2 induits respectivement par V_1 et V_2. Ceci est bien sûr très restrictif.

Chapitre II

CONNEXIONS MÉROMORPHES PROJECTIVES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES HYPERBOLIQUES

1. Introduction : la conjecture de Kobayashi

En 1970 S. Kobayashi a conjecturé qu'une hypersurface générique dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de degré d très grand par rapport à n est hyperbolique, et que son complémentaire est hyperbolique pour $d \geq 2n+1$ [Kob70]. Ici le terme générique est pris au sens de la topologie de Zariski dans l'espace $P_{n,d}$ de toutes les hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Par le théorème de stabilité de Brody ([Br78]), M. Zaidenberg ([Za89]) a observé que pour $n, d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $H_{n,d}$ des hypersurfaces hyperboliques dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, est un ouvert pour la topologie classique de Hausdorff dans $P_{n,d}$. Il en résulte qu'une caractérisation algébrique de l'hyperbolicité, c'est-à-dire une réponse positive à l'une des questions de I.3.4, entraînerait cette conjecture.

Malheureusement, trouver un tel critère pour l'hyperbolicité est apparemment loin d'être évident aujourd'hui. Cependant, dans les dix dernières années, il a eu des progrès notables en direction de la conjecture de Kobayashi (mentionnée plus haut). En effet, des résultats interessants ont été obtenus pour le cas des complémentaires de courbes dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ avec un nombre donné k de composantes irréductibles : citons les résultats de M. Green ([Gre75], [Gre77]), V.A. Babets ([Ba84]) et récemment le travail de Dethloff-Schumacher-Wong ([DSW92], [DSW94]), où la théorie de Nevanlinna est utilisée comme outil fondamental. Des méthodes de géométrie différentielle, notamment des techniques de métriques sur les jets, ont aussi été appliquées dans le travail de H. Grauert ([Gra89]) pour l'étude de ce problème.

Récemment, utilisant une construction explicite de différentielles de 2-jets, Y.-T. Siu et S.K. Yeung ([SiYe94]) ont pu traiter le cas difficile du complémentaire d'une courbe générique lisse de degré $\geq 5\cdot 10^{13}$ dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Auparavant, M.G. Zaidenberg dans [Za89] avait montrer qu'il existe une courbe lisse de degré $d \geq 5$ (resp. une surface de degré pair ≥ 350) dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$) ayant un complémentaire hyperbolique (voir aussi [Za 86,87]).

Concernant le cas compact de la conjecture, pour $n = 2$, la réponse est bien connue : une courbe plane lisse de degré d est hyperbolique si et seulement si $g = (d-1)(d-2)/2 \geq 2$, c'est à dire si $d \geq 4$. Lorsque $n > 2$, où la borne espérée est $2n-1$, un nombre conséquent d'exemples avait été construit. R. Brody et M. Green ([GrGr77]) ont donné le premier exemple de surfaces hyperboliques lisses dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ pour tout degré pair $d \geq 50$. A.M. Nadel ([Na89]) a obtenu des exemples de surfaces hyperboliques pour des degrés $d = 6p+3 \geq 21$. Des exemples ont été trouvés aussi par Adashi-Suzuki ([AS90]). Récemment, K. Masuda et J. Noguchi ([MaNo93]) ont montré l'existence de tels exemples en dimension arbitraire $n > 0$; mais le degré des hypersurfaces construites est très grand par rapport à leurs dimensions.

Dans ce qui suit on utilisera un nouveau concept de connexion méromorphe projective qui servira à construire des opérateurs wronskiens globaux agissant sur les jets de courbes holomorphes. Grâce à un théorème d'annulation du Wronskien reposant sur des hypothèses de négativité de la courbure de Ricci, et généralisant des résultats antérieurs de Green-Griffiths ([GrGr80]), Siu et Nadel ([Na89]), nous donnerons des exemples explicites de familles algébriques de surfaces algébriques dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ de degré quelconque $d \geq 11$ (voir [EG96] et [DEG97]). Remarquons que dans une prépublication récente Y.-T. Siu et S.K. Yeung ([SiYe97]) ont retrouvé le même résultat par des méthodes quelque peu différentes.

2. Théorème d'annulation du Wronskien

Soit X une variété complexe de dimension n. En reprenant des idées de Y.-T. Siu ([Si87]) et de A.M. Nadel ([Na89]), nous considérerons des connexions méromorphes ∇ opérant sur le fibré tangent T_X, c'est-à-dire des opérateurs définis par la relation

$$(*) \qquad \nabla_w v = \sum_{1\leq i,k\leq n} \Big(w_i \frac{\partial v_k}{\partial z_i} + \sum_{1\leq j\leq n} \Gamma_{ij}^k w_i v_j \Big) \frac{\partial}{\partial z_k} = d_w v + \Gamma \cdot (w, v)$$

agissant sur des vecteurs tangents $w = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, $v = \sum_k v_k \frac{\partial}{\partial z_k}$, et tels que les symboles de Christoffel

$$\Gamma = (\Gamma_{ij}^k)_{1\leq i,j,k\leq n},$$

calculés relativement à des systèmes de coordonnées holomorphes $(z_1, \ldots, z_n)$ quelconques, sont méromorphes.

Soit B le diviseur des pôles de ∇ (c'est-à-dire de ces coefficients Γ_{ij}^k) et $b \in H^0(X, \mathcal{O}(B))$ la section canonique associée. Alors $b\nabla$ est un opérateur à coefficients holomorphes.

Étant donné une courbe holomorphe $f : \Delta_r \to X$ non contenue dans le support $|B|$ de B, on définit inductivement les dérivées covariantes $f', f''_\nabla, \ldots, f^{(n)}_\nabla$ par

$$f^{(k+1)}_\nabla = \nabla_{f'}(f^{(k)}_\nabla) \ .$$

Le Wronskien de f relativement à ∇ est la section méromorphe de $f^*(\Lambda^n T_X) = f^*(K_X^{-1})$ telle que

$$W_\nabla(f) = f' \wedge f''_\nabla \wedge \cdots \wedge f^{(n)}_\nabla \ .$$

En compensant les pôles du Wronskien à l'aide d'une puissance de b, on obtient une section holomorphe $b(f)^{\frac{n(n-1)}{2}} W_\nabla(f)$, à valeurs dans le fibré en droites $f^*(K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_X(\frac{1}{2}n(n-1)B))$. Notre point de départ est le théorème suivant dû à Y.-T. Siu ([Si87]).

2.1. Théorème. — *Soit X une variété complexe compacte de dimension n munie d'une connexion méromorphe ∇ de diviseur des pôles B. Si $K_X \otimes \mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{2}n(n-1)B\big)$ est ample, alors pour toute courbe entière non constante $f : \mathbb{C} \to X$, on a*

$$f(\mathbb{C}) \subset |B| \ \ \text{ou} \ \ W_\nabla(f) \equiv 0 \ .$$

La démonstration initiale de Y.-T. Siu reposait sur une généralisation très élaborée du deuxième théorème fondamental de Nevanlinna. Le théorème 4.2.1 peut en fait se voir comme un cas particulier d'un théorème plus général énoncé par Green et Griffiths ([GrGr80]). La démonstration de [GrGr80] est incomplète ; une démonstration complète reposant sur une étude de la géométrie des espaces fibrés des jets est donnée dans [Dem96]. Ainsi, le théorème 4.2.1 se déduit du théorème 3.3.4 et plus précisément de son corollaire 3.3.5 du premier chapitre ci-dessus appliqué à l'opérateur $P = b^{\frac{n(n-1)}{2}} W_\nabla$, à valeurs dans le dual A^{-1} du fibré

$$A = K_X \otimes \mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{2}n(n-1)B\big),$$

l'opérateur P étant d'ordre n et de degré $m = \frac{n(n+1)}{2}$.

Dans le cas où f est une courbe de Brody, une démonstration beaucoup plus simple reposant sur les lemmes suivants 2.2 et 2.3 sera donnée ([EG96]). Ce cas est suffisant pour traiter le problème de l'hyperbolicité d'une variété compacte, d'après le théorème de Brody (Chapitre 2).

2.2. Lemme. — *Soit L un fibré holomorphe en droites sur $\mathbb{C}$, équipé d'une métrique hermitienne h à courbure négative. Si S est une section holomorphe globale bornée de L, alors S est identiquement nulle.*

Démonstration. — On a par l'équation de Lelong-Poincaré généralisée appliquée à une section méromorphe non identiquement nulle S d'un fibré en droites L :

$$i\partial\overline{\partial} \ln |S|_h^2 = 2\pi \sum m_j [Z_j] - i\Theta_h(L)$$

où les ensembles Z_j sont les composantes irréductibles de l'ensemble des zéros et pôles de S avec multiplicités respectives m_j et courants d'intégrations $[Z_j]$, et où $\Theta_h(L)$ est la courbure de L. Appliquant cette formule à notre section holomorphe, supposée non identiquement nulle, et parce que l'ensemble des pôles est vide et la courbure est négative dans notre cas, on obtient

$$i\partial\overline{\partial} \ln |S|_h^2 > 0 ,$$

ce qui implique que $\ln |S|_h$ est strictement sousharmonique et bornée sur $\mathbb{C}$. Ceci est une contradiction puisque toute fonction sousharmonique bornée sur $\mathbb{C}$ est constante. □

2.3. Lemme. — *Supposons que ∇ est une connexion méromorphe sur une variété complexe compacte de dimension n. Soit b une section holomorphe d'un fibré en droites L sur X tel que $b\nabla$ est holomorphe et soit $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe de Brody dans X. Alors, la section $(b \circ f)^{p-1} \otimes f_\nabla^{(p)}$ est bornée sur $\mathbb{C}$ pour tout entier $p > 1$.*

Démonstration. — Puisque X est compacte, il est suffisant de démontrer le lemme sur $f^{-1}(V)$ pour tout ouvert relativement compact V d'un ouvert de trivialisation U de T_X et L simultanément. Soit θ_X et θ_L les trivialisations respectives de T_X et de L. Notons δ la distance entre $f^{-1}(V) \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \smallsetminus f^{-1}(U)$.

On prétend que δ est strictement positive, sinon il existerait deux suites $(x_n)_n \subset f^{-1}(V)$ et $(y_n) \subset \mathbb{C} \smallsetminus f^{-1}(U)$ telles que $|x_n - y_n|$ tend vers 0 à l'infini. Mais f est une courbe de Brody d'où

$$|f(x_n - f(y_n)|_w \leq |x_n - y_n| \ ,$$

où w est une métrique hermitienne fixée sur X. Ceci est bien sûr contradictoire puisque V est relativement compacte dans U. Soit $z_0 \in f^{-1}(V)$ et considérons le disque $\Delta_0 \subset f^{-1}(V)$ de centre z_0 et de rayon $r = \frac{\delta}{2}$. Alors, sur Δ_0 la formule intégrale de Cauchy implique

$$\frac{d\sigma}{dz}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_0} \frac{\sigma(s)}{(s-z)^2} \ ds$$

où $\sigma = \theta_X \circ f'$ est l'expression de f' dans la trivialisation θ_X. D'où $\left\| \frac{d\sigma}{dz}(z_0) \right\|$ est majoré par $\frac{1}{\delta}\|\sigma\|$, où $\| \ \ \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$. Or on a

$$\frac{\nabla f'}{dz} \simeq_{\theta_X} \frac{d\sigma}{dz} + \big(A(f(z)) \cdot \sigma\big) \cdot \sigma \ ,$$

sur le disque Δ_0, où A est la forme de connexion de ∇ par rapport à θ_X. Puisque d'une part, f' est bornée car f est de Brody et d'autre part, $\theta_L(b) {\cdot} A$ est holomorphe sur U d'où bornée sur $\overline{V}$, il en résulte que $\big(\theta_L(b) \circ f\big) \otimes f''_\nabla$ est bornée sur $f^{-1}(V)$. La preuve est donc complète pour $p = 2$. En itérant nos arguments aux dérivées d'ordre supérieur de $\big(\theta_L(b) \circ f\big) \otimes f''$ on peut conclure pour tout $p > 2$. □

On peut maintenant donner la preuve suivante du théorème 2.1.

Démonstration du théorème 2.1. — Considérons la section :

$$S : z \longmapsto f'(z) \wedge \big(b \circ f(z) \cdot f''_\nabla(z)\big) \wedge \cdots \wedge \big(b \circ f(z)\big)^{n-1} \cdot f^{(n)}_\nabla(z)$$

du fibré en droites $f^*\Big(K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_X\big(\frac{n(n-1)}{2}B\big)\Big)$ sur $\mathbb{C}$. Alors S est holomorphe par définition de b, en plus elle est bornée sur $\mathbb{C}$ grâce au lemme 2.3. Maintenant, puisque $f^*\Big(K_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_X\big(\frac{n(n-1)}{2}B\big)\Big)$ est supposé à courbure négative on déduit par le lemme 2.2 que S doit être identiquement nulle. □

3. Connexions projectives partielles

Une observation importante est de voir que pour définir le Wronskien W_∇, on n'a pas besoin de connaître entièrement le tenseur Γ_{ij}^k, mais seulement modulo des tenseurs de la forme $\alpha_i\delta_{jk} + \beta_j\delta_{ik}$. En effet, soit $\widetilde{\nabla}$ une autre connexion telle qu'il existe des 1-formes méromorphes α et β avec

$$\widetilde{\nabla}_w v = \nabla_w v + \alpha(w)\cdot v + \beta(v)\cdot w\ ,$$

pour tous champs de vecteurs v, w.

On vérifie alors facilement par récurrence sur k que $f_{\widetilde{\nabla}}^{(k)}$ est une somme de $f_\nabla^{(k)}$ et d'une combinaison linéaire des dérivées covariantes d'ordre inférieur, par suite on a

$$W_\nabla = W_{\widetilde{\nabla}}\ .$$

Ceci permet d'étendre le théorème d'annulation du Wronskien au cas des connexions projectives partielles , définies comme suit :

3.1. Définition. — *Une connexion projective partielle ∇ sur X est une section du faisceau quotient du faisceau des connexions méromorphes modulo l'addition de tenseurs méromorphes de la forme*

$$(w,v) \longmapsto \alpha(w)\cdot v + \beta(v)\cdot w\ .$$

En d'autres termes, ∇ est définie par la donnée de connexions méromorphes ∇^j sur les ouverts U_j d'un recouvrement de X, en sorte qu'on ait des relations de compatibilité

$$\nabla_w^k v - \nabla_w^j v = \alpha_{jk}(w)\cdot v + \beta_{jk}(v)\cdot w \ \text{ sur }\ U_j\cap U_k\ .$$

Exemple type. — Soit W une variété complexe sur laquelle un groupe de Lie G agit librement et proprement. Soit $X = W/G$ la variété quotient et $\pi : W \to X$ la projection canonique. Étant donné une connexion méromorphe $\widetilde{\nabla}$ sur W et une section locale $\sigma : U \subset W/G \to W$ de π, on peut définir une connexion $\nabla^\sigma = \pi_* \circ (\sigma^*\widetilde{\nabla})$, où $\sigma^*\widetilde{\nabla}$ est la connexion sur $\sigma^* T_W$ et $\pi_* : T_W \to \pi^* T_X$ est la différentielle de la projection. La connexion ∇^σ est donnée par

$$\nabla_w^\sigma v = \pi_*\big(\widetilde{\nabla}_{\sigma_* w}(\sigma_* v)\big) \tag{1}$$

pour tout couple de champs (w,v) sur U. Bien sûr, elle peut dépendre du choix de σ, néanmoins on a le critère simple suivant qui assure le recollement en une connexion projective partielle intrinsèque sur W/G tout entier.

3.2. Proposition. — *Soit $\widetilde{\nabla}$ une connexion méromorphe sur W. Supposons que $\widetilde{\nabla}$ satisfait les conditions suivantes :*

(i) $\widetilde{\nabla}$ est G-invariante ;

(ii) Pour tout couple de champs G-invariants v et τ sur W tel que τ soit dans le fibré tangent relatif $T_{W/X} \subset T_W$, il existe des 1-formes méromorphes α et β le long de $T_{W/X}$ telles que

$$\widetilde{\nabla}_\tau v - \alpha(\tau)v, \quad \widetilde{\nabla}_v\tau - \beta(\tau)v$$

soient tangents à $T_{W/X}$.

Alors la formule (1) *définit une connexion projective partielle ∇ globale sur X et indépendante du choix de la section locale σ.*

Démonstration. — On peut supposer que $W = X \times G$, ce qui n'est pas restrictif compte tenu du caractère local de l'assertion. La vérification se fait alors aisément en écrivant

$$\widetilde{\nabla} = d_X + d_G + \widetilde{\Gamma}, \quad \widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}(x, g), \quad x \in X, \quad g \in G \ ,$$

où d_X est une connexion sur X, par exemple la dérivée par rapport à des coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ sur X, d_G la connexion canonique invariante à gauche sur X, et $\widetilde{\Gamma}(x; g)$ un tenseur à valeurs dans $T_W^* \otimes T_W^* \otimes T_W$.

