Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier (Grenoble I)

Inégalités de Morse et problèmes en géométrie analytique

Thierry Bouche

préparée à l'Institut Fourier
laboratoire de mathématiques associé au C.N.R.S. (LA 188)

soutenue le vendredi 9 février 1990

Jury :

Gérard Besson, examinateur
Jean-Pierre Demailly, directeur
Alain Dufresnoy, examinateur
Paul Gauduchon, examinateur
Henri Skoda, président

ABSTRACT

We study two generalizations of the Holomorphic Morse Inequalities proved by Jean-Pierre Demailly in 1985: the case where the curvature of the line bundle is degenerate (maximum rank different from the dimension of the variety) and the case where the manifold is not compact. For these two cases, we prove precise theorems similar to the original one of [De 1]. The second part of the thesis investigates on one hand the study of an equivalent for the distortion function of a positive line bundle over a projective manifold; on the other hand we study the coeffective cohomology of a symplectic manifold. The main tools employed are those of differential geometry: Weyl asymptotic formula-type theorems, an equivalent for the heat kernel associated to Δ'', and estimates on the curvature tensor.

RÉSUMÉ

Nous étudions deux généralisations des inégalités de Morse holomorphes de Jean-Pierre Demailly : le cas où la courbure du fibré est dégénérée et le cas où la variété n'est pas compacte. Dans ces deux cas, des théorèmes précis analogues à celui de [De 1] sont démontrés. La seconde partie de cette thèse est consacrée d'une part à l'étude d'un équivalent pour la fonction de distorsion d'un fibré positif sur une variété kahlérienne et d'autre part à l'étude de la cohomologie coeffective d'une variété symplectique. Les principaux outils employés sont ceux de la géométrie différentielle : théorèmes de répartition spectrale, équivalent du noyau de la chaleur pour Δ'', ou estimations du tenseur de courbure.

MOTS-CLÉS

Inégalités de Morse holomorphes, d''cohomologie, fibré linéaire hermitien, courbure dégénérée, variété q-convexe, noyau de la chaleur, variété symplectique.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

32 L 10 (primaire), 32 F 10, 32 L 05, 53 C 15 (secondaire)

C'est Jean-Pierre Demailly qui a conduit mes premiers pas dans la recherche mathématique. Il n'a pas ménagé son temps pour me conseiller tout au long de la préparation de ce travail. Je l'en remercie sincèrement.

Henri Skoda me fait l'honneur de présider le jury, Paul Gauduchon d'y participer, je les en remercie vivement.

J'ai trouvé un accueil sympathique à l'Institut Fourier, et en particulier au sein du Groupe de Travail d'Analyse Complexe dont Alain Dufresnoy fait partie. Gérard Besson a su me donner des indications qui m'ont fait progresser. Je les remercie tous deux d'avoir accepté de participer au jury.

Je me dois enfin de citer tout particulièrement Monique Marchand et Arlette Guttin-Lombard qui ont su faire d'un brouillon parfois sauvage ce texte soigné et, je l'espère, agréable à lire.

Sommaire

Chapitre 0

Introduction générale

0. Plan de la thèse

1. Notations et principales définitions

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, F un fibré holomorphe au-dessus de X de rang r. Nous supposons X munie d'une métrique ω, et F d'une métrique hermitienne h. Notons $\mathcal{C}^\infty_m(X,F) = \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X,F)$ l'espace des m-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans F, avec son scindage en formes de type (p,q) donné par la structure holomorphe de F : on pose ici $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X,F) = \mathcal{C}^\infty(\Lambda^p T^*_{\mathbb{C}}X \otimes \Lambda^q \overline{T^*_{\mathbb{C}}X} \otimes F)$.

1.1. Connexion de Chern. — Une connexion D sur F est un opérateur linéaire différentiel d'ordre 1, et qui est une antidérivation :

$$D : \mathcal{C}^\infty_q(X,F) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{q+1}(X,F)$$

vérifiant, si $f \in \mathcal{C}^\infty_p(X,\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{C}^\infty_q(X,F)$

$$D(fu) = df \wedge u + (-1)^p f \wedge Du.$$

Sur un ouvert Ω de trivialisation de F, une connexion s'écrit $Du = du + \Gamma \wedge u$ où $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty_1(\Omega, \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r,\mathbb{C}^r))$ est la *forme* de D sur Ω. On vérifie aisément que D^2 est un opérateur de degré 0, c'est-à-dire que $D^2 u = c(D) \wedge u$, où $c(D) = d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma$ sur Ω. On appelle $c(D)$ la courbure de D.

De plus, on peut définir un accouplement sesquilinéaire à l'aide de la métrique h : si $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ est un repère $\mathcal{C}^\infty$ de F, on écrit $u = \sum u_\lambda \otimes e_\lambda$ et $v = \sum v_\lambda \otimes e_\lambda$ si $(u,v) \in \mathcal{C}^\infty_p(X,F) \times \mathcal{C}^\infty_q(X,F)$ et on définit

$$\{u,v\} = \sum u_\lambda \wedge \overline{v}_\mu \langle e_\lambda, e_\mu\rangle_h.$$

La connexion D est hermitienne si elle est compatible avec cet accouplement, soit :

$$d\{u,v\} = \{Du,v\} + (-l)^{\deg u}\{u,Dv\},$$

ce qui est équivalent à la condition $\Gamma^* = -\Gamma$ dans un repère orthonormal et implique en particulier que

$$ic(D) \in \mathcal{C}^\infty_2(X, \mathrm{Herm}(F,F)).$$

Comme X est analytique complexe, la connexion D peut se décomposer en somme de deux connections D' et D'' de type $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement. Soient Γ' et Γ'' leurs formes respectives, on a $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ et D est hermitienne si et seulement si $\Gamma' = -(\Gamma'')^*$ dans un repère orthonormal. Du fait que F est un fibré holomorphe, il possède un opérateur global D'' défini par d'' sur tout ouvert de trivialisation. On définit alors la connexion de Chern de F comme étant l'unique connexion hermitienne sur F dont la composante de type $(0,1)$ est d'', sa courbure sera notée $c(F)$.

Si H est la matrice de la métrique h dans un repère (e_λ) au-dessus de Ω, il est facile de vérifier que :

$$\begin{cases} D''u = d''u, \\ D'u = \overline{H}^{-1} d'(\overline{H} \wedge u), \\ c(F) = -d''(\overline{H}^{-1} d'(\overline{H}). \end{cases}$$

1.2. Fibrés linéaires. — Si E est un fibré holomorphe de rang 1, on peut écrire la forme d'une connexion hermitienne sur E comme $\Gamma = -iA$, où A est une 1-forme réelle. Alors $B = dA$ est le “champ magnétique” associé à la connexion D, et l'on a $ic(D) = B$. Sur E, une métrique hermitienne est une fonction positive que l'on peut écrire $e^{-\varphi}$ où $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. La connexion de Chern s'écrit

$$\begin{cases} D'u = e^{\varphi} d'(e^{-\varphi}u) \\ D''u = d''u \end{cases} \quad \text{et} \quad c(E) = d'd''\varphi.$$

1.3. Cohomologie de Dolbeault et théorie de Hodge. — Le complexe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{p,0}(X,F) \xrightarrow{D''} \mathcal{C}^\infty_{p,1}(X,F) \xrightarrow{D''} \cdots \xrightarrow{D''} \mathcal{C}^\infty_{p,n}(X,F) \xrightarrow{D''} 0$$

est une résolution acyclique du faisceau $\Omega^p_X \otimes F$ des germes de p-formes holomorphes à valeurs dans F. Le q-ième groupe de cohomologie de ce complexe est noté $H^{p,q}(X,F) = H^q(X, \Omega^p_X \otimes F)$ et dénommé groupe de cohomologie de Dolbeault (ou d''-cohomologie) en bidegré (ou type) (p,q) de F.