D'après *i)*, $\widetilde{\Gamma}(x, g) = \Gamma(x)$ ne dépend en fait que de x. On écrit alors $\sigma(x) = (x, h(x))$ où $h : U \to G$ est une application holomorphe. Soient v et w deux champs de vecteurs locaux sur $U \subset X$. Puisque $\sigma_* v = v + dh(v)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\nabla^\sigma_w v &= \pi_*(\sigma^* \widetilde{\nabla}_w v) \\
&= \pi_*(d_{\sigma_* w}\sigma_* v + (\widetilde{\Gamma} \circ \Gamma)(\sigma_* w, \sigma_* v) \\
&= \pi_*\Big(d_{w+dh(w)}\big(v + dh(v)\big) + \widetilde{\Gamma}(x, h(x))\big(w + dh(w), v + dh(v)\big)\Big) \\
&= \pi_*\Big(d_w v + d^2h(x, v) + \Gamma(x)\big(w + dh(w), v + dh(v)\big)\Big) \ .
\end{aligned}$$

Or v, w, $dh(v)$, $dh(w)$ dépendent seulement de $x \in X$ et on peut donc les voir comme des champs de vecteurs G-invariants sur W; d'autre part $dh(v)$, $dh(w)$ sont tangents aux orbites de G.

Il en résulte grâce à *ii)* que $\Gamma(x)(dh(w), v) - \alpha(dh(w))v$, $\Gamma(x)(w, dh(v)) - \beta(dh(v))w$, $\Gamma(x)(dh(w), dh(v))$ sont tangents aux orbites de G, c'est-à-dire, dans le noyau de π_*. On obtient par conséquent

$$\nabla^\sigma_w v = d_w v + \Gamma(x)(w, v) + d(dh(w))v + \beta(dh(v))w \ ,$$

ce qui signifie que les connexions $\nabla_{|U_j}$ définies par des sections $\sigma_j : U_j \to W$ quelconques peuvent se recoller en une connexion projective partielle globale ∇ sur X. □

Dans le cas spécial $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\mathbb{C}^*$, on obtient

3.3. Corollaire. — *Soient $\widetilde{\nabla} = d + \widetilde{\Gamma}$ une connexion méromorphe sur $\mathbb{C}^{n+1}$, $\varepsilon = \sum z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ le champ de vecteurs d'Euler et $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ la projection canonique. Alors $\widetilde{\nabla}$ induit une connexion projective partielle sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ dès que*

i) les symboles de Christoffel Γ^k_{ij} sont des fonctions rationnelles homogènes de degré -1 ;

ii) il existe des fonctions méromorphes α, β et des 1-formes méromorphes γ, η telles que pour tous champs de vecteurs v, w on ait $\widetilde{\Gamma}(\varepsilon, v) = \alpha v + \gamma(v)\varepsilon$ et $\widetilde{\Gamma}(w, \varepsilon) = \beta w + \eta(w)\varepsilon$.

4. Cas de certaines classes d'hypersurfaces algébriques dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Soit X une variété complexe de dimension n munie d'une connexion projective partielle ∇, et soit Y une hypersurface de X non contenue dans le diviseur des pôles de ∇. L'hypersurface Y est dite totalement géodésique par rapport à la connexion ∇ si $\nabla_w v$ est un champ de vecteurs tangent à Y chaque fois que v, w sont tangents à Y, autrement dit si la restriction $\nabla_{|Y}$ définit une connexion sur T_Y. Cette propriété peut être caractérisée de la façon suivante :

4.1. Lemme. — *L'hypersurface Y, localement définie par $s = 0$, est totalement géodésique par rapport à ∇ si et seulement s'il existe localement au voisinage de Y des fonctions méromorphes a_i, b_j et c_{ij} telles que*

$$(2) \qquad \sum_{1\le k\le n} \Gamma^k_{ij}\frac{\partial s}{\partial z_k} + a_i\frac{\partial s}{\partial z_j} + b_j\frac{\partial s}{\partial z_i} + sc_{ij} = \frac{\partial^2 s}{\partial z_i \partial z_j}, \quad 1 \le i, j \le n\ .$$

Démonstration. — Un vecteur v est tangent à Y si et seulement si $ds\cdot v = 0$ le long de $s = 0$. En différentiant cette identité le long d'un autre vecteur w tangent à Y, on obtient

$$d^2 s\ (w, v) + ds\ (d_w v) = 0$$

le long de $s = 0$. D'autre part, la condition que $\nabla_w v = d_w v + \Gamma(w, v)$ est tangent à Y est

$$ds\ \nabla_w v = ds\ (d_w v) + ds \circ \Gamma\ (w, v) = 0\ .$$

En faisant la soustraction, on obtient la condition équivalente suivante

$$(d^2 s - ds \circ \Gamma)(w, v) = 0$$

pour tous champs de vecteurs v, w dans le noyau de ds le long de $s = 0$, ce qui finit la démonstration. □

À partir de ce lemme on peut donner une signification géométrique à l'annulation du Wronskien de la façon suivante :

4.2. Lemme. — *Soit $Y \subset X$ une hypersurface analytique totalement géodésique par rapport à une connexion méromorphe ∇, et soit $n = \dim X$. Soit $f : \Delta_R \to X$ une courbe holomorphe telle que $W_\nabla(f) \equiv 0$. Supposons que pour un point $t_0 \in \Delta_R$*

i) $f(t_0)$ n'est pas contenue dans le lieu des pôles de ∇ ;

ii) le système de vecteurs $\big(f'(t), f''_\nabla(t), \ldots, f^{(n-1)}_\nabla(t)\big)$ atteint son rang générique maximal en $t = t_0$;

iii) $f(t_0) \in Y$ et $f'(t_0), f''_\nabla(t_0), \ldots, f^{(n-1)}_\nabla(t_0) \in T_{Y,f(t_0)}$.

Alors $f(\Delta_R) \subset Y$.

Démonstration. — Puisque le Wronskien $W_\nabla(f)$ est nul, les champs de vecteurs $f', f''_\nabla, \ldots, f^{(n)}_\nabla$ sont linéairement dépendants et satisfont donc une relation non triviale

$$u_s(t)f'(t) + u_2(t)f''_\nabla(t) + \cdots + u_n(t)f^{(n)}_\nabla(t) = 0$$

avec des coefficients méromorphes $u_j(t)$ sur Δ_R. On peut toujours supposer $u_n \not\equiv 0$, en prenant éventuellement des dérivées à l'aide de ∇, et on peut donc écrire

$$f^{(n)}_\nabla = v_1 f' + v_2 f''_\nabla + \cdots + v_{n-1} f^{(n-1)}_\nabla$$

pour certaines fonctions méromorphes $v_1, \ldots, v_{n-1}$. On peut même supposer $v_j = 0$ sauf pour des indices $j = j_k \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que $(f^{(j_k)}_\nabla(t))$ est un ensemble minimal de générateurs en $t = t_0$. Donc les coefficients v_j sont bien définis et holomorphes au voisinage de t_0. Par *i)* et *iii)* on peut voir, en dérivant, que $f^{(k)}_\nabla(t_0) \in T_{X,f(t_0)}$ pour tout $k \geq 1$. Maintenant, si $s = 0$ est une équation locale de Y, de la caractérisation 4.1 des hypersurfaces totalement géodésiques, la dérivée d'ordre k, $\frac{d^k}{dt^k}(s \circ f(t))$ peut être écrite sous forme d'une combinaison linéaire

$$\frac{d^k}{dt^k}(s \circ f(t)) = \gamma_{0k}(t) s \circ f(t) + \sum_{1 \leq j \leq k} \gamma_{ik}(t)\ ds_{f(t)}\ f^{(j)}_\nabla(t)$$

sur un voisinage de t_0. Ceci implique $\frac{d^k}{dt^k}(s \circ f)(t_0) = 0$ pour tout $k \geq 0$ et donc $s \circ f \equiv 0$. $\square$

L'idée originale de [Na89] est de profiter de la haute indétermination du système linéaire (2) en les inconnues Γ^k_{ij}, a_i, b_j et c_{ij}, pour trouver une connexion méromorphe sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ par rapport à laquelle toute hypersurface membre d'un système linéaire (Y_α) assez grand soit totalement géodésique. La définition suivante introduite dans [EG96] sera commode.

4.3. Définition. — *Soient* $k_0, \ldots, k_n$ *et* d *des entiers tels que* $0 \leq k_j < \frac{d}{2}$ *; on note* $S_{d;k_0,\ldots,k_n}$ *l'espace des polynômes homogènes* s *de degré* d *éléments de* $\mathbb{C}[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ *tel que chaque monôme de* s *est multiple de* $z_j^{d-k_j}$ *pour un certain* j.

Remarquons que, dans ces conditions, tout élément $s \in S_{d;k_0,\ldots,k_n}$ s'écrit d'une façon unique comme $s = s_0 + s_1 + \cdots + s_n$ avec s_j multiple de $z_j^{d-k_j}$. Considérons une telle hypersurface $Y = \{s = 0\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, et le système linéaire associé $Y_\alpha = \{\alpha_i s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

On va construire une connexion méromorphe $\widetilde{\nabla}$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ par rapport à laquelle le cône algébrique $\widetilde{Y}_\alpha \subset \mathbb{C}^{n+1}$ au-dessus de Y_α est totalement géodésique pour tout α. Il suffit pour cela de résoudre le système (2) en fixant par exemple $a_i = b_j = c_{ij} = 0$, ce qui conduit à résoudre le système linéaire

$$(3) \qquad \sum_{0 \leq k \leq n} \widetilde{\Gamma}^k_{ij} \frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \frac{\partial s_\ell}{\partial z_i \partial z_j}, \quad 0 \leq i, j, \ell \leq n\ .$$

Ce système admet une solution unique si on suppose

$$\delta := \det\big(\partial s_\ell/\partial z_k\big)_{0\le k,\ell\le n} \not\equiv 0,$$

dans ce cas l'élément s est dit non dégénéré.

4.4. Proposition. — *Soit $s = s_0 + \cdots + s_n \in S_{d;k_0,\ldots,k_n}$ un élément non dégénéré. Alors la solution $\widetilde\nabla$ du système linéaire (3) induit sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une connexion projective partielle ∇ par rapport à laquelle toute hypersurface*

$$Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots \alpha_n s_n = 0\}$$

est totalement géodésique. De plus, le diviseur des pôles B de ∇ est de degré inférieur ou égal à $n+1+\sum\limits_{j=0}^{n} k_j$.

Démonstration. — Les solutions $\widetilde\Gamma^k_{ij}$ de (3) sont des fonctions rationnelles

$$\widetilde\Gamma^k_{ij} = \frac{\delta^k_{ij}}{\delta}\ ,$$

où δ^k_{ij} est le polynôme homogène égal au déterminant obtenu en remplaçant la colonne d'indice k dans $\det\big(\partial s_\ell/\partial z_k\big)_{0\le k,\ell\le n}$ par la colonne $\big(\partial^2 s_k/\partial z_i\partial z_j\big)_{0\le k\le n}$, donc homogènes de degré -1 et *i)* est vérifiée. Grâce à l'identité d'Euler, on a :

$$\sum_{0\le i,k\le n} z_i \widetilde\Gamma^k_{ij}\frac{\partial s_\ell}{\partial z_k} = \sum_{0\le i\le n} z_n \frac{\partial^2 s_\ell}{\partial z_i\partial z_j}(d-1)\frac{\partial s_\ell}{\partial z_j},\quad 0\le \ell, j\le n\ .$$

Par suite la condition $\delta\not\equiv 0$ entraîne $\big(\sum\limits_i z_i\widetilde\Gamma^k_{ij}\big)_{j,k} = (d-1)\,\mathrm{Id}$, d'où puisque $\widetilde\nabla$ est symétrique ($\widetilde\Gamma^k_{ij} = \widetilde\Gamma^k_{ji}$)

$$\widetilde\Gamma(\varepsilon, v) = \widetilde\Gamma(v,\varepsilon) = (d-1)\,\mathrm{Id}\ .$$

La propriété 3.3, *ii)* est donc également vérifiée.

Finalement, $\partial s_\ell/\partial z_k$ est un polynôme homogène de degré $d-1$ qui est divisible par $z_\ell^{d-k_\ell-1}$, d'où δ est un polynôme homogène de degré $(n+2)(d-1)$ qui est divisible par $\prod\limits_{0\le\ell\le n} z_\ell^{d-k_\ell-1}$. De même, $\partial^2 s_\ell/\partial z_i\partial z_j$ est de degré $d-2$ et divisible par $z_\ell^{d-k_\ell-2}$. Ceci implique que S^k_{ij} est divisible par $\prod\limits_{0\le\ell\le n} z_\ell^{d-k_\ell-2}$. Après simplification de ce facteur commun, le degré du dénominateur devient

$$\sum_{0\le\ell\le n}\big((d-1)-(d-k_\ell-2)\big) = \sum_{0\le\ell\le n}(k_\ell+1) = n+1+\sum_{\ell=0}^{n} k_\ell\ . \qquad \square$$

Une application du théorème 2.1 permet alors de prouver la dégénérescence des courbes holomorphes entières (solution de la conjecture de Green-Griffiths dans le cas particulier des hypersurfaces du type précédent).

4.5. Théorème. — *Soit $s = s_0 + \cdots + s_n \in S_{d;k_0,\ldots,k_n}$ un polynôme non dégénéré tel que $Y := \{s = 0\}$ soit une hypersurface lisse dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Soient*

$Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \cdots + \alpha_n s_n = 0\}$ et B le diviseur des pôles de la connexion projective partielle ∇ associée à s. Supposons que

$$d > n + 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big(n + 1 + \sum_{\ell=0}^{n} k_\ell\Big)\ .$$

Alors, toute courbe entière non constante tracée sur Y est algébriquement dégénérée et vérifie

$$\textit{ou bien}\ \ f(\mathbb{C}) \subset Y \cap (B)\ \ \textit{ou bien}\ \ f(\mathbb{C}) \subset Y \cap Y_\alpha$$

pour une certaine hypersurface Y_α distincte de Y.

Démonstration. — Si $d > n + 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\Big(n + 1 + \sum\limits_{\ell=0}^{k} k_\ell\Big)$ alors $K_Y \otimes \mathcal{O}\Big(-\frac{(n-1)(n-2)}{2}B\Big)$ est ample, puisque d'après la proposition 4.4 le degré de B est $\le n + 1 + \sum\limits_{\ell=0}^{n} k_\ell$. D'où, par le théorème 2.1, ou bien $f(\mathbb{C}) \subset |B|$ ou bien $W_\nabla(f) \equiv 0$. La condition $W_\nabla(f) \equiv 0$ permet, d'après le lemme 4.2, de voir que $f(\mathbb{C})$ est contenue dans toute hypersurface Y_α qui contient les $(n-1)$ premières dérivées covariantes de f en un point générique. Or par comptage de dimension, il y a au moins une autre hypersurface $Y_\alpha \neq Y$ pour laquelle cette condition est vérifiée et donc $f(\mathbb{C}) \subset Y \cap Y_\alpha$. $\square$

Comme corollaire du théorème 4.5, on a :

4.6. Corollaire. — *Soient d, k_0, k_1, k_2, k_3 des entiers tels que $d > 8 + \sum\limits_{\ell=0}^{3} k_\ell$. Soit s un élément non dégénéré de $S_{d;k_0,\ldots,k_3}$ tel que $Y = \{s = 0\}$ est une surface lisse dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Alors toute courbe entière $f : \mathbb{C} \to Y$ est contenue dans une courbe irréductible de degré $\le d^2$ et de genre ≤ 1 dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. En particulier, la conjecture de Lang est vraie pour cette classe de surfaces algébriques dans $\mathbb{P}^3$: une telle surface qui ne contient ni courbes rationnelles ni elliptiques est hyperbolique.*

4.7. Remarque. — Dans le cas particulier des hypersurfaces de Fermat

$$Y = \{z_0^d + z_1^d + \cdots + z_n^d = 0\},$$

on fait un calcul à la main pour voir que le Wronskien a pour dénominateur $(z_0, \ldots, z_n)^{n-1}$ (le théorème 4.5 ne donne pas l'estimation optimale). Les courbes entières sont donc toutes algébriquement dégénérées dès que $d \ge n^2$. C'est un résultat démontré originellement par M. Green ([Gre75]) en utilisant la théorie de Nevanlinna.

5. Familles algébriques de surfaces hyperboliques dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^3$ une surface algébrique lisse dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ telle que $Y = \{s = 0\}$, où s est un élément non dégénéré de $S_{d;k_0,k_1,k_2,k_3}$. Pour étudier l'hyperbolicité de Y, on applique le théorème 4.5 et il reste juste à vérifier que les courbes intersections $Y \cap Y'$ sont de genre géométrique ≥ 2, où Y' est, ou bien l'ensemble des pôles de la connexion méromorphe associée à Y, ou un élément du système linéaire $\Big\{\sum_{i=0}^{3} a_i s_i = 0\Big\}$.