La métrique ω sur X permet de définir un élément de volume $d\sigma = \frac{\omega^n}{n!}$. On peut donc considérer la norme L^2 globale $\|u\|^2 = \int_X |u|^2 d\sigma$ où $|u|$ est la norme ponctuelle de u donnée par la métrique h sur F, et déduite de ω sur $\Lambda^{p,q}T^*X$. Soit $L^2_{p,q}(X,F)$ le complété pour cette norme de $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X,F)$. On définit D^* (resp. δ', δ'') l'adjoint formel de D (resp. de D', D'') dans cette norme ; l'opérateur de Laplace-Beltrami associé est $\Delta = D^*D + DD^*$ (resp. Δ', Δ'') (aussi appelé Laplacien brut dans la littérature riemannienne lorsque D est hermitienne). Si X est compacte (ou si ω est complète) la théorie de Hodge affirme que Δ (resp. Δ', Δ'') est autoadjoint, on a par conséquent une décomposition $L^2_{p,q}(X,F) = \ker \Delta'' \oplus \operatorname{Im} \Delta''$ d'où l'on déduit l'isomorphisme $H^{p,q}(X,F) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X,F)$, le deuxième espace étant celui des formes harmoniques. L'intérêt de cet isomorphisme est qu'il permet d'obtenir des informations sur les espaces $H^{p,q}(X,F)$ qui ne dépendent que de la structure holomorphe de F à l'aide de sections harmoniques pour un opérateur qui dépend fortement des métriques ω et h.

2. Présentation des résultats [(1)]

Sur une variété $\mathcal{C}^\infty$, on appelle fonction de Morse une fonction dont aucun point critique n'est dégénéré. Les points critiques d'une telle fonction sont donc isolés, et par conséquent en nombre fini sur une variété compacte. L'indice d'un point critique est le nombre de valeurs propres strictement négatives du hessien de la fonction de Morse. Si nous notons b_p et s_p respectivement le p-ième nombre de Betti de la variété et le nombre de points critiques d'indice p d'une fonction de Morse donnée sur cette même variété, nous avons les inégalités de Morse fortes :

$$b_p - b_{p+1} + \cdots + (-l)^p b_0 \leqslant s_p - s_{p+1} + \cdots + (-l)^p s_0 \tag{2.1}$$

pour tout $p \geqslant 0$. On peut en déduire les inégalités de Morse faibles : $b_p \leqslant s_p$ et la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi = b_0 - b_1 + \cdots + (-l)^m b_m = s_0 - s_1 + \cdots + (-l)^m s_m.$$

L'idée originale de Jean-Pierre Demailly [6] est la suivante : si X est une variété holomorphe compacte de dimension n et E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 au-dessus de X, et si la métrique hermitienne de E est donnée par un poids $e^{-\varphi}$ on peut faire jouer à φ le rôle d'une fonction de Morse pour obtenir des inégalités du type (2.1) sur la d''-cohomologie du fibré E [(2)]. Cela conduit aux inégalités

[(1)] Dans les renvois, le chiffre romain indique le chapitre/les chiffres arabes correspondent à la numérotation interne de chaque chapitre.

[(2)] On peut d'ailleurs observer que la méthode de Witten pour obtenir les inégalités (2.1) consiste à perturber le laplacien riemannien à l'aide de la fonction de Morse en considérant le complexe différentiel défini par la connexion $e^{tf}de^{tf}$. Or, d'après l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano, on a $\Delta''_k = \Delta'_k + k[ic(L), \Lambda]$ dans le cas où (X, ω) est kählérienne (le cas non kählérien est "asymptotiquement tangent" au cas kählérien). Et nous avons vu que, si $e^{-\varphi}$ est la métrique sur E, $e^{-k\varphi}$ est la métrique sur E^k, donc Δ'_k est le laplacien associé à la connexion $e^{k\varphi}d'e^{-k\varphi}$. Ceci explique l'étroite parenté entre les deux théories.

de Morse suivantes : notons $X(q)$ l'ouvert des points de X où $ic(E) = id'd''\varphi$ admet exactement q valeurs propres < 0 et $X(\leqslant q) = \bigcup_{\nu \leqslant q} X(\nu)$. Si G est un fibré vectoriel quelconque de rang a, et E^k la k-ième puissance tensorielle de E, on a (Théorème 0.1 de [6]) :

$$(2.2) \qquad \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu \dim H^\nu(X, E^k \otimes G) \leqslant \frac{r\,k^n}{n!} \int_{X(\leqslant q)} \left(\frac{i}{2\pi} c(E) \right)^n + o(k^n).$$

On a également les inégalités de Morse holomorphes faibles associées, et une formule asymptotique pour la caractéristique d'Euler de $E^k \otimes G$:

$$\chi(X, E^k \otimes G) = \sum_{\nu=0}^{q} (-1)^\nu H^\nu(X, E^k \otimes G) = \frac{r\,k^n}{n!} \int_X \left(\frac{i}{2\pi} c(E) \right)^n + o(k^n).$$

On peut remarquer que, si la courbure de E est dégénérée en tout point de X, l'intégrale de courbure dans (2.2) est toujours nulle. D'autre part, la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne une expression polynomiale de k pour $\chi(X, E^k \times G)$, on est donc tenté d'obtenir une majoration des sommes alternées des dimensions cohomologiques qui soit de l'ordre de k^{n-1} au plus. Cela n'est cependant pas simple du fait que la géométrie et la métrique de la variété X interviennent dans le terme négligeable, ainsi que des dérivées de la courbure de E, et la métrique de G.

Une autre difficulté vient du fait que, même si le rang de la courbure de E est constant, les espaces $X(\leqslant q)$ peuvent être très irréguliers, et en tout cas assez résistants à la méthode de localisation utilisée dans [6] pour prouver (2.2).

Pour surmonter la seconde difficulté, on peut supposer qu'il existe un feuilletage de codimension r le long duquel la courbure s'annule (cette hypothèse est à rapprocher de celle de Bott [3] pour étudier les inégalités de Morse classiques lorsque la fonction de Morse est dégénérée : il suppose que l'ensemble des points d'indice q forme une sous-variété de M).

Pour surmonter la première difficulté, il suffit de pouvoir contrôler les termes parasites par une suite tendant vers l'infini : on considère un second fibré linéaire F sur X, et nous obtenons alors des inégalités de type (2.2) pour la cohomologie de $E^k \otimes F^\ell \otimes G$ avec un ordre de croissance donné par $k^r \ell^{n-r}$ si $\ell \to +\infty$ et $k/\ell \to +\infty$ (Théorème I.0.1). Nous observons également qu'une conséquence simple de ces inégalités est donnée par une majoration de la croissance des groupes $H^q(X, E^k \otimes G)$ de l'ordre de k^r, ce qui précise dans ce cas le terme $o(k^n)$ (Corollaire I.0.2).

Nous nous sommes ensuite intéressé au cas où la variété X n'était plus compacte. Andreotti-Grauert [1] ont montré que, si X est m-convexe, les groupes $H^q(X, E^k \otimes G)$ sont de dimensions finies pour $q \geqslant m$. Nous avons montré qu'alors ils vérifiaient des inégalités $(2.2)'$ (Théorème II.0.1). La démonstration repose sur des estimations pour une courbure modifiée à l'aide des hypothèses de m-convexité. Ces estimations permettent de ramener l'étude des groupes de cohomologie à celles des fonctions propres du laplacien Δ'' vérifiant un problème de Dirichlet sur un ouvert relativement compact de X : on se reporte alors au cas compact. De même, nous avons montré par une démarche analogue que, si la variété X vérifie les hypothèses d'un théorème de finitude d'Ohsawa [10], les inégalités $(2.2)'$ sont vérifiées à partir d'un certain degré (Théorème II.0.2). Le théorème n.0.1 permet également d'obtenir de façon très simple des estimations de Siu [11] pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété m-convexe (Théorèmes II.3.1 et II.3.2).

Dans un article récent [8], Ji étudie un encadrement pour la fonction de distorsion d'un fibré ample E au-dessus d'une variété abélienne (tore complexe).

Cette fonction est définie comme le rapport ponctuel entre une métrique initiale donnée sur E^k et la métrique de Fubini-Study induite sur E^k par un plongement dans $\mathcal{O}(1)$, le fibré canonique d'une variété projective. Il démontre que la métrique de Fubini-Study ainsi définie s'aplatit, c'est-à-dire qu'elle converge vers la métrique initiale lorsque k tend vers l'infini, et pose la question de savoir si ce résultat serait encore vrai pour un fibré ample quelconque au-dessus d'une variété kählérienne. Le théorème III.0.1 donne une réponse positive à cette question par le calcul explicite d'un équivalent de la fonction de distorsion (améliorant donc également l'encadrement de Ji). Pour cela, on observe que le noyau de l'opérateur de la chaleur $e^{-\frac{2t}{k}\Delta''_k}$ converge vers ladite fonction de distorsion lorsque k et $t = k^\varepsilon$ tendent vers l'infini (Δ''_k est le laplacien antiholomorphe de E^k). Le terme limite avait déjà été calculé par J.-M. Bismut [2] par des méthodes probabilistes. D'un point de vue analytique, l'inégalité de Kato permet de comparer le noyau de la chaleur considéré au noyau de la chaleur riemannien. La méthode utilisée par Mac Kean et Singer [9] pour étudier un développement asymptotique de ce dernier nous permet de montrer sans difficulté que notre noyau est équivalent à sa valeur figée en un point (Théorème III.1.1), ce qui suffit pour donner une nouvelle démonstration des inégalités (2.2). Il faut une analyse un peu plus poussée pour montrer que cet équivalent n'est pas perturbé lorsque le temps t tend vers l'infini suffisamment lentement (on peut en fait avoir un développement limité du noyau de la chaleur à l'ordre désiré avec notre méthode) (Théorème III.1.2).

Nous avons enfin étudié la cohomologie d'un complexe défini par une 2-forme symplectique en géométrie différentielle. On connaît l'importance des formes primitives sur une variété kählérienne, la notion de forme effective la généralise en géométrie symplectique. Nous définissons un sous-complexe du complexe de de Rham, à valeurs dans le dual de l'espace des formes effectives ("formes coeffectives"). Il serait équivalent d'étudier le complexe des formes effectives muni de la différentielle $\delta = d^*$. Nous donnons les premiers résultats concernant cette cohomologie : ellipticité, acyclicité (si la demi-dimension de la variété est prise comme degré 0), finitude sur une variété compacte. Enfin, revenant au cas où la variété est kählérienne, nous montrons que ces groupes sont des sous-groupes de la cohomologie de de Rham, et qu'une théorie de Hodge est possible en degré non nul.

Bibliographie

[1] ANDREOTTI A., GRAUERT H.. — *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193–259.

[2] BISMUT J.-M. — *Demailly's asymptotic inequalities : a heat equation proof*, J. Funct. Anal., **72** (1987), 263–278.

[3] BOTT R. — *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math., **60** (1954), 248–251.

[4] BOUCHE TH. — *Inégalités de Morse pour la d''cohomologie d'une variété holomorphe non compacte*, Annales Sci. de l'E.N.S., 4e série, **22** (1989), 1–13.

[5] BOUCHE TH. — *La cohomologie coeffective d'une variété symplectique*, Bull. Sc. Math., (1990), à paraître.

[6] DEMAILLY J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $d''-$cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **35** (1985), 189–229.

[7] DEMAILLY J.-P.. — *Holomorphic Morse inequalities*, Lectures given at the AMS Summer Institute at Santa Cruz, July (1989), to appear.

[8] JI S. — *Inequality for distortion function on invertible sheaves on abelian varieties*, Duke Math. J., **58, 3** (1989), 657–667.

[9] MAC KEAN H.P. JR, SINGER I.M. — *Curvature and the eigenvalues of the laplacian*, J. Differential Geom., **1** (1967), 43–69.

[10] OHSAWA T. — *Finiteness theorems on weakly 1-complete manifolds*, Publ. RIMS Kyoto Univ., **15** (1979), 853–370.

[11] SIU Y.T. — *Exposé n° 666 au séminaire Bourbaki*, (juin 1986), 16p.

[12] WITTEN E. — *Supersymetry and Morse Theory*, J. Differential Geom., **17** (1982), 661–692.

— ◇ —

Chapitre I

Inégalités de Morse holomorphes pour un fibré linéaire à courbure dégénérée

0. Introduction

Soit X une variété compacte complexe de dimension n. Si E est un fibré en droites holomorphe hermitien au-dessus de X, G un fibré vectoriel holomorphe de rang g quelconque au-dessus de X et si l'on note $c(E)$ sa courbure et $X(\leqslant q)$ l'ensemble des points où la forme réelle $ic(E)$ est non dégénérée et admet au plus q valeurs propres négatives (q entier compris entre 0 et n), on a pour tout q les inégalités de Morse holomorphes de Demailly ([De1], théorème 0.1) :

$$(0) \qquad \sum_{\nu=0}^{q}(-1)^{q-\nu}\dim H^{\nu}(X,E^k\otimes G)\leqslant g\frac{k^n}{n!}\int_{X(\leqslant q)}\Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n+\mathrm{o}(k^n).$$

On peut remarquer que, si la courbure de E est dégénérée en tout point de X, l'intégrale de courbure qui figure dans (0) est toujours nulle, si bien que les inégalités (0) perdent leur précision. Par ailleurs, la formule d'Hirzebruch–Riemann–Roch donne comme expression de la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(X,E^k\otimes G)$ un polynôme en k de degré inférieur à $n-1$. On est donc tenté d'obtenir une majoration des sommes alternées des dimensions cohomologiques qui soit de l'ordre de k^{n-1} au plus. Cela n'est cependant pas simple du fait que la géométrie et la métrique de la variété X interviennent dans le terme négligeable de (0), ainsi que des dérivées de la courbure de E, et la courbure de G. Pour surmonter cette difficulté, on est conduit à contrôler les termes parasites par une suite non majorée : on considère un second fibré linéaire F sur X, et nous cherchons à établir des inégalités de type (0) pour la cohomologie des fibrés $E^k\otimes F^\ell\otimes G$ où ℓ croît moins vite que k.

Une seconde difficulté intervient du fait que les ensembles $X(\leqslant q)$ peuvent être très irréguliers. Nous sommes parvenus à démontrer des inégalités de Morse holomorphes pour deux fibrés E et F en supposant qu'il existe un feuilletage Y de X dont le fibré tangent est contenu dans la fibration noyau de $ic(E)$. Cette hypothèse est l'analogue dans notre situation de celle de Bott [Bo] étudiant des inégalités de Morse classiques (portant sur les nombres de Betti d'une variété $\mathcal{C}^\infty$) lorsque la fonction de Morse est dégénérée (*i.e.* admet des points critiques non isolés) : il suppose que l'ensemble des points critiques d'indice q forme une sous-variété.

Sous cette dernière hypothèse, nous obtenons le corollaire 0.2 qui répond partiellement au problème initialement posé pour le seul fibré E.

Nous précisons donc nos hypothèses avant de donner l'énoncé de nos résultats : E et F sont deux fibrés en droites hermitiens au-dessus de X, et G un fibré vectoriel holomorphe quelconque de rang g au-dessus de X. Soit $D_1 = D_1' + D_1''$ (resp. D_2) la connexion de Chern de E (resp. F) et $c(E) = D_1^2 = D_1'D_1'' + D_1''D_1'$ sa forme de courbure. Alors $ic(E)$ est une $(1,1)-$forme réelle de rang maximum r sur X. *Nous supposerons que la fibration noyau de $ic(E)$ est bien feuilletée, c'est-à-dire qu'il existe un feuilletage Y de X, de codimension r, dont le fibré tangent en tout point x de X est inclus dans le noyau $\ker ic(E)_x$ de la forme $ic(E)$ en x.* Ceci serait automatiquement vérifié si le rang du noyau de la courbure était constant, car la forme $ic(E)$ est fermée. Etant donné un scindage $TX = TY \oplus NY$, on peut définir sur X une $(1,1)-$forme γ réelle, égale à la somme directe de la forme induite par $ic(E)$ sur NY, et de la restriction à TY de $ic(F)$. Pour tout $q = 0, 1, \ldots, n$, on définit $X(q)$, l'ouvert des points de X où la forme γ est d'indice q, c'est-à-dire où elle comporte exactement q valeurs propres < 0, et $n - q > 0$. On définit également $X(\leqslant q) = \bigcup_{\nu \leqslant q} X(\nu)$.