Considérons l'exemple suivant de [DEG97]

$$Y = \big\{z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0\big\} ,$$

défini par un élément s de $S_{d;0,0,0,2}$ tel que $s_3 = z_3^{d-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2)$ et $s_j = z_j^p$ pour $0 \leq j \leq 2$. Un calcul aisé montre que la surface Y est lisse si et seulement si

$$\sum_{j\in J} {\varepsilon_j}^{d/d-2} \neq \frac{2}{d-2}\Big(-\frac{d}{2}\Big)^{d/d-2} , \tag{4}$$

pour tout $J \subset \{0, 1, 2\}$, pour chaque choix des racines complexes d'ordre $d-2$. La connexion $\widetilde{\nabla}$ par rapport à laquelle le cône algébrique $\widetilde{Y} \subset \mathbb{C}^4$ en dessus de Y est totalement géodésique, est construite en résolvant des systèmes linéaires de déterminant principal $\delta = \det(\partial s_\ell/\partial z_k)$ égal à

$$\begin{vmatrix} dz_0^{d-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & dz_1^{d-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dz_2^{d-1} & 0 \\ 2\varepsilon_0 z_0 z_3^{d-2} & 2\varepsilon_1 z_1 z_3^{d-2} & 2\varepsilon_2 z_2 z_3^{d-2} & (d-2)z_3^{d-3}\big(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \frac{d}{d-2}z_3^2\big) \end{vmatrix}$$

$$= d^3(d-2)z_0^{d-1}z_1^{d-1}z_2^{d-1}z_3^{d-3}\Big(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \frac{d}{d-2}z_3^2\Big) \not\equiv 0 .$$

Le numérateur de $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ est le polynôme homogène obtenu en remplaçant la colonne d'indice k de δ par $(\partial^2 s_\ell/\partial z_i \partial z_k)_{0\leq \ell \leq 3}$, et $z_0^{d-2}z_1^{d-2}z_2^{d-2}z_3^{d-4}$ se simplifie dans tous les termes. Donc l'ordre des pôles de $\widetilde{\nabla}$ est 6 (comme annoncé par la proposition 4.4) et leur diviseur B est donné par

$$|B| = \Big\{z_0 z_1 z_2 z_3\Big(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \frac{d}{d-2}z_3^2\Big) = 0\Big\} .$$

Par le théorème 4.5., si $d > 10$, alors étant donné une courbe holomorphe $f : \mathbb{C} \to Y$ on a

$$(A) \quad f(\mathbb{C}) \subset |B| \cap Y \quad \text{ou} \quad (B) \quad f(\mathbb{C}) \subset Y_\alpha \cap Y$$

pour $Y_\alpha = \{\alpha_0 s_0 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ et pour certains complexes α_j, $0 \le j \le 3$ non tous nuls et tels que $Y \neq Y_\alpha$.

5.1. Lemme. — *Supposons que f soit donnée dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ par des fonctions entières $z_0(t)$, $z_1(t)$, $z_2(t)$ et $z_3(t)$ ($t \in \mathbb{C}$). Alors les conditions (A) et (B) impliquent qu'il existe $0 \le i_0 \neq j_0 \le 2$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $z_{i_0}(t) = \lambda z_{j_0}(t)$.*

Démonstration. — Supposons que f vérifie la condition (A). Alors

- si $z_3(t) = 0$ on aura
$$z_0^d(t) + z_1^d(t) + z_2^d(t) = 0$$
par conséquent f est constante, puisqu'une courbe de Fermat de degré ≥ 4 dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est hyperbolique ;
- si $\varepsilon_0 z_0^2(t) + \varepsilon_1 z_1^2(t) + \varepsilon_2 z_2^2(t) + \frac{d}{d-2} z_3^2(t) = 0$, en substituant dans l'équation $s(t) = 0$ on a
$$z_0^d(t) + z_1^d(t) + z_2^d(t) + \frac{d}{d-2} z_3^d(t) = 0$$
ceci entraîne la conclusion grâce à la remarque 4.7.

Supposons maintenant que (B) soit vérifiée. Alors on a à résoudre le système suivant
$$\begin{cases} s(t) = z_0^d(t) + z_1^d(t) + z_2^d(t) + z_3^{d-2}(t)\big(\varepsilon_0 z_0^2(t) + \varepsilon_1 z_1^2(t) + \varepsilon_2 z_2^2(t) + z_3^2(t)\big) = 0 \\ s'(t) = \alpha_0 z_0^d(t) + \alpha_1 z_1^d(t) + \alpha_2 z_2^d(t) + \alpha_3 z_3^{d-2}(t)\big(\varepsilon_0 z_0^2(t) + \varepsilon_1 z_1^2(t) + \varepsilon_2 z_2^2(t) + z_3^2(t)\big) = 0 \end{cases}$$
ce qui implique
$$s'(t) - \alpha_3 s(t) = (\alpha_0 - \alpha_3) z_0^d(t) + (\alpha_1 - \alpha_3) z_1^d(t) + (\alpha_2 - \alpha_3) z_2^d(t) = 0.$$
Ceci permet de conclure comme précédemment. □

Grâce au lemme 5.1 les conditions (A) et (B) donnent naissance à des courbes planes de la forme :
$$(1 + \lambda^d) z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}\big((\varepsilon_0 \lambda^2 + \varepsilon_1) z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2\big) = 0$$
qui contiennent une certaine projection de $f(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^2$. Des calculs faits dans le paragraphe 6 montrent que de telles courbes sont de genre géométrique ≥ 2 sous les conditions supplémentaires suivantes
$$\begin{cases} (\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq (0, 0) & \text{pour } 0 \le i, j \le 3 \\ \varepsilon_i / \varepsilon_j \neq -\theta^2 & \text{pour toute racine de } \theta^p = -1. \end{cases} \tag{5}$$
Sous les conditions (5) on a, entre autres, que le système
$$\begin{cases} 1 + \lambda^d = 0 \\ \varepsilon_i \lambda^2 + \varepsilon_j = 0 \end{cases}$$
est sans solution pour $0 \le i \neq j \le 2$. D'où le théorème d'existence suivant :

5.2. Théorème. — *Sous les conditions (4) et (5), la surface algébrique lisse $Y \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ définie par*
$$Y = \{z_0^d + z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0\},$$

est hyperbolique en tout degré $d \geq 11$.

Comme corollaire du théorème 5.2 et du corollaire 4.6 on a le résultat important suivant :

5.3. Théorème. — *Soient d, k_0, k_1, k_2 et k_3 des entiers tels qu'il existe i_0 avec $k_{i_0} \geq 2$. Si $d > 8 + \sum_{i=0}^{3} k_i$, alors l'espace $H_{3,d}$ des surfaces hyperboliques dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ est non vide. En plus, $H_{3,d}$ contient un ouvert de Zariski de $S_{d;k_0,k_1,k_2,k_3}/\mathbb{C}^* \subset P_{3,d}$, de dimension*

$$\sum_{\ell=0}^{3} \binom{k_\ell + 3}{k_\ell} - 1 \ .$$

Démonstration. — La première affirmation est une conséquence directe du théorème 5.2. Soit maintenant $\mathcal{U}$ l'ensemble de tout $s \in S_{d;k_0,k_1,k_2,k_3}$ tels que :

(i) s est non dégénérée ;

(ii) $Y = \{s = 0\}$ est lisse ;

(iii) Y est hyperbolique.

Alors $\mathcal{U}$ est un ouvert de Zariski de $S_{d;k_0,k_1,k_2,k_3}$. En effet, les conditions *(i)* et *(ii)* sont clairement des conditions ouvertes pour la topologie de Zariski. La condition *(iii)* est équivalente par le corollaire 4.6 à la non existence de courbes de genre ≤ 1 et de degrés $\leq d^2$, qui est aussi ouverte au sens de Zariski; on construit donc une famille algébrique $\{Y_{[s]}\}$ de surfaces $Y_{[s]} = \{s = 0\}$ paramétrée par $[s] \in \mathcal{U}/\mathbb{C}^*$ où $[s]$ est la classe d'équivalence des polynômes qui définissent $Y_{[s]}$. □

Soit maintenant une courbe $C \subset \mathbb{P}^2$ définie par l'équation $\sigma = 0$ où $\sigma(z_0, z_1, z_2)$ est un polynôme homogène de degré d, on peut considérer la surface X dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ définie par $z_3^d = \sigma(z_0, z_1, z_2)$. La projection

$$\begin{array}{rccl} \rho : & X & \to & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ & (z_0, z_1, z_2, z_3) & \mapsto & (z_0, z_1, z_2) \end{array} ,$$

est un morphisme fini de degré d ramifié le long de C. Donc $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \setminus C$ est hyperbolique si et seulement si son revêtement non ramifié $X \setminus \rho^{-1}(C)$ est hyperbolique, ceci est le cas lorsque X est lui-même hyperbolique. D'où le corollaire suivant du théorème 5.2.

5.4. Corollaire. — *Soit la courbe plane*

$$C = \left\{ z_0^d + z_1^d + z_2^{d-2}(\varepsilon_0 z_0^2 + \varepsilon_1 z_1^2 + z_2^2) = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1 \in \mathbb{C}^* \ .$$

Supposons qu'aucun des nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_0 + \varepsilon_1$ n'est égal à $\frac{2}{d-2}\left(-\frac{d}{2}\right)^{\frac{d}{d-2}}$ et que $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \neq -\theta^2$ si $\theta^d = -1$. Alors $\mathbb{P}^2 \setminus C$ est hyperbolique.

6. Genre géométrique des courbes planes

Dans ce paragraphe, on va calculer le genre géométrique de certaines courbes planes, spécialement celles issues du lemme 5.1. Soit C une courbe irréductible dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et $\nu : \overline{C} \to C$ la normalisation de C. On définit le faisceau δ porté par les points singuliers de C, comme étant donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\overline{C}} \longrightarrow \delta \longrightarrow 0 \ .$$

La suite exacte exacte longue de cohomologie associée donne alors le genre géométrique

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \sum_{p \in \operatorname{sing}(C)} \dim \delta_p \ ,$$

(voir par exemple [Be78] ou [GH78]). Pour les singularités monomiales on a la formule simple suivante :

6.1. Proposition. — *Avec les mêmes notations, supposons que C soit donnée en coordonnées locales x et y au voisinage d'un point singulier p par $f(x,y) = x^a - y^b$, alors*

$$\delta_p := \dim \delta_p = \frac{(a-1)(b-1)}{2} + \frac{\operatorname{pgcd}(a,b) - 1}{2} \ .$$

Démonstration. — Soit

$$\mu_p := \dim \mathbb{C}\{x,y\}/\big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\big) = (a-1)(b-1)$$

le nombre de Milnor de la singularité en p. Alors on peut conclure en utilisant la formule suivante de [Mi68]

$$\delta_p = \frac{\mu_p + r_p - 1}{2},$$

où r_p est le nombre de branches analytiques irréductibles en p. □

On va étudier maintenant les courbes issues du lemme 5.1 qui sont de la forme

$$(1 + \lambda^d) z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}\big(z_1^2(\varepsilon_0 \lambda^2 + \varepsilon_1) + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2\big) = 0 \ .$$

Puisque $1 + \lambda^2$ et $(\varepsilon_0 \lambda^2 + \varepsilon_1)$ ne s'annulent pas simultanément à cause de la condition (5), ceci se ramène à l'étude des trois courbes planes suivantes :

(a) $z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}(\varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0$;
(b) $z_2^d + z_3^{d-2}(z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0$;
(c) $\alpha z_1^d + z_2^d + z_3^{d-2}(z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + z_3^2) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$.

La courbe *(a)* est lisse (sous la condition (4)) et donc de genre ≥ 2 si $d \geq 4$. Quant aux courbes *(b)* et *(c)*, elles seront étudiées respectivement aux lemmes 6.2 et 6.3 suivants.

6.2. Lemme. — *Sous les conditions (4) et (5), la courbe plane $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ définie en coordonnées non homogènes (X, Y) par :*

$$X^d + Y^{d-2}(1 + \varepsilon_2 X^2 + Y^2) = 0$$

est hyperbolique pour $d \geq 5$.

Démonstration. — Supposons que $d \geq 5$. On vérifie, sous la condition (4) qu'on a un point singulier unique de C donné en coordonnées par $p = (0, 0)$. La singularité au voisinage de ce point est de la forme

$$x^d + y^{d-2} = 0 \ .$$

Deux cas se présentent. Si d est impair la courbe C est analytiquement irréductible et donc de même algébriquement. Lorsque d est pair C se décompose au voisinage de p en deux composantes irréductibles

$$x^{\frac{d}{2}} + iy^{\frac{d-2}{2}} \quad \text{et} \quad x^{\frac{d}{2}} - iy^{\frac{d-2}{2}} \ ,$$

ces branches analytiques ne peuvent pas bien sûr être des zéros de restrictions de certains polynômes. D'où, dans tous les cas, C est algébriquement irréductible et donc grâce à la proposition 6.1 on obtient

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{(d-1)(d-3)}{2} - \frac{\mathrm{pgcd}(d, d-2) - 1}{2} \geq 2 \ . \qquad \square$$

6.3. Lemme. — *Sous les conditions (4) et (5). Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, alors la courbe plane $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ donnée en coordonnées non homogènes (X, Y) par*

$$\alpha X^d + Y^d + X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + 1 = 0$$

est hyperbolique pour $d \geq 5$.

Démonstration. — Un calcul simple montre que les points singuliers éventuels de C vérifient (en tenant compte de la condition (4))

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \alpha d X^{d-2} + 2 = 0 \\ d X^{d-2} + \varepsilon_2 = 0 \\ \alpha X^d + Y^d + X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \alpha d X^{d-2} + 2 = 0 \\ \alpha X^d + X^2 + 1 = 0 \ , \\ Y = 0 \end{cases}$$

systèmes qui équivalent respectivement à

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} X^{d-2} = \frac{-2}{\alpha d} \\ Y^{d-2} = \frac{-\varepsilon_2}{d} \\ X^2 + \varepsilon_2 Y^2 = \frac{-d}{d-2} \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} X^{d-2} = \frac{-2}{\alpha d} \\ X^2 = \frac{-d}{d-2} \\ Y = 0 \end{cases} .$$

Soit $\alpha_0 = (i^d)\frac{d}{2}\left(\frac{d}{d-2}\right)^{\frac{d-2}{2}}$. On va supposer pour ne pas alourdir la démonstration que les systèmes (a) et (b) n'ont pas de solutions simultanément et on va distinguer deux cas :

- *d est impair* : si $\alpha = \pm\alpha_0$, seul le système (b) admet des solutions. Supposons pour simplifier que $\alpha = \alpha_0$ alors (b) a une seule solution $p = \left(-i\sqrt{\frac{d}{d-2}}, 0\right)$; la singularité au voisinage de p est de la forme

$$x^2 - y^d = 0 \ ,$$

et donc C est irréductible et son genre est

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{d-1}{2} \geq 2 \quad \text{pour} \quad d \geq 5 \ .$$

Dans le cas où $\alpha \neq \pm\alpha_0$, seul le système (a) admet éventuellement un seul nœud comme solutions d'où C est irréductible et

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - 1 \geq 2 \ , \quad \text{pour} \quad d \geq 5 \ .$$

• *d est pair* : si $\alpha = \alpha_0$, seul le système (a) admet des solutions $p_1 = \big(i\sqrt{\frac{d}{d-2}}, 0\big)$ et $p_2 = \big(-i\sqrt{\frac{d}{d-2}}, 0\big)$. Les singularités de C aux voisinages de p_1 et p_2 sont symétriques, de la forme

$$x^2 - y^{d-2} = 0 \ ,$$

puisque d est pair $x^2 - y^{d-2}$ se décompose en deux facteurs et donc C admet éventuellement deux composantes irréductibles. On prétend que C est en fait irréductible, sinon, $C = C_1 \cup C_2$ où C_1 et C_2 sont deux courbes algébriques différentes de degrés respectifs d_1 et d_2. Appliquons le théorème de Bezout :

$$(C_1 \cdot C_2) = 2(C_1 \cdot C_2)_{p_1} = d_1 \cdot d_2 \ .$$

Puisque $(C_1 \cdot C_2)_{p_1} = \frac{d-2}{2}$, on a à résoudre le système

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = d \\ d_1 d_2 = d - 2 \end{cases} \Longrightarrow (d_1 - 1)(d_2 - 1) + 1 = 0 \ ,$$

ce qui est absurde. Donc C est irréductible, ce qui permet d'appliquer 6.2,

$$g(C) = \frac{(d-2)(d-1)}{2} - 2\frac{d-2}{2} = \frac{(d-2)(d-3)}{2} \geq 2 \ .$$

Dans le cas où $\alpha \neq \alpha_0$, seul le système (a) admet des solutions éventuelles : deux nœuds, il est facile de voir dans ce cas que C est aussi irréductible et

$$g(C) = \frac{(d-2)(d-1)}{2} - 2 \geq 2 \ . \qquad \square$$

Chapitre III

NÉGATIVITÉ DE COURBURE AU SENS DES JETS DES SURFACES FIBRÉES HYPERBOLIQUES

Dans ce chapitre on utilisera les mêmes définitions et notations que celles de la troisième partie du chapitre des préliminaires.

1. Condition algébrique nécessaire à la conjecture de Demailly

Rappelons le résultat suivant énoncé dans [Dem96] qui montre que la négativité au sens des jets implique une restriction forte de nature algébrique similaire à la propriété d'hyperbolicité algébrique au sens de Demailly (Def. 2.4.3).

1.1. Théorème. — *Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée et soit ω une métrique hermitienne sur X. Supposons que (X, V) est à courbure négative au sens des k-jets, alors, il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que toute courbe irréductible compacte $C \subset X$ tangente à V satisfait*

$$-\chi(\overline{C}) = 2g(\overline{C}) - 2 \geq \varepsilon \deg_\omega(C) + \sum_{t \in \overline{C}} (m_{k-1}(t) - 1)$$

où $g(\overline{C})$ est le genre de la normalisation $\nu : \overline{C} \to C$ et $m_k(t)$ est la multiplicité en t du k-ième relevée $\nu_{[k]} : \overline{C} \to X_k$ de ν.

En s'appuyant sur le théorème 1.1, J.-P. Demailly a construit, pour tout entier k donné, des exemples de surfaces projectives qui sont hyperboliques et qui n'admettent aucune métrique à courbure négative sur les k-jets. Plus précisément on a

1.2. Théorème. — *Étant donné un entier $k \geq 1$, alors il existe une surface algébrique X (qui dépend de k), qui est hyperbolique, mais qui n'admet aucune métrique non dégénérée à courbure négative sur les k-jets. En effet, étant donné deux courbes lisses Γ et Γ' de genre ≥ 2, la surface X peut être construite en tant que fibration $X \to \Gamma$, avec une fibre singulière C_0 qui a pour normalisation Γ'.*

1.3. Idée de la construction. — On construit tout d'abord une courbe singulière plane $C_0 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ qui a pour normalisation la courbe Γ'. Les points singuliers de C_0 sont quelques nœuds et un point singulier t_0 tel que

$$m_{k-1}(t_0) - 1 > 2g(\overline{C}) - 2 \ ,$$

de sorte à violer l'inégalité du théorème 1.1. Ensuite, on plonge Γ dans un certain $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ de sorte à trouver dans une famille de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^N$ une surface lisse X qui fibre sur Γ avec comme fibres singulières la courbe C_0 et quelques autres courbes à singularités nodales. Le genre de toutes les fibres est alors ≥ 2. La surface X, étant fibrée en courbes de genre ≥ 2 sur une base de genre ≥ 2, est hyperbolique, par simple application du théorème de Brody 2.2.2. $\square$

Le résultat négatif fourni par le théorème 1.2 (en contraste avec la conjecture 3.3.7 du chapitre I) suggère l'étude de la question suivante, qui va être le thème central de ce chapitre.

1.4. Problème. — Soit X une surface algébrique compacte lisse telle qu'il existe $f : X \to B$ une fibration sur une courbe lisse B de genre ≥ 2 et avec toutes les fibres de genre ≥ 2. Existe-t-il pour k assez grand une métrique non dégénérée h_k sur X_k à courbure négative au sens des jets ?

2. Application de Kodaira-Spencer et faisceau dualisant relatif

Soit $f : X \to B$ une fibration (à fibre connexes) d'une surface compacte sur une courbe lisse. On suppose désormais, que f est de fibre générique de genre ≥ 2. La différentielle df peut-être vue comme une injection de faisceaux $f^*(K_B) \to T_X^*$. Son conoyau noté $\Omega_{X/B}$ est appelé le faisceau des différentielles relatives (voir [Ha77]).

Supposons que f soit lisse, c'est-à-dire, que toutes les fibres de f soient lisses. Alors $\Omega_{X/B}$ coïncide avec le faisceau dualisant relatif $\omega_{X/B} := K_X \otimes f^*K_B^{-1}$ et on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow f^*(K_B) \longrightarrow T_X^* \longrightarrow \omega_{X/B} \longrightarrow 0,$$

duale de la suite des faisceaux tangents

$$0 \longrightarrow T_{X/B} \longrightarrow T_X \longrightarrow f^*T_B \longrightarrow 0.$$

Par image directe on obtient

$$0 \longrightarrow f_*T_{X/B} \longrightarrow f_*T_X \longrightarrow T_B \xrightarrow{\partial_{KS}} R^1f_*T_{X/B} \longrightarrow \cdots$$

l'homomorphisme connecteur ∂_{KS} est appelé l'application de Kodaira-Spencer. Soit $p \in B$, on vérifie par définition que $\partial_{KS}(p) = 0$ si et seulement si la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_{f^{-1}(p)} \longrightarrow T_X\big|_{f^{-1}(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{f^{-1}(p)} \longrightarrow 0$$

est scindée. La fibration f est dite non isotriviale si l'application de Kodaira-Spencer est non identiquement nulle. Dans ce contexte on a le théorème de rigidité suivant dû à A. Paršin [Pa68].

2.1. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration lisse en courbes de genre ≥ 2 sur une courbe lisse B. Supposons que f est non isotriviale, alors $\omega_{X/B}$ est ample.*

Supposons maintenant que f admet au moins une fibre singulière, on dit dans ce cas que f est singulière. Dans ce cas le faisceau $\Omega_{X/B}$ n'est pas localement libre et ne coïncide avec $\omega_{X/B}$ qu'en dehors des points singuliers des fibres. En fait, on a la suite exacte de faisceaux suivants

$$0 \longrightarrow \Omega_{X/B} \xrightarrow{i} \omega_{X/B} \longrightarrow \delta \longrightarrow 0$$

où δ est un faisceau porté par les points singuliers des fibres et i correspond à l'injection de $\Omega_{X/B}$ dans son bidual. En dualisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow f^*K_B \longrightarrow T_X^* \longrightarrow \Omega_{X/B} \longrightarrow 0$$

correspondant à la différentielle de f, on obtient la suite exacte à quatre termes
$$0 \longrightarrow T_{X/B} \longrightarrow T_X \longrightarrow f^*T_B \longrightarrow \delta \longrightarrow 0 \ ,$$
où $T_{X/B} = (\omega_{X/B})^{-1}$.

Soit I l'image de T_X dans f^*T_B. Par image directe, on obtient la suite exacte longue sur B :
$$0 \longrightarrow f_*T_{X/B} \longrightarrow f_*T_X \longrightarrow f_*I \xrightarrow{\partial_{KS}} R^1f_*T_{X/B} \longrightarrow \cdots$$
le morphisme ∂_{KS} coïncide en dehors des singularités avec le morphisme de Kodaira-Spencer; on l'appellera du même nom.

2.2. Remarque. — Lorsque $\partial_{KS} \equiv 0$, on peut montrer que la fibration f est contrainte d'être lisse donc dans le cas d'une fibration avec au moins une fibre singulière l'application de Kodaira-Spencer est génériquement non nulle.

En fait, même dans le cas de fibrations singulières on a un résultat analogue au théorème de rigidité de Paršin. Commençons tout d'abord par rappeler la définition suivante des fibrations stables.

2.3. Définition. — *Une fibration $f : X \to B$ d'une surface complexe X sur une courbe lisse B est dite semi-stable (resp. stable) si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

i) les fibres de f sont réduites et connexes ;

ii) les singularités des fibres de f sont nodales ;

iii) une composante irréductible d'une fibre de f qui est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ rencontre les autres composantes en au moins 2 points (resp. 3 points).

La propriété *iii)* est en fait équivalente à la non existence dans une fibre de f de courbes de self-intersection -1 (resp. -2).

2.4. Théorème (Arakelov [Ar71]). — *Soit $f : X \to B$ une fibration non isotriviale stable en courbes de genre générique ≥ 2 alors $\omega_{X/B}$ est ample.*

Grâce au théorème de réduction stable de Mumford-Deligne ([MD69]) et Artin-Winters ([AW71]) on peut déduire le théorème suivant (voir [M-De81] et [Sz81]). Rappelons tout d'abord qu'une fibration en courbe est dite relativement minimale, si aucune courbe de self-intersection (-1) n'est contenue dans ses fibres.

2.5. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration relativement minimale singulière en courbes de genre générique ≥ 2 alors $\omega_{X/B}$ est gros. On a de plus*

i) $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) > 0$;

ii) $\omega_{X/B} \cdot D \geq 0$ pour tout diviseur effectif $D \subset X$ ($\omega_{X/B}$ est nef).

En plus les seules courbes réduites et irréductibles, dont l'intersection avec $\omega_{X/B}$ est nulle, sont les $\mathbb{P}^1$ de self-intersection (-2) contenus dans les fibrés de f.

Idée de la démonstration. — Soit $f' : X' \to B'$ une réduction stable de $f : X \to B$ avec un morphisme $B' \to B$ de degré d de sorte qu'on a un diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

L'idée est de construire pour tout entier n un morphisme "produit"

$$H^0(X', \omega_{X'/B'}^{\otimes n}) \to H^0(X, \omega_{X/B}^{\otimes nd})$$

et d'appliquer ensuite le théorème 2.4.

3. Une métrique singulière sur les 1-jets

Soit $f : X \to B$ une fibration d'une surface compacte X sur une courbe lisse B de genre ≥ 2 et la fibre générique de f de genre ≥ 2. Grâce à un résultat d'additivité des dimensions de Kodaira-Iitaka pour les fibrés en droites, dû à T. Fujita ([Fu77]), généralisé depuis par F. Sakai ([Sa78]) au cas des λ-dimensions des fibrés vectoriels, on va voir que le fibré des 1-jets $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est gros. Ceci est équivalent par la proposition 3.3.2 à l'existence d'une métrique singulière non triviale à courbure négative sur $\mathcal{O}_{X_1}(-1)$. Rappelons tout d'abord le résultat suivant de [Fu77].

3.1. Théorème (Fujita [Fu77]). — *Soit $f : X \to Y$ une fibration d'une variété complexe compacte X munie d'un fibré en droites L, sur une autre variété Y munie d'un fibré en droites H. Supposons que*

i) $\kappa(Y, H) = \dim Y$

ii) il existe un morphisme génériquement injectif

$$\Phi : f^*H \to L\ .$$

Alors $\kappa(X, L) = \kappa(X_y, L_y) + \dim Y$, où $X_y = f^{-1}(y)$ une fibre générique de f et $L_y = L_{|X_y}$.

Pour généraliser le théorème 3.1 à des fibrés de rangs quelconques rappelons la notion suivante de λ-dimension introduite dans [Sa78].

3.2. Définition. — *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur une variété complexe X, la λ-dimension de E est le nombre*

$$\lambda(E, X) = \begin{cases} \kappa\big(P(E), \mathcal{O}_{P(E)}(1)\big) - (r-1) & \text{si } \kappa\big(P(E), \mathcal{O}_{P(E)}(1)\big) \neq -\infty \\ -r & \text{sinon} \end{cases}$$

3.3. Corollaire (Sakai [Sa78]). — *Soient X et Y deux variétés complexes compactes et soit $f : X \to Y$ une fibration, soient enfin E et F deux fibrés vectoriels sur X et Y respectivement. Supposons que :*

i) $\lambda(F, Y) = \dim Y$;

(ii) il existe un morphisme génériquement injectif $\Phi : f^*F \to E$.

Alors $\lambda(E, X) = \lambda(E_y, X_y) + \dim Y$ si $\lambda(E_y, X_y) \neq -\operatorname{rang} E$ où $X_y = f^{-1}(y)$ une fibre générique de f et $E_y = E_{|X_y}$.

Démonstration. — On se ramène modulo des modifications birationnelles aux fibrés $\mathcal{O}_{P(E)}(1)$ et $\mathcal{O}_{P(F)}(1)$ respectivement sur $P(E)$ et $P(F)$, ensuite on applique le théorème 3.1. □

Dans le cas qui nous intéresse on a l'affirmation suivante :

3.4. Corollaire. — *Soit $f : X \to B$ une fibration d'une surface compacte sur une courbe B de genre ≥ 2 et de fibre générique une courbe de genre ≥ 2. Alors $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est gros.*

Démonstration. — Soit p un point générique de B tel que $X_p := f^{-1}(p)$ est une fibre lisse de f, alors on a une suite exacte :

$$(*). \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_p} \longrightarrow T^*_X\big|_{X_p} \longrightarrow f^*K_{X_p} \longrightarrow 0$$

• *1er cas* : $(*)$ est non scindée. D'après le critère de Gieseker [Gi72] ci-dessous, $T^*_X\big|_{X_p}$ est ample et on conclut avec le corollaire 3.3.

• *2ème cas* : $(*)$ est scindée. Alors la fibration f est localement triviale, et comme la notion de λ-dimension est invariante par revêtement non ramifié, on peut supposer que $X = C_1 \times C_2$ est un produit de deux courbes de genre ≥ 2. Dans ce cas il est simple de voir que

$$\begin{aligned}\lambda(T^*_X, X) &= \lambda(\pi^*_{C_1}T^*_{C_1} \oplus \pi^*_{C_2}T^*_{C_2}, C_1 \times C_1)\\ &= \lambda(T^*_{C_1}, C_1) + \lambda(T^*_{C_1}, C_2)\\ &= 2\end{aligned}$$

où π_{C_1} et π_{C_2} les projections naturelles sur C_1 et C_2 respectivement. □

3.5.Critère de Gieseker. — *Soit S une surface de Riemann compacte et soit $0 \to \mathcal{O}_S \to F \to E \to 0$ une suite exacte non scindée de fibrés vectoriels, si E est ample alors F est aussi ample.*

4. Négativité de la courbure sectionnelle des fibrations lisses

Dans ce paragraphe on suppose que $f : X \to B$ est une fibration d'une surface complexe compacte sur une courbe lisse de genre ≥ 2, dont les fibres sont des courbes lisses de genre ≥ 2. On donnera une construction simple d'une métrique hermitienne sur T_X à courbure sectionnelle négative. Dans ce cas on a une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow T_{X/B} \xrightarrow{j} T_X \xrightarrow{f_*} f^*T_B \longrightarrow 0 \ .$$

On considère sur f^*T_B l'image inverse f^*h_B de la métrique de Poincaré sur B et on munit $T_{X/B}$ de la métrique $h_{X/B}$ qui soit, par restriction à chaque fibre de f, la métrique de Poincaré associée. Remarquons que puisque la métrique de Poincaré est de courbure de Gauss constante, la métrique $h_{X/B}$ est une solution d'une équation faisant intervenir l'opérateur elliptique $\partial\overline{\partial}$, donc est lisse.

Soit $\Phi = j^* \oplus f_* : T_X \xrightarrow{\sim} T_{X/B} \oplus T_B$ un scindage $\mathcal{C}^\infty$ et notons β la deuxième forme fondamentale associée. Comme dans [DPS], considérons l'isomorphisme Φ_ρ déduit de Φ en multipliant par $1/\rho$ le premier facteur de l'expression de Φ et soit $h_\rho = \Phi_\rho^*(h_{X/B} \oplus f^*h_B)$. On peut voir que l'expression de la connexion de Chern sur T_X relativement à h_ρ est donnée par (voir par exemple [Dem95])

$$D_{h_\rho} = \begin{pmatrix} D_{h_{X/B}} & -\rho B^* \\ \rho B & Dh_B \end{pmatrix}$$

et la forme de courbure est

$$\Theta_{h_\rho} = \Theta_{h_{X/B}} \oplus \Theta_{h_B} + O(\rho) \ .$$

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée locale de (T_X, h_ρ) telle que $e_{1x} \in Tf^{-1}(f(x))$ et $e_{2x} \in TB_{f(x)}$. Soit $u = u_1e_1 + u_2e_2 \in T_X$, alors la courbure sectionnelle de (T_X, h_ρ) déterminée par u est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle\Theta_{h_\rho}\rangle(u\otimes u, u\otimes u) = \rho &\sum_{1\leq i,j\leq 2} C_{ij11}u_i\bar{u}_j|u_1|^2 \\ &+ \sum_{1\leq i,j\leq 2} C_{ij22}u_i\bar{u}_j|u_2|^2 + O(\rho)(u\otimes u, u\otimes u) \end{aligned}$$

où C_{ij11} et C_{ij22} sont respectivement les coefficients des formes de courbure $\langle\Theta_{h_{X/B}}\rangle$ et $\langle\Theta_{h_B}\rangle$ relativement aux bases e_1 et e_2.

Remarquons que $C_{ij22} = 0$ si $(i,j) \neq (2,2)$ et que $C_{2222} < 0$ et $C_{1111} < 0$, par définition. Pour $\varepsilon > 0$, on utilise l'inégalité

$$2|u_1||u_2| \leq \varepsilon|u_1|^2 + \frac{1}{\varepsilon}|u_2|^2 \ .$$

Un bon choix $\varepsilon = \sqrt{\rho}$ permet de majorer les termes $C_{ij11}u_i\bar{u}_j|u_1|^2$ pour $(i,j) \neq (1,1)$ et donc

$$\langle\Theta_{h_\rho}\rangle(u\otimes u, u\otimes u) \leq \rho\big(C_{1111} + O(\sqrt{\rho})\big)|u_1|^4 + \Big(C_{2222} + O(\sqrt{\rho})\Big)|u_2|^4.$$

Ce qui entraine que h_ρ est à courbure sectionnelle négative pour ρ assez petit, d'où le théorème suivant :

4.1. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration lisse en courbes de genre ≥ 2 sur une courbe de genre ≥ 2. Alors le fibré tangent T_X est à courbure sectionnelle négative.*

4.2. Remarques

1) Si on suppose que ∂_{KS} est non nulle en tout point de B on peut montrer que T_X est négatif au sens de Grauert, ceci est démontré indépendamment par M. Martin-Deschamps ([M-De85]) et M. Schneider [Sch85] en utilisant le théorème de Paršin 2.1, et H. Tsai ([Ts89]) a même montré la négativité de T_X au sens de Griffiths dans ce cas.