Nous démontrons les inégalités suivantes qui portent sur les groupes de $d''-$cohomologie à valeurs dans les puissances tensorielles élevées de E et F :

Théorème 0.1. — *Soit E, un fibré en droites holomorphe tel que rang $ic(E) \leqslant r$ sur X et dont la fibration noyau est bien feuilletée, on a pour tout $q = 0, 1, \ldots, n$ lorsque k et ℓ tendent vers l'infini, ℓ étant dominé par k (i.e. $k/\ell \to +\infty$) :*

1) Inégalités de Morse asymptotiques :

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F^\ell \otimes G) \leqslant g \frac{k^r}{r!} \frac{\ell^{n-r}}{(n-r)!} \int_{X(q)} (-1)^q \Big(\frac{i}{2\pi} c(E)\Big)^r \wedge \Big(\frac{i}{2\pi} c(F)\Big)^{n-r} + \mathrm{o}(k^r \ell^{n-r}).$$

2) Inégalités de Morse fortes :

$$\sum_{\nu=0}^{q} (-1)^{q-\nu} \dim H^\nu(X, E^k \otimes F^\ell \otimes G) \leqslant g \frac{k^r}{r!} \frac{\ell^{n-r}}{(n-r)!} \int_{X(\leqslant q)} \Big(\frac{i}{2\pi} c(E)\Big)^r \wedge \Big(\frac{i}{2\pi} c(F)\Big)^{n-r} + \mathrm{o}(k^r \ell^{n-r}).$$

Nous démontrerons dans notre quatrième paragraphe qu'on peut déduire du théorème 0.1 les estimations suivantes :

Corollaire 0.2. — *Si E est un fibré en droites holomorphe dont la fibration noyau de la courbure est bien feuilletée de codimension r, et G est un fibré vectoriel holomorphe quelconque sur X, il existe une constante C telle qu'on ait pour tout $q = 0, 1, \ldots, n$, lorsque k tend vers $+\infty$:*

$$\dim H^q(X, E^k \otimes G) \leqslant C k^r.$$

En particulier, la dimension de Kodaira d'un tel fibré est inférieure à r.

Pour la démonstation de ces inégalités, notre approche est inspirée de l'article [De1]. Par la théorie de Hodge, les groupes de cohomologie que nous désirons estimer sont représentés par des espaces de formes harmoniques. Si nous munissons X d'une métrique $\omega_{k,\ell}$ qui est proportionnelle à ℓ le long des feuilles de Y, et à k dans la direction orthogonale, le laplacien antiholomorphe $\Delta''_{k,\ell}$ associé va se comporter asymptotiquement comme un opérateur de type Schrödinger avec champ magnétique γ (selon la terminologie employée dans [De1]) ou, si l'on préfère, comme la somme du laplacien brut associé à une connexion hermitienne de courbure γ et d'un opérateur de degré 0. Ceci est vérifié en adaptant à notre situation une formule de type Weitzenböck, déduite de l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [De2].

Pour obtenir les estimations finales, on étudie la cohomologie du complexe de Dolbeault restreint aux premiers espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$, dont on vérifie qu'elle est isomorphe à la cohomologie de Dolbeault. Il suffit ensuite d'estimer de façon précise la dimension de ces espaces propres.

Ceci est obtenu au paragraphe 3 en étudiant un problème de répartition spectrale pour l'opérateur “tangent” à $\Delta''_{k,\ell}$. On se ramène localement au cas où la forme γ est constante, ainsi que la métrique $\omega_{k,\ell}$. On retrouve des estimations globales en appliquant le principe du minimax à un pavage de la variété X. Le pavage est constitué par des parallélépipèdes orthogonaux (pour $\omega_{k,\ell}$) dont la projection sur TY est un cube de côté $\ell^{-1/3}$ et la projection sur NY (fibré normal au feuilletage par rapport à la métrique $\omega_{k,\ell}$) un cube de côté $k^{-1/2}\ell^{1/6}$. On peut alors appliquer le théorème de répartition spectrale pour un tel opérateur donné dans [De1].

La principale nouveauté de notre démonstration est l'utilisation de la métrique $\omega_{k,\ell}$: les articles [Bi] ou [De1] utilisent une normalisation de Δ'' par un facteur $1/k$, ce qui interdit d'obtenir un résultat plus précis. L'utilisation de la métrique $\omega_{k,\ell}$ permet en fait de normaliser les termes de courbure qui interviennent dans le laplacien $\Delta''_{k,\ell}$ car, pour cette métrique la forme $ic(E^k)+ic(F^\ell)$ est de norme bornée sur X, uniformément par rapport à k et ℓ.

Ce travail doit beaucoup aux discussions que j'ai eues avec Jean-Pierre Demailly lorsqu'il dirigeait mes recherches, je l'en remercie. Je remercie également le referee dont les remarques m'ont permis de clarifier et d'alléger la rédaction des démonstrations.

1. Complexe de Witten (d'après Demailly)

Nous adaptons, dans ce paragraphe, la construction qui permet de ramener le théorème 0.1 à un théorème de répartition spectrale pour un opérateur particulier (ne dépendant en fait que de γ), que nous démontrerons aux deux paragraphes suivants.

Soit ω_0 une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ sur X. En tout point x, l'orthogonal de T_xY par rapport à la métrique ω_0 définit un fibré vectoriel $\mathcal{C}^\infty$ de rang complexe $n-r$ que nous noterons NY. Choisissons η (resp. ζ), une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur NY (resp. TY). Nous pouvons alors définir une métrique hermitienne $\omega_{k,\ell}$ sur X par la formule : $\omega_{k,\ell} = k\eta + \ell\zeta$ (Notons, cela sera important pour la suite, que les fibrés TY et NY sont orthogonaux par rapport aux métriques $\omega_{k,\ell}$ indépendamment de k et ℓ). Il est également utile de noter que la métrique ω_0 définit un isomorphisme canonique entre $(TY)^0$ et N^*Y dans T^*X.

Pour tout $p,q = 0,1,\ldots,n$, et si $\Omega \subset X$ est un ouvert, soit $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\Omega, E^k \otimes F^\ell \otimes G)$ l'espace des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes G(k,\ell)_{|\Omega}$ où $G(k,\ell) = E^k \otimes F^\ell \otimes G$. Nous noterons $\langle \bullet, \bullet \rangle_{k,\ell}$ et $|\bullet|_{k,\ell}$ le produit scalaire et la norme sur chaque fibre de $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes G(k,\ell)$ calculés à l'aide de la métrique induite par celles de E, F, G sur $G(k,\ell)$ et par $\omega_{k,\ell}$ sur $\Lambda^{p,q}T^*X$. Soit enfin $L^2_{p,q}(\Omega, G(k,\ell))$ le complété de $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\Omega, G(k,\ell))$ pour la norme $\|\bullet\|^2_{\Omega,k,\ell} = \int_\Omega |\bullet|^2_{k,\ell} d\sigma_{k,\ell}$ où $d\sigma_{k,\ell} = \frac{\omega^n_{k,\ell}}{n!}$ est l'élément de volume canonique. (Notons que le volume de X tend vers l'infini, on a : $\mathrm{Vol}_{k,\ell}(X) = O(k^r \ell^{n-r})$).

Soit $D''_{k,\ell}$, la connexion canonique sur $G(k,\ell)$, $\delta''_{k,\ell}$ son adjoint formel dans la métrique $\|\bullet\|_{k,\ell} = \|\bullet\|_{X,k,\ell}$ et $\Delta''_{k,\ell}$ le laplacien antiholomorphe associé : $\Delta''_{k,\ell} = D''_{k,\ell}\delta''_{k,\ell} + \delta''_{k,\ell}D''_{k,\ell}$. L'espace $\mathcal{H}_{k,\ell}(\lambda)$ est la somme directe des espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$ sur $\mathcal{C}^\infty_{0,q}(X, G(k,\ell))$ attachés aux valeurs propres $\leqslant \lambda$. C'est un espace vectoriel de dimension finie $h^q_{k,\ell}(\lambda)$ car $\Delta''_{k,\ell}$ est un opérateur elliptique. En outre, par la théorie de Hodge, nous avons l'égalité :

$$h^q_{k,\ell}(0) = \dim H^q(X, G(k,\ell)).$$

Comme $D''_{k,\ell}$ commute avec $\Delta''_{k,\ell}$, les sous-espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$ sont stables par $D''_{k,\ell}$, de sorte que la suite

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{H}^q_{k,\ell}(\lambda) \xrightarrow{D''_{k,\ell}} \mathcal{H}^{q+1}_{k,\ell}(\lambda) \longrightarrow \cdots$$

forme un sous-complexe du complexe de Dolbeault analogue au complexe introduit par Witten [Wi] en cohomologie de de Rham.

Lemme 1.1. — *Le complexe de Witten a même cohomologie que le complexe de Dolbeault. De plus, on a les inégalités suivantes :*

Pour tout $q = 0,1,\ldots,n$ et tout $\lambda \geqslant 0$,

1) $h^q_{k,\ell}(0) \leqslant h^q_{k,\ell}(\lambda)$

2) $\sum_{\nu=0}^q (-1)^{q-\nu} h^\nu_{k,\ell}(0) \leqslant \sum_{\nu=0}^q (-1)^{q-\nu} h^\nu_{k,\ell}(\lambda)$

Preuve. — Un élément u de $\mathcal{H}^q_{k,\ell}(\lambda)$ se décompose en somme orthogonale selon les espaces propres de $\Delta''_{k,\ell}$ respectifs aux valeurs propres $\lambda_i \leqslant \lambda$ de la façon suivante : $u = \sum_{\lambda_i} u_{\lambda_i}$ (la somme est finie). La condition $D''_{k,\ell}u = 0$ équivaut aux conditions $D''_{k,\ell}u_{\lambda_i} = 0$ car les espaces propres sont stables par $D''_{k,\ell}$. Mais alors $u_{\lambda_i} = D''_{k,\ell}\big(\frac{1}{\lambda_i}\delta''_{k,\ell}u_{\lambda_i}\big)$ pour chaque $\lambda_i > 0$, si bien que la cohomologie du complexe de Witten est représentée par les formes harmoniques, ce qui démontre la première affirmation.

Les inégalités classiques 1, 2, 3 résultent des formules :

$$h^q_{k,\ell}(\lambda) = z^q + b^{q+1}\ , \quad h^q_{k,\ell}(0) = z^q - b^q$$

où $b^q = \dim D''_{k,\ell}\mathcal{H}^q_{k,\ell}(\lambda)$ et $z^q = \dim(\ker D''_{k,\ell} \cap \mathcal{H}^q_{k,\ell}(\lambda))$. □

Nous allons donc déterminer les dimensions $h^q_{k,\ell}(\lambda)$ pour obtenir les inégalités de Morse du théorème 0.1. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que les éléments de $\mathcal{H}^q_{k,\ell}(\lambda)$ sont moins rigides que ceux de $\mathcal{H}^q_{k,\ell}(0)$. On peut en effet retrouver des estimations globales sur $\mathcal{H}^q_{k,\ell}(\lambda)$ à partir d'une localisation grâce au principe du minimax, tandis que le principe du prolongement analytique interdit toute étude de l'espace des sections harmoniques à partir de celles vérifiant un problème de Dirichlet.

Nous allons maintenant ramener l'étude de $\Delta''_{k,\ell}$ à celle de la forme quadratique Q_X que nous définissons dans un instant. On notera $[A, B] = AB - (-1)^{\deg A \deg B}BA$ l'anticommutateur de deux éléments d'une algèbre graduée.

Lemme 1.2 (identité de Bochner-Kodaira-Nakano hermitienne [De2]). — *Soit $L_{k,\ell}$, l'opérateur de multiplication extérieure par $\omega_{k,\ell}$, $\Lambda_{k,\ell}$, son adjoint dans la métrique $\ll \bullet, \bullet \gg_{k,\ell}$ et $\tau_{k,\ell} = [\Lambda_{k,\ell}, d'\omega_{k,\ell}]$. Définissons $D'_{\tau_{k,\ell}} = D'_{k,\ell} + \tau_{k,\ell}$ et $\delta'_{\tau_{k,\ell}} = \big(D'_{\tau_{k,\ell}}\big)^*$, ainsi que $\Delta'_{\tau_{k,\ell}} = \big[D'_{\tau_{k,\ell}}, \delta'_{\tau_{k,\ell}}\big]$ et $T_{\omega_{k,\ell}} = \big[\Lambda_{k,\ell}, \big[\Lambda_{k,\ell}, id'd''\omega_{k,\ell}\big]\big] - \big[d'\omega_{k,\ell}, (d'\omega_{k,\ell})^*\big]$. Alors on a :*

$$\Delta''_{k,\ell} = \Delta'_{\tau_{k,\ell}} + \big[ic(G(k,\ell)), \Lambda_{k,\ell}\big] + T_{\omega_{k,\ell}}.$$

Note 1.3. La métrique $\omega_{k,\ell}$ étant désormais choisie sur X, nous omettrons les indices k et ℓ lorsqu'ils ne seront pas essentiels.

En intégrant l'identité du lemme 1.2, nous obtenons : si $u \in \mathcal{C}^\infty_{p,q}(X, G(k,\ell))$

$$\text{(1.4)} \qquad \int_X \langle \Delta'' u, u\rangle d\sigma_{k,\ell} = \int_X \big(\langle \Delta' u, u\rangle + \langle [ic(G(k,\ell)), \Lambda]u, u\rangle + \langle T\omega u, u\rangle d\sigma_{k,\ell}$$

d'où :

(1.5)

$$\text{si } u \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X, G(k,\ell))\ , \quad \|D''_{k,\ell}u\|^2 = \|D'_\tau u\|^2 + \ll ([ic(G(k,\ell)), \Lambda] + T_\omega)u, u \gg$$

(1.5′)

$$\text{si } u \in \mathcal{C}^\infty_{n,q}(X, G(k,\ell))\ , \quad \|\delta''_{k,\ell}u\|^2 = \|\delta'_\tau u\|^2 + \ll ([ic(G(k,\ell)), \Lambda] + T_\omega)u, u \gg$$

On peut considérer une $(0,q)-$forme à valeurs dans $G(k,\ell)$ comme une $(n,q)-$forme à valeurs dans $\widetilde{G}(k,\ell) = \Lambda^n TX \otimes G(k,\ell)$. Notons $\tilde{u}$ l'image de u dans $\mathcal{C}^\infty_{n,q}(X, \widetilde{G}(k,\ell))$, le morphisme $u \to \tilde{u}$ est une isométrie.

Si u est une $(0,q)-$forme à valeur dans $G(k,\ell)$, nous déduisons de $(1.5')$:

$$(1.6)\quad \int_X \langle \Delta''_{k,\ell}u,u\rangle d\sigma = \int_X \langle \widetilde{\Delta}''_{k,\ell}\tilde{u},\tilde{u}\rangle d\sigma = \|\delta'_\tau \tilde{u}\|^2 + \int_X \langle ([ic(\widetilde{G}(k,\ell)),\Lambda]+T_\omega \tilde{u},\tilde{u}\rangle d\sigma.$$

Nous allons construire à l'aide des opérateurs déterminés par les structures holomorphes données sur X, et les fibrés E, F et G, une connexion hermitienne sur le fibré de classe $\mathcal{C}^\infty$ (non holomorphe en général) $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k,\ell)$. La variété X sera donc désormais munie de sa structure riemannienne sous-jacente.

Une connexion ∇ sur un fibré hermitien H de classe $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus d'une variété riemannienne M est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur l'espace des $p-$formes à valeurs dans H tel que, si $f \in \mathcal{C}^\infty_m(X,\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{C}^\infty_p(X,H)$, on ait :

$$\nabla(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^m f \wedge \nabla u.$$

Soit $(u|v) : \mathcal{C}^\infty_p(X,H) \times \mathcal{C}^\infty_m(X,H) \to \mathcal{C}^\infty_{p+q}(X,\mathbb{C})$ l'accouplement sesquilinéaire canonique des formes sur H, on dit que la connexion ∇ est *hermitienne* si, pour deux formes u, v on a : $d(u|v) = (\nabla u|v) + (-1)^{\deg u}(u|\nabla v)$. L'opérateur $B = i\nabla^2$ est alors le produit extérieur par une $2-$forme à valeurs dans les endomorphismes hermitiens de H (c'est une $2-$forme réelle si H est de rang 1). Classiquement, $c(\nabla) = \nabla^2$ est la courbure de cette connexion. Dans la suite, c'est B que nous appellerons la courbure de cette connexion. Dans un ouvert de trivialisation de H, toute connexion s'écrit $\nabla = d + iA \wedge \bullet$ où A est la forme de la connexion ∇. A dépend de la trivialisation choisie.