2)Consernant l'étude des fibrations localement triviales, on a pu construire dans [GR65] et [Co73] des métriques à courbure négatives mais qui ne sont définies que localement au voisinage de chaque fibre. Dans le cas d'une fibration de dimension relative quelconque il y a, sous des conditions similaires, un résultat semblable au théorème 4.1 dans [Ch86].

3) Grâce à un résultat de P.C. Yang ([Yan77]), si la fibration f est localement triviale, le fait d'être à courbure sectionnelle est optimal dans le théorème 4.1.

5. Presque amplitude au sens de Miyaoka des fibrations singulières

Soit $f : X \to B$ une fibration sur une courbe lisse de genre ≥ 2 avec pour fibre générique une courbe de genre ≥ 2. D'après le corollaire 3.4, $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est gros. Supposons en plus que f admet au moins une fibre singulière, alors on va utiliser la positivité de $\omega_{X/B}$ pour montrer que $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\Sigma}$ est gros, pour toute surface $\Sigma \subset X_1$ telle que $\pi_{0,1}(\Sigma) = X$. Parmi ces surfaces dans X_1 qui se projettent sur X, une se distingue particulièrement, c'est la surface notée $\widetilde{X}$, formée des relevées dans X_1 des fibres de f. Soit $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \to X$ la restriction de $\pi_{0,1}$ à $\widetilde{X}$. Il existe alors un diviseur E dans $\widetilde{X}$, dont le support est l'ensemble des points où $\widetilde{\pi}$ n'est pas localement biholomorphe, tel qu'on ait un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_1}(-1) \otimes \widetilde{\pi}^* \omega_{X/B} &\longrightarrow \mathcal{O}(-E) \\ u \otimes \widetilde{\pi}^* v &\longmapsto v(\pi_* u) \end{aligned} .$$

En effet $v(\pi_* u)_x = 0$ si et seulement si $\widetilde{\pi}$ n'est pas localement biholomorphe en ce point.

5.1. Proposition. — *Soit $f : X \to B$ une fibration singulière sur une courbe de genre ≥ 2, dont les fibres génériques sont des courbes de genre ≥ 2, alors $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\widetilde{X}}$ est gros.*

Démonstration. — On déduit de l'isomorphisme ci-dessus l'existence d'une injection

$$\omega_{X/B} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\widetilde{X}}.$$

Notre fibration étant singulière, d'après le théorème 2.5 $\omega_{X/B}$ est gros et donc $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\widetilde{X}}$ est aussi gros. □

5.2. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ comme dans la proposition 5.1, alors $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\Sigma}$ est gros pour toute surface $\Sigma \subset X_1$ telle que $\pi_{0,1}(\Sigma) = X$.*

Démonstration. — D'après la proposition 5.1, il reste à vérifier la conclusion pour des surfaces dans X_1, différentes de $\widetilde{X}$. Soit Σ une telle surface, alors on a un morphisme non trivial

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_1}(-1)_{|\Sigma} &\longrightarrow (\widetilde{\pi}_{1,0|\Sigma} \circ f)^* T_B \\ v &\longmapsto f_*(\pi_* v) \end{aligned}$$

d'où un morphisme génériquement injectif

$$(\pi_{1,0|\Sigma} \circ f)^* K_B \longrightarrow \mathcal{O}_{X_1}(1)_{|\Sigma} .$$

D'autre part la fibration étant singulière, l'application de Kodaira-Spencer ∂_{KS} est non identiquement nulle, donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_p} \longrightarrow T^*_X\big|_{X_p} \longrightarrow f^*K_{X_p} \longrightarrow 0$$

est non scindée sur la fibre générique $X_p = f^{-1}(p)$ de f, par conséquent $T^*_X\big|_{X_p}$ est ample par le critère de Gieseker 3.5. Par suite $\mathcal{O}_{X_1}(1)\big|_{\pi^{-1}(X_p)} = \mathcal{O}_{P(T^*_X\big|_{X_p})}(1)$ est ample. On est dans le cas de figure du théorème de Fujita, donc $\mathcal{O}_{X_1}(1)\big|_{\Sigma}$ est big. □

Rappelons maintenant la notion suivante de presque amplitude au sens de Miyaoka ([Mi82]).

5.3. Définition. — *Soient X une variété complexe compacte, E un fibré vectoriel holomorphe sur X et soit $\pi : P(E^*) \to X$. On dit que E est ample presque partout s'il existe un fibré en droites A ample, une constante $\varepsilon > 0$ et $\Sigma \subset P(E^*)$ un ensemble analytique propre vérifiant $\pi(\Sigma) \neq X$ tels que*

$$c_1(\mathcal{O}_{P(E^*)}(1)\big|_C) \geq \varepsilon c_1(\pi^* A\big|_C)$$

pour toute courbe $C \subset P(E^*)$ non contenue dans Σ.

D'après le résultat 3.4.3 de Y. Miyaoka le fibré cotangent à une surface de type général vérifiant $c_1^2 - 2c_2 > 0$ est presque partout ample au sens de la définition 5.3. Ceci implique grâce au théorème de Paršin 2.1 que les fibrations lisses non isotriviales en courbes de genre ≥ 2 sur une courbe de genre ≥ 2 ont des cotangents presque partout ample au sens de Miyaoka. Le théorème suivant qui est un corollaire simple des théorèmes 3.4 et 5.2, est une sorte de généralisation de ce fait au cas des fibrations singulières.

5.4. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration singulière en courbes de genre générique ≥ 2 sur une courbe de genre ≥ 2. Alors le fibré cotangent à X est presque partout ample au sens de Miyaoka.*

Sachant que dans le cas d'un fibré holomorphe E presque partout ample sur une surface projective lisse, l'amplitude est équivalente à ce que $E\big|_C$ est ample pour toute courbe C dans X, ce qui a été remarqué par M. Schneider et A. Tancredi ([ST88]), on a le corollaire suivant du théorème 5.4.

5.5. Corollaire. — *Soit $f : X \to B$ une fibration comme dans 5.4, alors T^*_X est ample si et seulement si $T^*_X\big|_C$ est ample pour toute courbe $C \subset X$.*

6. Techniques de recollements de métriques singulières

Dans ce paragraphe, on va rappeler quelques techniques, utiles pour la suite, pour faire des recollements de fonctions plurisousharmoniques et donc de métriques singulières (voir par exemple [Dem90]) . Nous commencerons par énoncer les deux lemmes suivants.

6.1. Lemme. — *Soient X un espace complexe et Y un sous-ensemble analytique de X. Alors, il existe une fonction v dans $\mathcal{C}^\infty(X\smallsetminus Y)$, quasi-psh sur X et telle que $v \equiv -\infty$ sur Y (avec des pôles logarithmiques).*

6.2. Lemme. — *Soit X une variété complexe, soit Y un sous-espace analytique de X et soient enfin un sous-fibré $V \subset T_X$ et une $(1,1)$-forme positive ω sur X. Supposons qu'il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ et une $(1,1)$-forme α de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X telles que*

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi \geq \varepsilon\omega \ \ \textit{sur} \ \ T_{Y_{\mathrm{reg}}} \cap V\ .$$

Alors, il existe un voisinage U de Y dans X et $\widetilde{\Phi} \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tels que

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\widetilde{\Phi} \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega \ \ \textit{sur} \ \ V_{|U}\ .$$

Idée de la démonstration. — On ajoute à un prolongement arbitraire de Φ une fonction qui donne beaucoup de positivité dans les directions normales à Y et une contribution éventuellement négative, mais petite, dans les directions tangentes. Par exemple, si $u_1 = u_2 = \ldots = u_s = 0$ sont des équations locales de Y en un point lisse, on rajoute une fonction du type $\varepsilon^3 \log(1 + \varepsilon^{-4} \sum |u_j|^2)$. On raisonne ensuite par récurrence sur les strates de singularités. Les détails se trouvent dans [Dem90].

Soient, maintenant, L un fibré en droites sur une variété compacte X et h_0 une métrique lisse fixée sur L. Considérons une métrique singulière h sur L; on peut écrire

$$h = h_0 \exp(-\Phi)$$

où Φ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ en dehors des singularités de h, et on a la relation suivante entre les formes de courbure

$$\Theta_h(L) = \Theta_{h_0}(L) + i\partial\overline{\partial}\Phi.$$

Cette remarque permet de réduire un problème de recollement de métriques à celui du recollement de fonctions quasi-psh.

Grâce aux lemmes 6.1 et 6.2, on peut faire deux types de recollements (Prop. 6.3 et 6.4). La proposition 6.3 permet de recoller deux métriques lisses à courbure positive (le long d'un sous-fibré vectoriel V de l'espace tangent à la variété ambiante X), définies sur deux sous-espaces analytiques de X, en une métrique lisse sur l'union des sous-espaces et ayant la même propriété de courbure. Quant à la proposition 6.4, elle permet de recoller une métrique singulière (toujours à courbure positive le long d'un fibré vectoriel) et une métrique lisse sur l'ensemble singulier avec la même propriété de courbure, pour obtenir une métrique lisse (avec la même propriété de courbure).

6.3. Proposition. — *Soient Y et Z deux sous-espaces analytiques d'une variété complexe compacte X, soit V un sous-fibré de T_X et soit ω une $(1,1)$-forme positive sur X. Supposons qu'il existe une $(1,1)$-forme α de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X et deux fonctions $\Phi_Y \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ et $\Phi_Z \in \mathcal{C}^\infty(Z)$ vérifiant*

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_Y \geq \varepsilon\omega \ \ \textit{sur} \ \ V \cap T_{Y_{\mathrm{reg}}} ,$$

et

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_Z \geq \varepsilon\omega \ \ \textit{sur} \ \ V \cap T_{Z_{\mathrm{reg}}} .$$

Alors, il existe $\Phi_{Y\cup Z}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U de $Y \cup Z$ telle que

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_{Y\cup Z} \geq \frac{\varepsilon}{4}\omega \ \ \textit{sur} \ \ V_{|U} .$$

Démonstration. — D'après le lemme 6.2 on peut supposer qu'il existe $\widetilde{\Phi}_Y$ et $\widetilde{\Phi}_Z$ définies respectivement sur un voisinage U_Y et U_Z de Y et Z telles que

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\widetilde{\Phi}_Y \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega \ \ \text{sur} \ \ V_{|U_Y} ,$$

et

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\widetilde{\Phi}_Z \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega \ \ \text{sur} \ \ V_{|U_Z} .$$

D'autre part, grâce au lemme 6.1, il existe une fonction quasi-psh dans $\mathcal{C}^\infty(X \setminus Y \cap Z)$ telle que $v \equiv -\infty$ sur $Y \cap Z$. On peut supposer, en multipliant v par une constante assez petite, que $i\partial\overline{\partial}v \geq -\frac{\varepsilon}{4}\omega$ sur X. Alors, il convient de définir la fonction $\Phi_{Y\cup Z}$ de la façon suivante

$$\Phi_{Y\cup Z} = \begin{cases} \widetilde{\Phi_Y} - C \text{ sur } \mathrm{\bar{U}'_Y} \setminus \mathrm{\bar{U}'_Z} \\ \widetilde{\Phi_Z} + v \text{ sur } \mathrm{\bar{U}'_Z} \setminus \mathrm{\bar{U}'_{Y\cap Z}} \\ \max_{\mathrm{reg}}(\widetilde{\Phi_Y} - C, \widetilde{\Phi_Z} + v) \quad \text{sur un voisinage de } \bar{U}'_{Y\cap Z} \cap \bar{U}'_Z \end{cases} ,$$

où $U'_{Y\cap Z} \subset U_Y \cap U_Z$ est un voisinage de $Y \cap Z$, $C > 0$ une constante assez grande pour que

$$\widetilde{\Phi_Y} - C < \widetilde{\Phi_Z} + v \text{ sur } \overline{\partial}\mathrm{U'_{Y\cap Z}},$$

et où U'_Y, U'_Z sont des voisinages assez petits de Y, Z tels que

$$\widetilde{\Phi_Y} - C > \widetilde{\Phi_Z} + v \text{ sur } \mathrm{U'_Y} \cap \mathrm{U'_Z},$$

($\max_{\mathrm{reg}}$ désigne la fonction maximum régularisée définie dans [Dem90]). □

6.4. Proposition. — *Soient $Y \subset Z$ deux sous-espaces analytiques d'une variété complexe X, soit V un sous-fibré de T_X et soit ω une $(1,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$*

positive sur X. Supposons qu'il existe une $(1,1)$-forme α de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X et deux fonctions Φ_Y de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y et $\Phi_{Z\smallsetminus Y}$ dans $\mathcal{C}^\infty(Z\smallsetminus Y)$ localement majorée sur Y, telles que

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_Y \geq \varepsilon\omega \ \textit{ sur } \ V\cap T_{Y_{\mathrm{reg}}}\ ,$$

et

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_{Z\smallsetminus Y} \geq \varepsilon\omega \ \textit{ sur } \ V\cap T_{Z_{\mathrm{reg}}}\ .$$

Alors, il existe $\Phi_Z \in \mathcal{C}^\infty(Z)$ telle que

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_Z \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega \ \textit{ sur } \ V\cap T_{Z_{\mathrm{reg}}}\ .$$

Démonstration. — Soit $\widetilde{\Phi}_Y$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U de Y telle que $\alpha + i\partial\overline{\partial}\widetilde{\Phi}_Y \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega$ sur $V_{|U}$ et v quasi psh dans $\mathcal{C}^\infty(Z\smallsetminus Y)$ vérifiant $\alpha + i\partial\overline{\partial}v \geq -\frac{\varepsilon}{2}\omega$ sur Z, alors la fonction $\Phi_Z = \max_{\mathrm{reg}}\big(\Phi_{Z\smallsetminus Y} + v, \widetilde{\Phi_Y} - C\big)$ convient pour un bon choix de C sur un bon voisinage de Y. □

Les propositions 6.3 et 6.4 sont, en fait, valables même lorsqu'on suppose la forme α singulière le long d'un sous-ensemble analytique. Comme corollaires on peut les généraliser respectivement aux propositions 6.5 et 6.6. En utilisant ces dernières on pourra faire les mêmes types de recollements que précédemment, mais en obtenant encore des métriques singulières avec des singularités éventuellement moins importantes.

6.5. Proposition. — *Soient Y , Z et Σ trois sous-espaces analytiques d'une variété complexe X, soit V un sous-fibré de T_X et soit ω une $(1,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ positive sur X. Supposons qu'il existe une $(1,1)$-forme α de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, deux fonctions Φ_Y et Φ_Z de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $Y\smallsetminus\Sigma$ (resp. de $Z\smallsetminus\Sigma$) et une fonction Ψ quasi psh au voisinage de Σ , telles que $\Phi_Y - \Psi$ et $\Phi_Z - \Psi$ se prolongent en des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Y et Z, avec*

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_Y \geq \varepsilon\omega \ \textit{ sur } \ V\cap T_{Y_{\mathrm{reg}}}\ ,$$

et

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_Z \geq \varepsilon\omega \ \textit{ sur } \ V\cap T_{Z_{\mathrm{reg}}}\ .$$

Alors, il existe $\Phi_{Y\cup Z}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U de $Y\cup Z\smallsetminus\Sigma$ telle que

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_{Y\cup Z} \geq \frac{\varepsilon}{4}\omega \ \textit{ sur } \ V_{|U}\ .$$

Démonstration. — On applique le raisonnement utilisé dans la preuve de la proposition 6.3 avec $\alpha' = \alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Psi$, $\Phi'_Y = \Phi_Y - \Psi$ et $\Phi'_Z = \Phi_Z - \Psi$. □

6.6. Proposition. — *Soient $\Sigma \subset Y \subset Z$ trois sous-espaces analytiques d'une variété complexe X, soit V un sous-fibré de T_X et soit ω une $(1,1)$-forme $\mathcal{C}^\infty$ positive sur X. Supposons qu'il existe une $(1,1)$-forme α de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X et deux fonctions $\Phi_{Y\smallsetminus\Sigma}$ dans $\mathcal{C}^\infty(Y\smallsetminus\Sigma)$ et $\Phi_{Z\smallsetminus Y}$ dans $\mathcal{C}^\infty(Z\smallsetminus Y)$ localement majorées sur Y (resp. Z) et à poles logarithmiques sur Σ (resp. Y), telles que*

$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_{Y\smallsetminus\Sigma} \geq \varepsilon\omega \ \textit{ sur } \ V\cap T_{Y_{\mathrm{reg}}}\ ,$$

et
$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_{Z\smallsetminus Y} \geq \varepsilon\omega \quad \textit{sur} \quad V \cap T_{Z_{\mathrm{reg}}}\ .$$

Supposons que la multiplicité des pôles de $\Phi_{Y\smallsetminus\Sigma}$ *le long de* Σ *est inférieure à la multiplicité des pôles de* $\Phi_{Z\smallsetminus Y}$ *le long de* Y *(au sens où* $\limsup \Phi_{Y\smallsetminus\Sigma}/\Phi_{Z\smallsetminus Y} < 1$ *en tout point de* Σ*). Alors il existe* $\Phi_{Z\smallsetminus\Sigma} \in \mathcal{C}^\infty(Z\smallsetminus\Sigma)$ *ayant des singularités logarithmiques seulement le long de* Σ *telle que*
$$\alpha + i\,\partial\overline{\partial}\Phi_{Z\smallsetminus\Sigma} \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega \quad \textit{sur} \quad V \cap T_{Z_{\mathrm{reg}}}\ .$$

Démonstration. — On va procéder de la même façon que dans la preuve de la proposition 6.4. Soit $\widetilde{\Phi}_{Y\smallsetminus\Sigma}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage U de $Y\smallsetminus\Sigma$ telle que on a toujours $\limsup \widetilde{\Phi}_{Y\smallsetminus\Sigma}/\Phi_{Z\smallsetminus Y} < 1$ en tout point de Σ et
$$\alpha + i\partial\overline{\partial}\widetilde{\Phi}_{Y\smallsetminus\Sigma} \geq \frac{\varepsilon}{2}\omega \text{ sur } V_{|U}.$$

Soit v quasi psh dans $\mathcal{C}^\infty(Z\smallsetminus Y)$ vérifiant $\alpha + i\partial\overline{\partial}v \geq -\frac{\varepsilon}{2}\omega$ sur Z, alors grâce à l'hypothèse sur les multiplicités, la fonction $\Phi_Z = \max\big(\Phi_{Z\smallsetminus Y} + v, \widetilde{\Phi}_{Y\smallsetminus\Sigma} - C\big)$ convient pour un bon choix de C sur un bon voisinage de Y. $\square$

7. Négativité de courbure sur les 1-jets des fibrations stables

Soit $f : X \to B$ une fibration non isotriviale d'une surface compacte sur une courbe lisse de genre ≥ 2, en courbes réduites et irréductibles qui sont toutes de genre ≥ 2. D'après les résultats du paragraphe 5, pour que T_X^* soit ample, il faut et il suffit que sa restriction à toute courbe (ou seulement à toute fibre de f) soit ample. Ceci n'est pas le cas en général (voir par exemple la fibration de Demailly au §1).