Demailly [De1] démontre à l'aide du lemme 1.2 que l'on peut construire une connexion hermitienne $\nabla_{k,\ell}$ sur le fibré $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k,\ell)$ qui vérifie :

$$|D'_{\tau_{k,\ell}}u| = |\nabla'_{k,\ell}u + S'u| \quad \text{et} \quad |\tilde{\delta}'_{\tau_{k,\ell}}\tilde{u}| = |\nabla''_{k,\ell}u + S''u| \;\text{ où } |S'| = |\tau| \;\text{ et } |S''| = |\tau^*|.$$

Nous définissons la $(1,1)-$forme réelle $\gamma_{k,\ell}$ par

$$\gamma_{k,\ell} = ic(E^k)_{|NY} \oplus ic(F^\ell)_{|TY}.$$

Cette forme admet par rapport à la métrique $\omega_{k,\ell}$ les mêmes valeurs propres que la forme γ définie dans l'introduction par rapport à $\omega_{1,1}$. On a :

$$ic(G(k,\ell)) = k\, ic(E) \otimes \mathrm{id}_G + \ell\, ic(F) \otimes \mathrm{id}_G + ic(G)$$

et

$$ic(\widetilde{G}(k,\ell)) = ic(G(k,\ell)) + ic(\Lambda^n TX) \otimes \mathrm{id}_G\,.$$

On identifiera dans ce qui suit une forme différentielle et le morphisme d'algèbre graduée qu'elle définit par multiplication extérieure. Nous pouvons alors définir l'endomorphisme $V_{k,\ell}$ de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k,\ell)$ par :

$$V_{k,\ell}u = -[\gamma,\Lambda]u - [\gamma,\Lambda]\tilde{u},$$

appelons désormais $\Xi_{k,\ell}$, la $2-$forme :

$$\Xi_{k,\ell} = ic(G(k,\ell)) - \gamma\ , \quad (\text{resp.}\, \widetilde{\Xi}_{k,\ell} = ic(\widetilde{G}(k,\ell)) - \gamma),$$

et définissons l'endomorphisme

$$\Theta_{k,\ell} u = [\Xi, \Lambda]u + [\widetilde{\Xi}, \Lambda]\tilde{u} + T_\omega u + T_\omega \tilde{u}.$$

En sommant les égalités (1.5) et (1.6) nous obtenons donc :

$$2\int_X \langle \Delta''_{k,\ell} u, u\rangle d\sigma = \int_X (|\nabla u + Su|^2 - \langle Vu, u\rangle) d\sigma + \ll \Theta u, u \gg . \tag{1.7}$$

Posons $Q_X(u) = \int_X (|\nabla_{k,\ell} u|^2 - \langle V_{k,\ell} u, u\rangle) d\sigma$. La proposition suivante montre que la distribution des petites valeurs propres de l'opérateur $\Delta''_{k,\ell}$ est asymptotiquement égale à celle de la forme quadratique Q_X.

PROPOSITION 1.8. — *Il existe $\varepsilon_{k,\ell}$ une suite tendant vers 0 lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$ telle que l'on ait l'encadrement :*

$$(1 - \varepsilon_{k,\ell}) Q_X(u) - \varepsilon_{k,\ell} \|u\|^2_{k,\ell} \leqslant 2 \ll \Delta''_{k,\ell} u, u \gg_{k,\ell} \leqslant (1 + \varepsilon_{k,\ell}) Q_X(u) + \varepsilon_{k,\ell} \|u\|^2_{k,\ell}.$$

Cela résulte du

LEMME 1.9. — *Lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$, on a :*

a) $|S|_{k,\ell} \to 0$

b) $|\Theta|_{k,\ell} \to 0$.

Démonstration du lemme 1.9. — En un point x^0 de X, choisissons un système de coordonnées locales centrées en x^0 $(x_1, \ldots, x_{2n})$ adapté au feuilletage Y : *i.e.* la feuille de Y passant par x^0 est représentée dans un voisinage suffisamment petit par l'espace affine $\{x_1 = x_1^0, \ldots, x_{2r} = x_{2r}^0\}$. TY est alors le sous-espace de TX engendré par les $\partial/\partial x_j$, pour $j = 2r+1, \ldots, 2n$ et NY son orthogonal. Ce système de coordonnées est choisi de sorte que les $(\partial/\partial x_j)_{1\leqslant j\leqslant 2r}$ (resp.$(\partial/\partial x_j)_{2r+1\leqslant j\leqslant 2n}$) forment un système orthonormal pour la métrique définie par η sur $N_{x^0}Y$ (resp. ζ sur $T_{x^0}Y$) qui diagonalise $ic(E)_{x^0|NY}$ (resp. $ic(F)_{x^0|TY}$). Il est important de noter que les $\partial/\partial x_j$ engendrent TY au voisinage de x^0 pour $j = 2r+1, \ldots, 2n$, si bien que les dx_j engendrent N^*Y (canoniquement isomorphe à l'orthogonal de TY) pour $j = 1, \ldots, 2r$.

a) On a

$$|S|_{k,\ell} = |\tau^*|_{k,\ell} + |\tau|_{k,\ell} = 2|\tau|_{k,\ell}$$

et

$$\begin{aligned} |\tau|_{k,\ell} &= |[\Lambda, d'\omega]|_{k,\ell} \\ &\leqslant 2\sqrt{n}\, |d'\omega|_{k,\ell} \end{aligned}$$

car

$$|\Lambda|_{k,\ell} = |\omega|_{k,\ell} = \sqrt{n}.$$

Maintenant, écrivons : $d'\omega = kd'\eta + \ell d'\zeta$ avec $\eta = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2r} c_{ij} dx_i \wedge dx_j$ car η est une $2-$forme dont le noyau contient TY. On a donc $d'\eta = \Sigma d_{ijm}\ dx_i \wedge$

$dx_j \wedge dx_m$ avec i et j contenus dans $\{1, \dots, 2r\}$ et m quelconque. Ceci car Y est un feuilletage de X (si bien que l'on peut choisir un repère constitué de 1-formes *fermées* de $(TY)^0 \simeq N^*Y$).

Par construction, nous avons :

$$\begin{cases} |dx_j|_{k,\ell} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} & \text{si } \ j = 1, \dots, 2r \\ |dx_j|_{k,\ell} = O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{\ell}}\Big) & \text{si } \ j = 2r+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

Par conséquent, il vient $|d'\eta|_{k,\ell} \leqslant Ck^{-1}\ell^{-1/2}$ et $|d'\zeta|_{k,\ell} \leqslant C\ell^{-3/2}$, soit :

$$|d'\omega|_{k,\ell} \leqslant C\big(\frac{k}{k} \times \frac{1}{\sqrt{\ell}} + \frac{\ell}{\ell} \times \frac{1}{\sqrt{\ell}}\big) \leqslant \frac{C}{\sqrt{\ell}}.$$

b) On aura de même que $d'd''\eta$ contient au moins deux composantes dans T^*Y, soit :

$$|d'd''\omega|_{k,\ell} \leqslant \frac{C}{\ell}$$

d'où $|T_\omega|_{k,\ell} \leqslant C_1/\ell$ où C_1 est une constante uniforme sur X.

On aura également $\Xi = \ell\, ic(F)_{|NY} + ic(G)$, donc

$$|\Xi|_{k,\ell} \leqslant C_2\Big(\frac{\ell}{\sqrt{\ell}\sqrt{k}} + \frac{1}{\ell}\Big) = C_2\Big(\sqrt{\frac{\ell}{k}} + \frac{1}{\ell}\Big).$$

où C_2 est aussi une constante uniforme sur X. $\square$

Démonstration de la proposition 1.8. — Appliquons l'encadrement

$$(1-\alpha)(|a|^2 - \alpha^{-1}|b|^2) \leqslant |a+b|^2 \leqslant (1+\alpha)(|a|^2 + \alpha^{-1}|b|^2)$$

à $a = D_{k,\ell}u$, $b = Su$ et $\alpha_\ell = C/\sqrt{\ell}$ et $\varepsilon_{k,\ell} = \max\big(\alpha_\ell, C_2\sqrt{\frac{\ell}{k}}\big)$ et encadrons $\ll \Xi u, u \gg$ par $\pm\varepsilon_{k,\ell}\|u\|^2$. $\square$

2. Spectre de la forme quadratique Q_X (cas constant)

Au paragraphe 1, nous avons montré (proposition 1.8) que le spectre du laplacien $\Delta''_{k,\ell}$ par rapport à la métrique $\omega_{k,\ell}$ est voisin de celui de l'opérateur $\nabla^*_{k,\ell}\nabla_{k,\ell} - V_{k,\ell}$ lorsque k et ℓ sont grands. Nous sommes donc conduits à étudier le spectre d'un tel opérateur sur une variété riemannienne. Nous allons établir une formule asymptotique de Weyl pour cet opérateur. Le cas que nous envisageons désormais étant uniquement riemannien, nous formulerons ces résultats dans ce cadre plus général, et légèrement différent de celui considéré jusque ici.

Soit M une variété riemannienne de dimension réelle n, munie d'un feuilletage L de codimension $2r$, et de deux fibrés vectoriels de rang 1, E et F, chacun d'entre eux possédant une métrique hermitienne et une connexion hermitienne ∇_E (resp. ∇_F). Nous supposerons en outre que la forme de courbure $B_E = ic(\nabla_E)$ est une $2-$forme réelle dont la fibration des noyaux contient le fibré tangent à L. Une métrique riemannienne étant choisie sur M, elle détermine un fibré vectoriel de rang $2r$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ NL, orthogonal à TL en tout point de M. Munissons les fibrés NL et TL de métriques riemanniennes g_1 et g_2, et M de la métrique $g_{k,\ell} = kg_1 + \ell g_2$. Soit $d\sigma_{k,\ell}$ la densité de volume riemannien de $(M, g_{k,\ell})$. Nous désignerons par $|u|_{k,\ell}$ la norme ponctuelle d'une $q-$forme u à valeurs dans $E^k \otimes F^\ell$ calculée à l'aide de la métrique $g_{k,\ell}$ sur M et des métriques de E et F. Si Ω est un ouvert de M, on note $L^2_{k,\ell}(\Omega)$ l'espace L^2 des sections de $E^k \otimes F^\ell$ muni de la norme $\|u\|^2_{\Omega,k,\ell} = \int_\Omega |u|^2_{k,\ell} d\sigma_{k,\ell}$. Comme précédemment, nous omettrons souvent les indices k, ℓ dans ces formules, ainsi que pour les produits scalaires $\langle \bullet, \bullet \rangle_{k,\ell}$ et $\ll \bullet, \bullet \gg_{k,\ell}$ associés.

$\nabla_{k,\ell}$ étant la connexion induite par ∇_E et ∇_F sur $E^k \otimes F^\ell$, et V une fonction réelle continue sur M, on considère la forme quadratique

$$Q_{\Omega,k,\ell}(u) = \int_\Omega \left(|\nabla_{k,\ell} u|^2_{k,\ell} - V|u|^2_{k,\ell}\right) d\sigma_{k,\ell}$$

pour les fonctions u sur un ouvert relativement compact Ω de M, avec condition de Dirichlet au bord. Le domaine de $Q_{\Omega,k,\ell}$ est donc l'espace de Sobolev $W^1_0(\Omega, E^k \otimes F^\ell)$ des sections de $E^k \otimes F^\ell$ dont les dérivées d'ordre 1 sont dans $L^2_{k,\ell}(\Omega)$, et adhérentes aux sections $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. On se propose d'étudier le spectre de $Q_{\Omega,k,\ell}$ lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$.

Soit $B_{k,\ell}$ la courbure de la connexion $\nabla_{k,\ell}$. Nous avons $B_{k,\ell} = kB_E + \ell B_F$ et soit $\Gamma_{k,\ell} = kB_{E_{|NL}} \oplus \ell B_{F_{|TL}}$ où $B_{F_{|TL}}$ est la restriction de la $2-$forme B_F au sous-fibré TL de TX.

Soient $\Gamma_1 \geqslant \Gamma_2 \ldots \geqslant \Gamma_s > 0 = \Gamma_{s+1} = \cdots = \Gamma_n$ les valeurs propres de $\Gamma_{k,\ell}$ par rapport à la métrique $g_{k,\ell}$ (indépendantes de k et ℓ).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, nous donnons maintenant deux définitions :

Définition 2.1. — *$N_{\Omega,k,\ell}(\lambda)$ désigne le nombre de valeurs propres $\leqslant \lambda$ de la forme quadratique $Q_{\Omega,k,\ell}$.*

Définition 2.2. — *On associe à la 2-forme $\Gamma_{k,\ell}$ la fonction :*

$$\nu_\Gamma(\lambda) = \frac{2^{s-n}\pi^{-n/2}}{(\frac{n}{2}-s)!}\Gamma_1 \ldots \Gamma_s \sum_{(p_1,\ldots,p_s)\in\mathbb{N}^s} (\lambda - \Sigma(2p_j+1)B_j)_+^{\frac{n}{2}-s}$$

avec la convention $\lambda^0_+ = 0$ si $\lambda \leqslant 0$, $\lambda^0_+ = 1$ si $\lambda > 0$, et où la notation $\delta!$ est utilisée pour éviter toute confusion avec Γ si $\delta \in \mathbb{R}$.

Pour tout point x de M, la fonction $\nu_\Gamma(\lambda)$ est croissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}_+$, continue si $s(x) < n/2$.

Au paragraphe suivant, nous calculerons un équivalent de la fonction $N_\Omega(\lambda)$ à l'aide de $\nu_\Gamma(\lambda)$. Pour cela, nous nous ramènerons en pavant l'ouvert Ω par des parallélépipèdes suffisamment petits, au cas où le $\Gamma_{k,\ell}$ est constante, et où V est nul.

Plaçons-nous donc dans la situation suivante : $M = \mathbb{R}^n$,

$$L \simeq \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 = \cdots = x_{2r} = 0\} \ , \quad g_1 = \sum_{j=1}^{2r} dx_i^2 \ , \quad g_2 = \sum_{j=2r+1}^{n} dx_j^2 \ ,$$

Ω est le cube de côté R dans la métrique $g^0_{k,\ell} = kg_1 + \ell g_2$.

$$\Omega = P_{k,\ell}(R) = \Big\{ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ |x_j| < \frac{R}{2\sqrt{k}} \text{ si } j = 1,\dots,2r$$
$$\text{et } |x_j| < \frac{R}{2\sqrt{\ell}} \text{ si } j = 2r+1,\dots,n \Big\}.$$

Pour simplifier encore, nous supposerons que le noyau de B_F contient NL, donc que $\Gamma_{k,\ell} = B_{k,\ell} = k\sum_{j=1}^r B_j dx_j \wedge dx_{j+r} + \ell \sum_{j\geqslant r+1} B_j dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}$ avec la convention que $B_{[\frac{n}{2}]+1} = 0$. On peut alors choisir une trivialisation de E (resp. F) dans laquelle la forme A_E de la connexion ∇_E (resp. A_F de ∇_F) soit $A_E = \sum_{j=1}^r B_j x_j dx_{j+r}$ (resp. $A_F = \sum_{j=r+1}^{[n/2]} B_j x_{2j-1} dx_{2j}$). Posons $A_{k,\ell} = kA_E + \ell A_F$, la connexion de $E^k \otimes F^\ell$ s'écrit donc sur $P_{k,\ell}(R)$: si $u \in \mathcal{C}^\infty(P_{k,\ell}(R), E^k \otimes F^\ell)$,

$$\nabla_{k,\ell} u = du + iA_{k,\ell} \wedge u,$$

tandis que la forme quadratique associée admet pour expression :
(2.3)
$$Q_{P_{k,\ell}(R),k,\ell} = Q_{R,k,\ell}(u) = \int_{P_{k,\ell}(R)} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^r \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_{j+r}} + ik\, B_j x_j u\Big|^2 \Big)$$
$$+ \int_{P_{k,\ell}(R)} \frac{1}{\ell} \sum_{j=r+1}^{[n/2]+1} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_{2j-1}}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_{2j}} + i\ell\, B_j x_{2j} u\Big|^2 \Big)$$

si $d\mu$ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, on a $d\sigma_{k,\ell} = k^r \ell^{n-r} d\mu$ et les facteurs $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{\ell}$ qui apparaissent dans l'expression de $Q_{R,k,\ell}$ proviennent du fait que $|dx_j|^2_{k,\ell}$ vaut soit $\frac{1}{k}$, soit $\frac{1}{\ell}$ selon que dx_j est dans NL ou TL. Par conséquent, l' intérêt de la métrique $g^0_{k,\ell}$ adaptée à la courbure de la connexion $\nabla_{k,\ell}$ est de "normaliser" la forme quadratique Q_R sur $P_{k,\ell}(R)$. En effet, effectuons dans l'intégrale (2.3) le changement de variables suivant.

Munissons $\mathbb{R}^n$ des coordonnées $(X_1,\dots,X_n)$ où

(2.4)
$$\begin{cases} X_j = \sqrt{k}\, x_j \ , \ 1 \leqslant j \leqslant 2r \\ X_j = \sqrt{\ell}\, x_j \ , \ 2r+1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

Il vient

$$Q_R(u) = k^r \ell^{n/2-r} \int_{P(R)} \sum_{j=1}^{r} \Big(\big|\frac{\partial u}{\partial X_j}\big|^2 + \big|\frac{\partial u}{\partial X_{j+r}} + iB_j X_j u\big|^2 \Big)$$
$$+ \sum_{j=r+1}^{[n/2]+1} \Big(\big|\frac{\partial u}{\partial X_{2j-1}}\big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial X_{2j}} + iB_j X_{2j} u\Big|^2 \Big) d\mu$$

et $\|u\|_{k,\ell}^2 = k^r \ell^{n/2-r} \int_{P(R)} |u|^2 d\mu$ où $P(R) = \{(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^n : |X_j| < \frac{R}{2}\}$.