Cependant, on a l'affirmation suivante dans le cas des fibrations stables (voir l'analogue pour une fibration singulière quelconque au §9).

7.1. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration singulière stable en courbes réduites et irréductibles de genre ≥ 2 et avec le genre de $B \geq 2$, alors pour toute courbe $C \subset X_1$, la restriction $\mathcal{O}_{X_1}(-1)_{|C}$ est à courbure négative au sens des jets, c'est-à-dire, le long du sous-fibré $V_1 \subset T_{X_1}$.*

Démonstration. — Soit C une courbe dans X_1, on peut supposer que C n'est pas une fibre de $\pi_{0,1}$ puisque $\mathcal{O}_{X_1}(1)$ est toujours relativement ample par rapport à X. On distinguera deux cas :

• C n'est pas une relevée d'une courbe dans X et donc le tangent T_C n'est pas contenu dans V_1 sauf au-dessus d'un nombre fini de points $\{p_1, \ldots, p_n\}$. On choisit alors sur des disques $D_i \subset C$ centrés en p_i une métrique à courbure négative sur $\mathcal{O}_{X_1}(-1)_{|D_i}$ et on recolle par une partition de l'unité en une métrique h sur tout $\mathcal{O}_{X_1}(-1)_{|C}$. Par construction la courbure de h est négative dans la direction de V_1.

• C est une relevée d'une courbe dans X. Si $\pi_{0,1}(C)$ est une fibre de f alors C est lisse car f est stable, donc

$$\mathcal{O}_{X_1}(-1)_{|C} \simeq T_C$$

est à courbure totale négative. Si $\pi_{0,1}(C)$ n'est pas une fibre de f et donc $f(\pi_{0,1}(C)) = B$, on a un morphisme non trivial

$$(\pi_{0,1|C} \circ f)^* K_B \longrightarrow \mathcal{O}_{X_1}(1)_{|C}$$

donc $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|C}$ est ample et $\mathcal{O}_{X_1}(-1)_{|C}$ est aussi à courbure totale négative. □

Le théorème suivant est une réponse positive à la conjecture de Demailly dans le cas d'une fibration stable hyperbolique sur une courbe de genre ≥ 2.

7.2. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration stable en courbes réduites et irréductibles de genre ≥ 2 sur une courbe lisse de genre ≥ 2. Alors, il existe sur $\mathcal{O}_{X_1}(-1)$ une métrique h_1 lisse à courbure négative le long de V_1.*

Démonstration. — D'après le théorème 3.3, il existe une métrique h' sur $\mathcal{O}_{X_1}(-1)$ à courbure négative, singulière le long d'un ensemble analytique Σ_h de codimension > 0. Soit Z une composante de dimension 2 de Σ_h. Si $\pi_{0,1}(Z) = X$ d'après le théorème 5.2, $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|Z}$ est gros, si $\pi_{0,1}(Z)$ est une courbe de X, alors on a

$$\mathcal{O}_{X_0}(1)_{|Z} \cdot \mathcal{O}_{X_0}(1)_{|Z} = \mathcal{O}_{X_0}(1)^2 \cdot Z = K_X \cdot \pi_{0,1}(Z)$$

et

$$\mathcal{O}_{X_0}(1)_{|Z} \cdot \pi_{0,1}^* K_X = \mathcal{O}_{X_0}(1) \cdot Z \pi_{0,1}^* K_X = K_X \cdot \pi_{0,1}(Z) \ .$$

Or $\pi_{0,1}(Z)$ est de genre ≥ 2 donc $K_X \cdot \pi_{0,1}(Z) > 0$, d'où par le théorème de Riemann-Roch ([Hi66]), $\mathcal{O}_{X_1}(1)_{|Z}$ est encore gros.

Maintenant, d'après les résultat du paragraphe 5, on dispose sur toute composante de dimension 2 $Z_j \subset \Sigma_{h'}$ d'une métrique h'_j à courbure négative, éventuellement singulière le long d'un nombre fini de courbes C_{ij} . D'après le théorème 6.1 la restriction $\mathcal{O}_{X_0}(-1)_{|C_{ij}}$ à l'une de ces courbes admet une métrique h_{ij} lisse à courbure négative dans la direction de V_1. On recolle, tout d'abord, les métriques h_{ij} en une métriques $h_{\bigcup C_{ij}}$ sur l'union des C_{ij}, à l'aide de la proposition 6.3. La proposition 6.4 permet, ensuite, de recoller h'_j et $h_{\bigcup C_{ij}}$ en une métrique lisse h_j à courbure négative dans la direction de V_1. Enfin, on recolle de la même façon les métriques h_j avec h' en une métrique h sur tout X_1, lisse et à courbure négative au sens des 1-jets. $\square$

8. Ensemble singulier restreint

Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigée. On va introduire, dans ce paragraphe, un sous-espace analytique de l'ensemble X_k^{sing} des jets singuliers. Ce sous-espace, appelé ensemble singulier restreint et noté $X_{k,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}}$, est beaucoup moins gros que X_k^{sing}, de telle façon qu'il sera plus facile à manipuler dans la suite. On montrera que la restriction de $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ à X_k^{sing} admet une métrique singulière le long de $X_{k,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}}$ à courbure négative au sens des jets. Ceci est indispensable pour surmonter quelques difficultés techniques dans le paragraphe suivant.

8.1. Définition (ensemble singulier restreint). — *Soit (X, V) une variété dirigée quelconque et soient $p < k$ deux entiers positifs. Notons $D_p^{(k)}$ la sous-variété de X_k, qui contient toutes les relevées dans X_k des courbes contenues dans les fibres de la projection $X_{p-1} \to X_{p-2}$. En particulier, $D_k^{(k)} := D_k = P\big(T_{X_{k-1}/X_{k-2}}\big)$. On appelle ensemble singulier restreint le sous-ensemble analytique noté $X_{k,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}} \subset X_k^{\mathrm{sing}}$ défini par*

$$X_{k,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}} := \bigcup_{2 \le p \le k} D_p^{(k)} .$$

Une définition alternative des espaces $D_p^{(k)}$ est la suivante: fixons un entier $p > 1$ et considèrons la variété dirigée

$$(Y_{p,0}, W_{p,0}) := (X_{p-1}, T_{X_{p-1}/X_{p-2}}),$$

alors, l'ensemble $D_p^{(k)}$ est le $k-(p-1)$-ème espace de jets $Y_{p,k-(p-1)}$ associé, et peut être vu comme une sous-variété plongée dans X_k.

Notons n la dimension de X et r le rang de V. Alors, le rang de $T_{X_{p-1}/X_{p-2}}$ est égal à $r-1$ et donc

$$\begin{aligned}
\dim D_p^{(k)} &= \dim X_{p-1} + (k-(p-1))(r-2) \\
&= n + (p-1)(r-1) + (k-(p-1))(r-2) \\
&= n + k(r-1) - (k-(p-1)) \\
&= \dim X_k - (k-(p-1)).
\end{aligned}$$

Remarquons aussi qu'un $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-1}$ fibre de la projection $X_{k+1} \to X_k$ coupe $D_p^{(k+1)}$ en un $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-2}$, en effet, $D_p^{(k+1)}$ est un $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-2}$-fibré projectif sur $D_p^{(k)}$.
L'ensemble singulier restreint a la propriété intéressante suivante.

8.2. Lemme . — *Soit (X, V) une variété dirigée quelconque, soient k, p deux entiers > 1 et soit enfin $x_k \in (\pi_{k-1,k})^{-1}\big(D_p^{(k-1)}\big) \smallsetminus D_p^{(k)}$ dans X_k. Si $v_k \in V_{k,x_k} \cap T_{x_k}\pi_{k-1,k}^{-1}\big(D_p^{(k-1)}\big)$, alors $(\pi_{k-1,k})_*(v_k) = 0$. On a donc, que si*

$x_k \in (\pi_{k-1,k})^{-1}\big(X^{\rm sing}_{k-1,{\rm res}}\big)\smallsetminus X^{\rm sing}_{k,{\rm res}}$ dans X_k et si $v_k \in V_{k,x_k} \cap T_{x_k}\pi^{-1}_{k-1,k}\big(X^{\rm sing}_{k-1,{\rm res}}\big)$, alors $(\pi_{k-1,k})_*(v_k) = 0$.

Démonstration. — Écrivons $x_k = (x_{k-1}, [v_{k-1}])$ avec $v_{k-1} \in V_{k-1,x_{k-1}}$, alors on a

$$v_k \in V_{k,x_k} \Longrightarrow \big(\pi_{k-1,k}\big)_*(v_k) \in \mathbb{C}\cdot v_{k-1}\ ,$$

donc si $\big(\pi_{k-1,k}\big)_*(v_k)$ était non nul, alors v_{k-1} devrait appartenir à l'intersection $V_{k-1,x_{k-1}} \cap T_{x_{k-1}} D_p^{(k-1)}$. Or, cet espace est égal, par définition, à $\big(W_{p,k-p,}\big)_{x_{k-1}}$. Donc, v_{k-1} est tangent à $W_{p,k-p}$ et par conséquent x_k devrait appartenir à $D_p^{(k)}$. Ceci est une contradiction. □

Rappelons maintenant le lemme suivant énoncé dans [Dem96].

8.3. Lemme. — *Soit (X,V) une variété complexe compacte dirigée quelconque. Supposons qu'il existe une métrique h_k sur X_k à courbure négative au sens des k-jets, notons Σ_h son ensemble de singularités. Alors, il existe sur X_{k+1} une métrique h_{k+1} à courbure négative au sens des $k+1$-jets telle que $\Sigma_{h_{k+1}} = \pi^{-1}_{k,k+1}\big(\Sigma_{h_k}\big) \cup D_k$. De plus, la multiplicité des pôles le long de D_k de h_{k+1} est égale à $\frac{p-1}{p}$ pour p assez grand.*

Démonstration. — Soient ω_{k-1} et ω_k deux métriques hermitiennes lisses données respectivement sur $T_{X_{k-1}}$ et T_{X_k}. L'hypothèse implique

$$\langle\Theta_{h^{-1}_{k-1}}(\mathcal{O}_{X_{k-1}}(1))\rangle(\xi) \geq \varepsilon|\xi|^2_{\omega_{k-1}}, \qquad \forall\xi \in V_{k-1}$$

pour certaines constantes $\varepsilon > 0$. D'autre part, puisque $\mathcal{O}_{X_k}(D_k)$ est relativement ample sur X_{k-1} (D_k est une section hyperplane), il existe une métrique lisse $\widetilde{h}$ sur $\mathcal{O}_{X_k}(D_k)$ telle que

$$\langle\Theta_{\widetilde{h}}(\mathcal{O}_{X_k}(D_k))\rangle(\xi) \geq \delta|\xi|^2_{\omega_k} - C|(\pi_k)_\star\xi|^2_{\omega_{k-1}}, \qquad \forall\xi \in T_{X_k}$$

pour certaine constante $\delta, C > 0$. Combinant les deux inégalitées (la deuxiḿe étant appliquée à $\xi \in V_k$ et la première à $(\pi_k)_\star\xi \in V_{k-1}$), on obtient

$$\begin{aligned}\langle\Theta_{(\pi_k^\star h_{k-1})^{-p}\widetilde{h}}&(\pi_k^\star\mathcal{O}_{X_{k-1}}(p)\otimes\mathcal{O}_{X_k}(D_k))\rangle(\xi) \geq \\ &\geq \delta|\xi|^2_{\omega_k} + (p\varepsilon - C)|(\pi_k)_\star\xi|^2_{\omega_{k-1}}, \qquad \forall\xi \in V_k.\end{aligned}$$

Il en résulte que pour p assez grand, $(\pi_k^\star h_{k-1})^{-p}\widetilde{h}$ est à courbure positive le long de V_k. Maintenant, grâce à l'injection de faisceaux

$$\mathcal{O}_{X_k}(-p) = \pi_k^\star\mathcal{O}_{X_{k-1}}(-p)\otimes\mathcal{O}_{X_k}(-pD_k) \hookrightarrow \big(\pi_k^\star\mathcal{O}_{X_{k-1}}(p)\otimes\mathcal{O}_{X_k}(D_k)\big)^{-1}$$

la métrique $h_k := ((\pi_k^\star h_{k-1})^{-p}\widetilde{h})^{-1/p} = (\pi_k^\star h_{k-1})\widetilde{h}^{-1/p}$ induit une métrique singulière sur $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ qui admet une dégénérescence additionnelle avec diviseur de pôles $p^{-1}(p-1)D_k$. Donc $\Sigma_{h_k} = \pi_k^{-1}\Sigma_{h_{k-1}} \cup D_k$ et

$$\Theta_{h_k^{-1}}(\mathcal{O}_{X_k}(1)) = \frac{1}{p}\Theta_{(\pi_k^\star h_{k-1})^{-p}\widetilde{h}} + \frac{p-1}{p}[D_k]$$

est positive le long de V_k. □

Avant d'énoncer le résultat central de ce paragraphe, rappelons le lemme suivant qui permet la construction de métriques singulières sur le fibré tautologique sur l'espace projectif.

8.4. Lemme . — *Soient m, s deux entiers positifs et α_i $(1 \leq i \leq s)$ des entiers positifs vérifiants $\sum_{1\leq i\leq s} \alpha_i < 1$. Alors, étant donné des sous-espaces linéaires $L_1, L_2, \ldots, L_s$ de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$, il existe une métrique singulière à courbure positive sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}}(1)$ ayant des pôles logarithmiques de multiplicité α_i le long de L_i.*

Démonstration. — Soient $(z_0, z_1, \ldots, z_m)$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}$ et supposons que pour $1 \leq i \leq s$ l'espace L_i est donnée par les équations $u_{i,1} = \ldots = u_{i,j_i} = 0$. Alors,

$$\|\xi\|^2 := \frac{|\xi|^2}{\Pi_{1\leq i\leq s}\big(\sum_{1\leq j\leq j_i} |u_{i,j}(\xi)|^2\big)^{\alpha_i}}$$

définit la métrique singulière voulue mais sur le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}}(\sum_{1\leq i\leq s} \alpha_i)$. Pour conclure il suffit de combiner cette métrique avec une métrique lisse à courbure positive sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m_{\mathbb{C}}}(1 - \sum_{1\leq i\leq s} \alpha_i)$ ce qui est possible compte tenu de la condition sur les α_i. □

8.5. Proposition . — *Soient (X, V) une variété complexe compacte dirigée et soit k un entier positif. Soient, enfin, α_p, $(2 \leq p \leq k)$ des entiers positifs vérifiant $\sum_{2\leq p\leq k} \alpha_p < 1$. Alors, il existe sur $\mathcal{O}_{X_k}(-1)_{|X_k^{\mathrm{sing}}}$ une métrique à courbure négative au sens des k-jets qui dégénère seulement le long de $X_{k,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}}$ avec des multiplicités α_p le long de $D_p^{(k)}$.*

Démonstration. — On doit construire sur $\mathcal{O}_{X_k}(-1)_{|X_k^{\mathrm{sing}}}$ une métrique à courbure négative au sens des k-jets, c'est à dire dans la direction de V_k. Par conséquent, on ne va s'intéresser (grosso modo) qu'aux vecteurs de l'intersection $T_{X_k^{\mathrm{sing}}} \bigcap V_k$ et on va raisonner en s'appuyant sur le lemme 8.2.

On va utiliser une récurrence sur k. Pour $k = 3$, on a la situation suivante

$$\begin{aligned} X_3^{\mathrm{sing}} &= D_3 \bigcup \pi_{2,3}^{-1}(D_p^{(2)}) \\ X_{3,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}} &= D_3 \bigcup D_2^{(3)}, \end{aligned}$$

grâce au lemme 8.2, on sait que les vecteurs de l'intersection $T_{\pi_{2,3}^{-1}\left(D_p^{(2)}\right)} \bigcap V_3$, en dehors de $D_2^{(3)}$, sont verticaux pour la projection $X_3 \to X_2$. Autrement dit, les vecteurs de l'intersection $T_{X_3^{\mathrm{sing}}} \bigcap V_3$ en dehors de $X_{3,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}}$ sont verticaux pour la projection $X_3 \to X_2$. Puisque $X_{3,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}}$ coupe une fibre de la projection $X_3 \to X_2$ en au plus deux composantes irréductibles (deux $\mathbb{P}^{r-2}_{\mathbb{C}}$), il existe alors, d'après le lemme 8.4, une métrique à courbure relative positive sur $\mathcal{O}_{X_k}(1)_{|X_k^{\mathrm{sing}}}$ à singularités logarithmiques de multiplicités données $\alpha_2^{(3)}$ et $\alpha_3^{(3)}$ telles que $\alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} < 1$, le long des composantes $D_2^{(3)}$ et $D_3^{(3)}$ de $X_{3,\mathrm{res}}^{\mathrm{sing}}$. Il convient, alors de prendre la métrique duale sur $\mathcal{O}_{X_3}(-1)_{|X_3^{\text{sing}}}$ qui est bien à courbure négative au sens des jets.

Soit, maintenant, des entiers positifs $\alpha_p^{(k+1)}$, $(2 \le p \le k+1)$ vérifiant $\sum_{2\le p\le k+1} \alpha_p^{(k+1)} < 1$ et supposons que la proposition 8.5 soit vraie pour un k fixé, c'est à dire qu'étant donné des entiers positifs $\alpha_p^{(k)}$, $(2 \le p \le k)$ vérifiant $\sum_{2\le p\le k} \alpha_p^{(k)} < 1$, il existe sur X_k^{sing} une métrique h_k à courbure négative au sens des jets, à singularités logarithmiques de multiplicités $\alpha_p^{(k)}$ le long des composantes de $X_{k,\text{res}}^{\text{sing}}$. Choisissons les $\alpha_p^{(k)}$ tels que

$$\alpha_p^{(k)} > \alpha_p^{(k+1)}.$$

Le lemme 8.3 permet de trouver une métrique h'_{k+1} sur X_{k+1}^{sing} à courbure négative au sens des jets, singulière le long de $S := D_{k+1} \cup (\pi_{k,k+1})^{-1}\big(X_{k,\text{res}}^{\text{sing}}\big)$ avec les mêmes multiplicités logarithmiques $\alpha_p^{(k)}$ $(2 \le p \le k)$. On va construire sur S une métrique à courbure négative au sens des jets singulière seulement le long de $X_{k+1,\text{res}}^{\text{sing}}$: grâce au lemme 8.2, on sait que les vecteurs de l'intersection $T_S \bigcap V_{k+1}$ sont verticaux pour la projection $X_{k+1} \to X_k$. D'autre part le lemme 8.4 et le fait que $X_{k+1,\text{res}}^{\text{sing}}$ coupe une fibre de $X_{k+1} \to X_k$ en au plus k composantes irréductibles (des $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{r-2}$) , permet de construire sur S une métrique h''_{k+1} sur $\mathcal{O}_{X_{k+1}}(1)_{|S}$, à courbure relative positive par rapport à la projection $X_{k+1} \to X_k$ et à singularités logarithmiques de multiplicité $\alpha_p^{(k+1)}$ le long des composantes $D_p^{(k+1)}$ $(2 \le p \le k+1)$ de $X_{k+1,\text{res}}^{\text{sing}}$. La métrique duale convient alors, puisqu'on ne considère que des vecteurs verticaux.

Enfin, grâce au choix $\alpha_p^{(k)} > \alpha_p^{(k+1)}$,on peut appliquer la proposition 6.6 pour recoller les métriques h'_{k+1} et h''_{k+1}, on obtient, ainsi la métrique désirée. $\square$

9. Négativité de courbure au sens des jets des surfaces hyperboliques à cotangent presque ample au sens de Miyaoka

Dans ce paragraphe, on va considérer une variété complexe compacte dirigée quelconque (X, V). On définira sur X_k un concept qui généralise la notion de presque amplitude au sens de Miyaoka. Dans le cas où (X, V) n'admet pas de courbes rationnelles ou elliptiques tangentes à V et $\det V^*$ est ample, on démontre que cette notion de presque amplitude implique la négativité de courbure au sens des jets. Comme application, ceci entraîne une réponse positive à la conjecture de Demailly dans le cas d'une surface hyperbolique fibrant sur une courbe de genre au moins deux (grâce au résultat du paragraphe 5), et dans le cas d'une surface hyperbolique vérifiant $c_1^2 > 2c_2$ grâce au résultat de Miyaoka (théorème 4.5 du chapitre I).

9.1. Définition. — *Soient (X, V) une variété compacte dirigée et n_0 un entier strictement positif. Alors le fibré $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ est dit presque partout gros en dimension $\geq d$, si sa restriction à tout sous-espace analytique irréductible non contenu dans X_k^{sing} et qui se projette sur un sous-espace de dimension $\geq d$ dans X, est gros.*

La suite est consacrée à la démonstration du théorème suivant.

9.2. Théorème. — *Soit (X, V) une variété compacte dirigée. Supposons que (X, V) n'admet pas de courbes rationnelles ou elliptiques tangentes à V, et que $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ est presque partout gros en dimension ≥ 2 pour un certain $n_0 > 0$. Alors, il existe $k_0 \geq n_0$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ possède une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets. En particulier (X, V) est hyperbolique.*

Remarquons, tout d'abord que l'hyperbolicité peut être démontrer directement en utilisant simplement le critère de Brody (théorème 2.2.2). Le plan de la démonstration est le suivant: l'hypothèse signifie qu'on est dans le cas de figure suivant. Il existe sur $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ une métrique singulière h_{n_0} à courbure positive dont l'ensemble des singularités (modulo X_k^{sing}) est un sous-ensemble analytique propre B. La restriction de $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ à chaque composante irréductible B_{i_1} de B est encore gros (ceci est vrai même si cette composante se projette sur une courbe dans X, voir le lemme 9.4 ci-dessous), donc admet une métrique singulière $h_{n_0 i_1}$ à courbure positive (au sens des jets) dont l'ensemble des singularités (modulo $X_{n_0}^{\text{sing}}$) est un sous ensemble analytique propre de B_{i_1}. En itérant ce procédé on arrive à construire une suite de métriques $h_{n_0}, h_{n_0,i_1}, h_{n_0 i_1 i_2} \dots h_{n_0 i_1 \dots i_s}$ où $h_{n_0 i_1 \dots i_s}$ est une métrique à courbure positive qui a pour ensemble base seulement un nombre fini de courbes $C_{n_0 i_1 \dots i_{s+1}}$. Donc, grosso modo on peut "réduire" l'ensemble base de $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ (modulo $X_k^{\rm sing}$) à un nombre fini de courbes. La première étape consiste, donc, à trouver sur la restriction de $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ à chacune de ces courbes une métrique à courbure négative au sens des jets. Rappelons, d'abord, que grâce à la proposition 3.1.2 du chapitre des préliminaires, il existe un étage $k_0 \geq n_0$ tel que les relevées des courbes $C_{n_0 i_1 \ldots i_{s+1}}$ sont lisses dans X_{k_0}. Fixons une fois pour toute cet entier k_0.

9.3. Théorème. — *Sous les hypothèses du théorème 9.2, soit k un entier $\geq k_0$ et soit $C \subset X_k$ une courbe qui ne soit pas une relevée d'une courbe contenue dans une fibre de $\pi : X_{p+1} \to X_p$ pour $p < k-1$. Alors $\mathcal{O}_{X_k}(-1)_{|C}$ admet une métrique à courbure négative au sens des jets, c'est-à-dire, dans la direction de V_k.*

Démonstration. — On peut supposer, grâce à l'hypothèse du théorème 9.2, que C se projette sur une des $C_{n_0 i_1 \ldots i_{s+1}}$ dans X_{n_0}. Si C n'est pas une relevée d'une courbe dans X, alors le fibré tangent à C n'est pas identiquement contenu dans V_k et les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 6.1 permettent de conclure. Si C est une relevée d'une courbe $C_{i_1 \ldots i_{s+1}}$, par définition de k_0, C est lisse de genre ≥ 2 et $T_C = \mathcal{O}_{X_k}(-1)_{|C}$ est donc à courbure totale négative. □

Puisqu'on dispose du théorème 9.3, l'idée naturelle qui se présente est d'imiter la méthode utilisée dans le cas d'une fibration stable. Le recollement devra se faire maintenant sur X_{k_0}. Il faudra donc tout d'abord, construire sur X_k ($k \geq k_0$) des métriques singulières à courbure négative à partir de celles qui existent sur X_{n_0}. On peut faire ça grâce au lemme 8.3 qui s'applique à chacune des métriques singulières $h_{n_0 i_1 \ldots i_l}$ ($1 \leq l \leq s$) sur X_{n_0} et permet de trouver une métrique singulière $h_{k i_1 \ldots i_l}$ ($1 \leq l \leq s$) sur X_k ayant pour ensemble de singularités (modulo $X_k^{\rm sing}$)

$$\Sigma_{h_{k i_1 \ldots i_l}} \pi_{n_0,k}^{-1}\big(\Sigma_{h_{n_0 i_1 \ldots i_l}}\big) \ (1 \leq l \leq s).$$

L'étape suivante est de comprendre la géométrie de $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ sur les images réciproques $\pi_{k,n_0}^{-1}(C_{i_1 \ldots i_{s+1}})$ des courbes $C_{i_1 \ldots i_{s+1}}$ de X_{n_0}. C'est le but du lemme suivant :

9.4. Lemme. — *Soit (X, V) une variété complexe compacte dirigéé et soit C une courbe dans X_k. Alors la restriction $\mathcal{O}_{X_{k+1}}(-1)_{|\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}$ admet une métrique à courbure négative dans la direction de V_{k+1} éventuellement dégénérée le long de la relevée de C dans X_{k+1}.*

Démonstration. — Comme dans la preuve du lemme 8.2, l'intersection $V_k \bigcap T_{\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}$ est réduite, en dehors de la relevée de C dans X_{k+1}, aux vecteurs orthogonaux pour la projection $X_{k+1} \to X_k$. Donc, il suffit de prendre sur $\mathcal{O}_{X_{k+1}}(-1)_{|\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}$ une métrique à courbure relative négative à singularités arbitraires le long de la relevée de C dans X_{k+1}. □

Dans le cas où le rang de V est deux et $\det V^*$ est ample on obtient une conclusion plus forte donnée par le lemme suivant qu'on n'utilisera pas dans la suite.

9.5. Lemme. — *Soit (X,V) une variété complexe compacte dirigée. Supposons que* $\det V^*$ *est ample et que* $\operatorname{rang} V = 2$. *Soit $C \subset X_k$ une courbe non contenue dans $X_k^{\rm sing}$. Alors, la restriction $\mathcal{O}_{X_{k+1}}(1)_{|\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}$ est un fibré gros.*

Démonstration. — On peut supposer que C se projette sur une courbe sur X (car les fibrés $\mathcal{O}_{X_k}(1)$ sont relativement ample par rapport à chaque étage). S'il existe $p_0 \leq k$ tel que $\mathcal{O}_{X_{p_0}}(-1)_{|\pi_{p_0,k}(C)}$ est ample , en appliquant le lemme 8.3 on peut conclure. Supposons, donc, que le degré de $\mathcal{O}_{X_p}(1)_{|\pi_{p,k}(C)}$ est négatif ou nulle, pour tout $p \leq k$. Les deux suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow T_{X_k/X_{k-1}} \longrightarrow V_k \xrightarrow{\pi_{k*}} \mathcal{O}_{X_k}(-1) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_k} \longrightarrow \pi_k V_{k-1} \otimes \mathcal{O}_{X_k}(1) \longrightarrow T_{X_k/X_{k-1}} \longrightarrow 0,$$

permettent de trouver

$$c_1(V_k) = c_1(V_{k-1}) + c_1\big(\mathcal{O}_{X_k}(1)\big),$$

en itérant ceci k-fois on obtient la formule

$$c_1(V_k) = \pi_{0,k}^* c_1(V) + \sum_{p=1}^{k} \pi_{p,k}^* c_1\big(\mathcal{O}_{X_p}(1)\big).$$

Puisque $\det V^*$ est ample on aura

$$\begin{aligned}
\Big(\mathcal{O}_{X_{k+1}}(1)_{|\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}\Big)^2 &= \mathcal{O}_{X_{k+1}}(1)^2 \cdot \pi_{k,k+1}^{-1}(C) \\
&= -c_1(V_k)\cdot C \\
&= -\sum_{p=1}^{k} \pi_{p,k}^* \mathcal{O}_{X_p}(1)\cdot C + \pi_{0,k}^* \det V^* \cdot C > 0,
\end{aligned}$$

car on a supposé que $\mathcal{O}_{X_p}(1)\cdot \pi_{p,k}(C) \leq 0$. De plus

$$\Big(\mathcal{O}_{X_{k+1}}(1)_{|\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}\Big)\cdot \pi_{0,k+1}^* \det V^* = C \cdot \pi_{0,k}^* \det V^* > 0.$$

Il en résulte par le théorème de Riemann-Roch que $\mathcal{O}_{X_k}(1)_{|\pi_{k,k+1}^{-1}(C)}$ est gros. □

En appliquant le lemme 9.4 à chacune des courbes $C_{n_0 i_1 \dots i_{s+1}}$, on voit que la restriction de $\mathcal{O}_{X_{n_0+1}}(-1)$ à la variété $\pi_{n_0,n_0+1}^{-1}\big(C_{n_0 i_1\dots i_{s+1}}\big)$ admet une métrique singulière $h_{n_0+1 i_1 \dots i_{s+1}}$ à courbure négative au sens des jets dont les singularités éventuelles sont des courbes $C_{n_0+1 i_1\dots i_{s+2}}$. Par itérations, on construit sur X_k ($k \geq k_0$ une suite de métriques $h_{k i_1\dots i_l}$, où $1 \leq l \leq s+k-n_0$ telque l'ensemble des singularités de $h_{k i_1 \dots i_{s+k-n_0}}$ sont des courbes $C_{k i_1 \dots i_{s+k-n_0+1}}$. Grâce au théorème 9.3 et puisque $k \geq k_0$, la restriction de $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ à chacune des courbes $C_{k i_1 \dots i_{s+k-n_0+1}}$ admet une métrique, cette fois lisse, à courbure négative au sens des jets. Il suffit maintenant de recoller, sur X_k toutes les métriques $h_{k i_1 \dots i_l}$, où $1 \leq l \leq s+k-n_0+1$ en une métrique globale h_k sur $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ à courbure négative au sens des k-jets.

Pour des raisons techniques on ne peut faire les recollements que lorsque on "réduit" les singularités le long de X_k^{sing} à un sous ensemble analytique qui ne coupe pas les relevées dans X_k des courbes $C_{n_0 i_1 \dots i_{s+1}}$. Ceci est le cas pour $X_{k,\text{res}}^{\text{sing}}$.

Retournons, maintenant à la démonstration du théorème 9.2. On commence par réduire à $X_{k+1,\text{res}}^{\text{sing}}$ les singularités, le long de X_k^{sing}, des métriques $h_{ki_1\dots i_l}$, où $1 \leq l \leq s+k-n_0+1$. Ceci grâce aux propositions 6.6 et 8.5. Les métriques obtenues auront les "mêmes singularités" le long de $X_{k+1,\text{res}}^{\text{sing}}$ (ceci permettra d'utiliser le lemme 6.5 pour faire les recollements). Ensuite, on fait des recollements avec l'ordre suivant: pour un i_{s+k-n_0} fixé on recolle, à l'aide de la propositions 6.5, les métriques lisses $h_{ki_1\dots i_{s+k-n_0+1}}$, puis à l'aide de la proposition 6.6, recoller la métrique obtenue avec la métrique $h_{ki_1\dots i_{s+k-n_0}}$, on obtient une nouvelle métrique qu'on appelle aussi $h_{ki_1\dots i_{s+k-n_0}}$. En itérant ces recollements avec le même ordre, c'est à dire pour i_l fixé on recolle, à l'aide de la proposition 6.5, les métriques $h_{ki_1\dots i_{l+1}}$, puis à l'aide de la proposition 6.6, on recolle la métrique obtenue avec la métrique $h_{ki_1\dots i_l}$ et on appelle la nouvelle métrique du même nom. On remonte de cette façon jusqu'à h_{n_0}, en faisant le dernier recollement, on arrive, enfin, à la métrique souhaitée. □

Comme application du théorème 9.2 on a les deux résolutions partielles de la conjecture de Demailly.

9.6. Théorème. — *Soit $f : X \to B$ une fibration à fibres réduites et irréductibles de genre ≥ 2 sur une courbe lisse de genre ≥ 2. Alors il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ possède une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets telle que $\Sigma_{h_k} = X_{k,\text{res}}^{\text{sing}}$.*

9.7. Théorème. — *Soit X une surface hyperbolique telle que $c_1^2 > 2c_2$. Alors, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, $\mathcal{O}_{X_k}(-1)$ possède une métrique non dégénérée à courbure négative au sens des k-jets telle que $\Sigma_{h_k} = X_{k,\text{res}}^{\text{sing}}$.*

Remarquons que pour montrer la conjecture de Demailly pour une surface hyperbolique quelconque, il suffirait, grâce au théorème 9.2, de montrer la conjecture suivante (peut être plus difficile pour des raisons expliquées dans le paragraphe 3.4 des préliminaires) .

9.8. Conjecture. — *Soit X une variété projective de type général minimale (i.e. K_X est nef). Supposons que T_X^* soit stable. Alors, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $\mathcal{O}_{X_{n_0}}(1)$ est presque partout gros en dimension $\geq$ à la dimension de X.*

En effet, grâce à un résultat de S. Lu [Lu96], le cotangent à une surface X minimal de type général est stable si X n'est pas uniformisée par le bidisque. Remarquons enfin que la conjecture 9.7. implique aussi la conjecture de Green-Griffiths (et donc la conjecture de Kobayashi) dans le cas des surfaces minimales de type général.

BIBLIOGRAPHIE

[Ah41] AHLFORS L. — *The theory of meromorphic curves*, Acta Soc. Sci. Finn. N.S., A, **3** (1941), 1–31.

[Ar71] ARAKELOV S.J.. — *Familes of algebraic curves with fixed degeneracies*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math., **35** (1971), ; engl. transl. Math. USSR Izv. **5** (1971), 1277–1302.

[AW71] ARTIN M., WINTERS G. — *Degenerate fibers and reduction of curves*, Top., **10** (1971), 373–383.

[Ba84] BABETS V.A. — *Theorems of Picard type for holomorphic mappings*, Sib. Math. J., **25** (1984), 195–200.

[Be78] BEAUVILLE A. — *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque **54**, 1978.

[BG77] BRODY R., GREEN M. — *A family of smooth hyperbolic surfaces in* $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$, Duke Math. J., **44** (1977), 873–874.

[Bl26] BLOCH A. — *Sur les systèmes de fonctions uniformes satisfaisant à l'équation d'une variété algébrique dont l'irrégularité dépasse la dimension*, J. de Math., **5** (1926), 19–66.

[Bl26'] BLOCH A. — *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*, Ann. École Normale, **43** (1926), 309–362.

[Bo77] BOGOMOLOV F.A. — *Families of curves on a surface of general type*, Soviet. Math. Dokl., **18** (1977), 1294–1297.

[Bo79] BOGOMOLOV F.A. — *Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties*, Math. USSR Izvestija, **13** (1979), 499-555.

[BPV84] BARTH W., PETERS C., VAN DE VEN A. — *Compact complex surfaces*, Ergebrnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3, Folge, Band 4, Springer, 1984.

[Br78] BRODY R. — *Compact manifolds and hyperbolicity*, Trans. Amer. Math. Soc, **235** (1978), 213–219.

[Ca28] CARTAN H. — *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications*, Thèse, Paris. Ann. École Normale, **45** (1928), 255–346.

[CF90] CAMPANA F, FLENNER H. — *A characterisation of ample vector bundles on a curve*, Math. Ann., **287**(4) (1990), 571–575.

[CG76] COWEN M., GRIFFITHS P. — *Holomorphic curves and metrics of negative curvature*, J. Analyse Math., **29** (1976), 93–153.

[Ch89] CHEUNG C.K. — *Negative holomorphic sectional curvature and hyperbolic manifolds*, Math. Zeit. n° 1, **201** (1989), 105–119.

[CKM88] CLEMENS H., KOLLÁR J., MORI S. — *Higher dimensional complex geometry*, Astérisque **166**, 1988.

[Cl86] CLEMENS H. — *Curves on generic hypersurface*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., **19** (1986), 629–636.

[Co73] COWEN M.J. — *Families of negatively curved hermitian manifolds*, Proc. Am. Math. Soc., **39** (2) (1973), 362–366.

[DEG96] DEMAILLY J.-P., EL GOUL J. — *Connexions méromorphes projectives et variétés algébriques hyperboliques*, C.R. Acad. Sci. Paris, à paraître, (1997).

[Dem90] DEMAILLY J.-P. — *Cohomology of q-convex spaces in top degrees*, Math. Z., **204** (1990), 283–295.

[Dem90'] Demailly J.-P. — *Singular hermitian metrics on positive line bundles*, Proceedings of the Bayreuth conference “Complex algebraic varieties”, Lecture Notes in Math., **1507**, Springer-Verlag (1992), 87–104.

[Dem92b] Demailly J.-P. — *Regularisation of closed positive currents and intersection theory*, J. Alg. Geom., **1** (1992), 361–409.

[Dem95] Demailly J.-P. — *Analytic geometry*, Springer-Verlag 1995, to appear.

[Dem96] Demailly J.-P. — *Algebraic criteria for Kobayashi hyperbolic projective varieties and jet differentials*, Proceedings of the AMS Summer Institute on Alg. Geom. held at Santa Cruz, ed. J. Kollár, July 1995, to appear.

[DPS94] Demailly J.-P., Peternell Th., Schneider M. — *Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles*, J. Alg. Geom., **3** (1994), 295–345.

[DM69] Deligne P., Mumford D. — *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. **36**, (1969).

[DSW92] Dethloff G., Schumacher G., Wong P.M. — *Hyperbolicity of the complement of plane algebraic curves*, Preprint Math. Inst. Göttingen, **31** (1992), 1–38, to appear in Amer. J. Math.

[DSW94] Dethloff G., Schumacher G.,Wong P.M. — *On the hyperbolicity of the complement of curves in algebraic surfaces : the three component case*, Preprint Sonder forschungsbereich **237**, Essen/Bochum/Düsseldorf, (1994).

[EG96] El Goul J. — *Algebraic families of smooth hyperbolic surfaces of low degree in* $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$, Manuscripta Math., **90** (1996), 521–532.

[Fu77] Fujita T. — *Some remarks on Kodaira dimensions of fiber spaces*, Proc. Japan Acad., **53** Ser. A (1977), 28–30.

[Gi71] Gieseker D. — *P-ample bundles and their Chern classes*, Nagoya Math. J, **43** (1971), 91–116.

[GR65] Grauert H., Reckziegel H. — *Hermitesche Metriken und normale Familien holomorpher Abbildungen*, Math. Zeitschrift, **89** (1965), 108–125.

[Gra62] Grauert H. — *Uber Modifikationen und exzeptonelle analytische Mengen*, Math. Annalen, **146** (1962), 331-368.

[Gra89] Grauert H. — *Jetmetriken und hyperbolische Geometrie*, Math. Zeitschrift, **200** (1989), 149–168.

[Gre75] Green M. — *Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties*, Amer. J. Math., **97** (1975), 43–75.

[Gre77] Green M. — *The hyperbolicity of the complement of* $2n+1$ *hyperplanes in general position in* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ *and related results*, Proc. Amer. Math. Soc., **66** (1977), 109–113.

[Gre78] Green M. — *Holomorphic maps to complex tori*, Amer. J. Math., **100** (1978), 615–620.

[Gri69] Griffiths P. — *Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles*, Global analysis, Princeton Univ. Press, 1969.

[GG80] Green M., Griffiths P. — *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings*, The Chen Symposium 1979, Proc. Inter. Sympos. Berkeley, CA, 1979, Springer-Verlag, , New York (1980), 41–74.

[GH78] Griffiths P., Harris J. — *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New York, 1978.

[Ha66] Hartshorne R. — *Ample vector bundles*, Publ. Math. I.H.E.S., **29** (1966), 63–94.

[Ha77] Hartshorne R. — *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Hi66] Hirzebruch F. — *Topological methods in Algebraic Geometry*, Grundl. Math. Wiss.**131**, Spriger, Heidelberg, 1966.

[Ii71] IITAKA S. — *On D-dimension of algebraic varieties*, J. Math. Soc. Japan, **23** (1971), 356–373.

[Jo78] JOUANOLOU J.-P. — *Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique*, Math. Ann., **332** (1978), 239–248.

[Ka80] KAWAMATA Y. — *On Bloch's cojecture*, Invent. Math., **57** (1980), 97–100.

[Ko70] KOBAYASHI S. — *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings*, Marcel Dekker, New York, 1970.

[Ko75] KOBAYASHI S. — *Negative vector bundles and complex Finsler structures*, Nagoya Math. J, **57** (1975), 153–166.

[Ko76] KOBAYASHI S. — *Intrinsic distances, measures and geometric function theory*, Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), 357–416.

[Ko78] KOBAYASHI S. — *Complex manifolds with non positive holomorphic sectionnal curvature and hyperbolicity*, Tôhoku Math. J, **30** (1978), 487–489.

[La86] LANG S. — *Hyperbolic and diophantine analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., **14** (1986), 159–205.

[La87] LANG S. — *Introduction to complex hyperbolic spaces*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[LY90] LU S.S.-Y., YAU S.T. — *Holomorphic curves in surfaces of general type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **87** (1990), 80–82.

[Lu96] LU S.S.-Y. — *On hyperbolicity and the Green-Griffiths conjecture for surfaces*, Geom. Complex Analysis, , ed. J. Naguchi et al. (1996), 401–408.

[M-De78] MARTIN-DESCHAMPS M. — *Courbes de genre géométrique borné sur une surface de type général (d'après F. Bogomolov)*, Séminaire Bourbaki, **519** (1978), 1–15.

[M-De81] MARTIN-DESCHAMPS M. — *Réduction semi-stable*, Exposé n^{o} 1, Astérisque, **86** (1981), 1–34.

[M-De85] MARTIN-DESCHAMPS M. — *Propriétés de descente des variétés à fibré cotangent ample*, Ann. Inst. Fourier, **33** (1985), 39–64.

[Mi82] MIYAOKA Y. — *Algebraic surfaces with positive indices*, Katata Symp. Proc. 1982, Progress in Math., **39** (1983), 281–301.

[MN93] MASUDA K., NOGUCHI J. — *A construction of hyperbolic hypersurface of* $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$, Preprint Tokyo Inst. Technology, Ohokayama, , Tokyo (1993), 27p..

[Mo97] MOUROUGANE C. — *Notions de positivité et d'amplitude des fibrés vectoriels. Théorème d'annulation sur les variétés kählériennes*, Thèse de Doctorat de Mathématiques à l'UJF, Janvier1997.

[NO90] NOGUCHI J., OCHIAI T. — *Geometric function theory in several complex variables*, Transl. Math. Monographs **80**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1990.

[No77] NOGUCHI J. — *Holomorphic curves in algebraic varieties*, Hiroshima Math. J. , **7** (1977), 833–853.

[No81] NOGUCHI, J. — *Lemma on logarithmic derivatives and holomorphic curves in algebraic varieties*, Nagoya Math. J. , **83** (1981), 213–233.

[Na89] NADEL A. — *Hyperbolic surfaces in* $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}}$, Duke Math. J., **58** (1989), 749–771.

[Och77] OCHIAI T. — *On holomorphic curves in algebraic varieties with ample irregularity*, Invent. Math., **43** (1977), 83–96.

[Pa68] PARŠIN A.N. — *Algebraic curves over function fields*, Math. USSR Izv., **2** (1968), 1145–1170.

[Ro71] ROYDEN H. — *Remarks on the Kobayashi metric*, Proc. Maryland Conference on Several Complex Variables, Lecture Notes **185**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Ro74] ROYDEN H. — *The extension of regular holomorphic maps*, Amer. Math. Soc., **43** (1974), 306–310.

[Sa78] SAKAI F. — *Symmetric powers of the cotangent bundle and classification of algebraic varieties*, Proc. Copenhagen Meeting in Alg. Geom., 1978.

[Sch86] SCHNEIDER M. — *Complex surfaces with negative tangent bundle*, Complex Analysis and Algebriac Geom. (Göttingen 85) Lecture Notes Math., **1194**, Springer-Verlag (1986), 150–157.

[Se68] SEIDENBERG A. — *Reduction of singularities of the differential equation $AdY = BdX$*, Amer. J. of Math., **90** (1968), 248–269.

[Si87] SIU Y.-T. — *Defect relations for holomorphic maps between spaces of different dimensions*, Duke Math. J, **55** (1987), 213–251.

[ST88] SCHNEIDER M., TANCREDI A. — *Almost-positive vector bundles on projective surfaces*, Math. Ann., **280** (1988), 537–547.

[SY95] SIU Y.-T., YEUNG S.K. — *Hyperbolicity of the complement of a generic smooth curve of high degree in the complex projective plane*, to appear in Inventiones Math., 1996.

[SY97] SIU Y.-T., YEUNG S.K. — Defects for ample divisors of abelian varieties, Schwarz lemma and hyperbolic hypersurfaces of low degrees,Preprint.

[Sz81] SZPIRO L. — *Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif*, Exposé n° 3, Astérisque, **86** (1981), 44–78.

[Ts89] TSAI I.-H. — *Negatively curved metrics on Kodaira surfaces*, Math. Ann., **285** (1989), 369–379.

[Ue75] UENO K. — *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Math. **439**, Springer, 1975.

[Um73] UMEMURA H. — *Some results in the theory of vector bundles*, Nagoya Math. J, **52** (1973), 97–128.

[Vi77] VIEHWEG E. — *Canonical divisors and the additivity of the Kodaira dimension for morphisms of relative dimension one*, Comp. Math., **35** (2) (1977), 197–223.

[Wo93] WONG P. M. — *Recent results in hyperbolic geometry and Diophantine geometry*, Int. Symp. on Holomorphic maps. Diophantine Geometry and related topics, R.I.M.S. Lect. Notes ser. , **819** (1993), 120–135.

[Xu94] XU G. — *Subvarieties of general hypersurfaces in projective space*, J. Differential Geometry, **39** (1994), 139–172.

[Yan77] YANG P. — *Kähler metrics on fibered manifolds*, Proc. Am. Math. Soc., **63** (1977), 131–133.

[Yau78] YAU S.T. — *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge Ampère equation*, Comm. Pure and Appl. Math., **31** (1978), 339-441.

[Za86] ZAIDENBERG M. — *On hyperbolic embedding of complements of divisors and the limiting behaviour of the Kobayashi-Royden metric*, Math. USSR Sbornik, **55** (1986), 55–70.

[Za87] ZAIDENBERG M. — *The complement of a generic hypersurface of degree $2n$ in $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$ is not hyperbolic*, Siberian Math. J, **28** (1987), 425–432.

[Za89] ZAIDENBERG M. — *Stability of hyperbolic embeddedness and construction of examples*, Math. USSR Sbornik, **63** (1989), 351–361.

[Za93] ZAIDENBERG M. — *Hyperbolicity in projective spaces*, International Sym. on Hol. map. Lecture Notes, **819** (1993), 136–156.

RÉSUMÉ

Le thème central de cette thèse est l'étude de certaines propriétés de négativité de courbure des surfaces algébriques hyperboliques au sens de Kobayashi. L'étude que nous avons faite est divisée en deux parties: dans un premier temps, nous introduisons la notion de connexion projective partielle à coefficients méromorphes, et montrons comment de telles connexions peuvent servir à construire des opérateurs Wronskiens globaux agissant sur les jets de courbes holomorphes (un type très particulier de jets de différentielles invariantes). Grâce à un théorème d'annulation du Wronskien reposant sur des hypothèses de négativité de la courbure de Ricci et généralisant des résultats antérieurs de Green-Griffiths, Siu et Nadel, nous donnons des exemples explicites de familles algébriques de surfaces hyperboliques dans l'espace projectif, de degré quelconque supérieur ou égal à onze. Ceci illustre une (toute petite) partie d'une conjecture célèbre de S. Kobayashi, qui prévoit qu'une hypersurface générique de l'espace projectif de degré assez grand (par rapport à la dimension) est hyperbolique.

Dans un deuxième temps, nous montrons la presque amplitude au sens de Miyaoka du fibre cotangent à toute surface de type général fibrée sur une courbe de genre supérieur ou égal à deux, et qui admet au moins une fibre singulière. Comme application, nous obtenons une réponse positive à une conjecture de Demailly (qui relie l'hyperbolicité à une propriété de négativité de courbure au sens des jets) dans le cas d'une surface fibrée hyperbolique stable sur une courbe de genre au moins deux. Ces résultats sont obtenus grâce à une étude algébro-géométrique qui nous permet de construire des sections globales des fibres en droites tautologiques associés aux espaces des jets. Les techniques que nous utilisons sont assez variées, et combinent des outils algébriques tels que des théorèmes de rigidité et d'additivité des dimensions de Kodaira-Iitaka, et des outils analytiques de géométrie différentielle complexe: métriques her-mitiennes singulières et techniques de recollement de métriques.

MOTS-CLÉS

Connexion et courbure de Chern, connexion méromorphe, fibre des jets de courbes, fibre des jets de différentielles, genre de courbe, Kobayashi-hyperboli-cité, métrique de jet, variété de type général, variété dirigée.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14B05, 53B15, 53C55, 32H20, 14J40, 14J70, 32L10, 14Q05.