Observons que, comme $B_{k,\ell} = \Gamma_{k,\ell}$, il existe une permutation σ des indices j qui applique B_j sur $\Gamma_{\sigma(j)}$, nous pouvons par conséquent appliquer directement le théorème de répartition spectrale de Demailly pour cette forme quadratique.

Théorème 2.5 ([De1], p.197). — *Soit R, un réel > 0, $N_R(\lambda)$ le nombre de valeurs propres $\leqslant \lambda$ de la forme quadratique*

$$Q_R = \int_{P(R)} \Big(\sum_{j=1}^{s} \big|\frac{\partial u}{\partial X_j}\big|^2 + \big|\frac{\partial u}{\partial X_{j+s}} + i\Gamma_j\, X_j u\big|^2 + \sum_{j>2s} \big|\frac{\partial u}{\partial X_j}\big|^2 \Big) d\mu$$

pour le problème de Dirichlet au bord de $P(R)$, par rapport à la métrique standard sur $P(R)$.

Alors, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
$\lim_{R\to+\infty} R^{-n} N_R(\lambda) = \nu_\Gamma(\lambda)$ *et la majoration* $N_R(\lambda) \leqslant (R\sqrt{\lambda}+1)^n$.

En multipliant Q_R et la métrique $\|\bullet\|_{k,\ell}^2$ par le facteur $k^{-r}\ell^{r-\frac{n}{2}}$, on a immédiatement

Corollaire 2.6. — *Avec les notations des définitions 2.1 et 2.2, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-n} N_{R,k,\ell}(\lambda) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell}(R))} N_{P_{k,\ell}(R),k,\ell}(\lambda) = \nu_\Gamma(\lambda).$$

3. Spectre de la forme quadratique Q_X (cas général)

L'objet de ce paragraphe est de démontrer une version globale du corollaire 2.6 lorsque $B_{k,\ell}$ et V sont quelconques sur Ω. Nous associons à $\nu_\Gamma(\lambda)$ la fonction $\bar{\nu}_\Gamma(\lambda)$ continue à droite en λ : $\bar{\nu}_\Gamma(\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \nu_B(\lambda+\varepsilon)$.

Théorème 3.1. — *Soit Ω un ouvert relativement compact dans M. Lorsque ℓ et k/ℓ tendent vers $+\infty$, on a l'encadrement asymptotique*

$$k^{-r}\ell^{r-\frac{n}{2}} \int_\Omega \nu_\Gamma(V+\lambda) d\sigma_{k,\ell} \leqslant k^{-r}\ell^{r-\frac{n}{2}} \liminf_{k,\ell} N_{\Omega,k,\ell}(\lambda)$$
$$\leqslant k^{-r}\ell^{r-\frac{n}{2}} \limsup_{k,\ell} N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \leqslant k^{-r}\ell^{r-\frac{n}{2}} \int_{\bar{\Omega}} \bar{\nu}_\Gamma(V+\lambda) d\sigma_{k,\ell}.$$

Nous allons démontrer le théorème 3.1 en nous ramenant au corollaire 2.6 en pavant l'ouvert Ω par des parallélépidèdes suffisamment petits pour qu'on puisse approcher Q_X par sa valeur gelée en un point. Lorsque k et ℓ tendent vers $+\infty$, la croissance de $B_{k,\ell}$ est plus forte dans la direction orthogonale aux feuilles de L, donc la longueur du côté sera nécessairement plus petite (de l'ordre de $k^{-1/2}\ell^{1/6}$) que dans la direction des feuilles, où elle sera de l'ordre de $\ell^{-1/3}$. Le gain en précision par rapport au résultat de [De1] provient du fait que l'on peut utiliser des pavés de côté très voisins de $k^{-1/2}$, qui est l'ordre critique pour la précision des estimations (une croissance du côté des pavés de cet ordre ne permet plus d'obtenir des estimations précises (*cf.* l'introduction de [De1] ou le corollaire 0.2)).

Le lemme suivant montre que les quantités intervenant dans les inégalités du théorème 3.1 sont finies.

Lemme 3.2. —

a) $\nu_\Gamma(\lambda) \leqslant \bar{\nu}_\Gamma(\lambda) \leqslant \lambda_+^{n/2}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) $\nu_\Gamma(V)\,(\text{resp.}\,\bar{\nu}_\Gamma(V))$ *est semi-continue inférieurement (*resp. *supérieurement) sur* M.

c) En tout point x *de* M *où* $s(x) < \frac{n}{2}$, *on a* $\nu_\Gamma(V)(x) = \bar{\nu}_\Gamma(V)(x)$ *et* $\nu_\Gamma(V)$ *ainsi que* $\bar{\nu}_\Gamma(V)$ *est continue.*

d) Si n *est impair* $\nu_\Gamma(V) = \bar{\nu}_\Gamma(V)$ *est continue sur* M.

$\Gamma_{k,\ell}$ est une $2-$forme sur M dont les valeurs propres par rapport à la métrique $g_{k,\ell} = kg_1 + \ell g_2$ sont, soit les valeurs propres de $B_{E|NL}$ par rapport à g_1, soit celles de $B_{F|TL}$ par rapport à g_2. La preuve du lemme 3.2 est donc identique à celle du lemme 2.5 de [De1]. La preuve du lemme suivant est également identique à celle de la proposition 2.6 de [De1].

Lemme 3.3 (Principe de localisation pour $Q_{\Omega,k,\ell}$). —

a) Si $\Omega_1, \ldots, \Omega_N \subset \Omega$ *sont des ouverts deux à deux disjoints, on a*

$$N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \geqslant \sum_{j=1}^{N} N_{\Omega_j,k,\ell}(\lambda)$$

b) Si $(\Omega'_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ *est un recouvrement ouvert de* Ω, *et* $\psi = (\psi_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ *un système de fonctions numériques* $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *à support compact dans* Ω'_j *et telles que* $\sum_{j=1}^N \psi_j^2 \equiv 1$ *sur* $\overline{\Omega}$. *Posons*

$$C_{k,\ell}(\psi) = \sup_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} |d\psi_j|^2_{k,\ell}.$$

Alors on a

$$N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \leqslant \sum_{j=1}^{N} N_{\Omega'_j,k,\ell}(\lambda + C_{k,\ell}(\psi)).$$

Soit $(W_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ un recouvrement ouvert de Ω par des ouverts de carte de la variété M qui trivialisent le feuilletage L. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des ouverts $\Omega_j \subset \Omega'_j$ relativement compacts dans W_j tels que :

$$\Omega = \bigcup \Omega_j \text{ (disjointe)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(\Omega) = \sum \mathrm{Vol}(\Omega_j) \tag{3.4}$$

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup \Omega'_j \quad \text{et} \quad \mathrm{Vol}(\overline{\Omega}) \leqslant \sum \mathrm{Vol}(\overline{\Omega}'_j) + \varepsilon. \tag{3.5}$$

D'après le lemme 3.3, il suffit de démontrer le théorème 3.1 pour des ouverts Ω_j et Ω'_j. On peut donc supposer que Ω est un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$ sur lequel E et F sont triviaux. On peut supposer en outre qu'il existe des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur Ω telles que la feuille L_{x^0} soit donnée par l'espace affine $\{x_1 = x_1^0, \ldots, x_{2r} = x_{2r}^0\}$ et telles que $(dx_j, 1 \leqslant j \leqslant 2r)$ forme un repère de N^*L. Nous démontrons tout d'abord le théorème 3.1 pour un parallélépipède.

Proposition 3.6. — *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $P_{k,\ell}$, une suite de pavés ouverts cubiques dans la métrique $g^0_{k,\ell}$ définie au § 2, de côté $r_{k,\ell}$ contenant a, et dont les faces sont parallèles ou orthogonales à L. Supposons :*
(i) $\lim\limits_{k,\ell\to+\infty} r_{k,\ell} \to +\infty$; *(ii)* $\lim\limits_{k,\ell\to+\infty} \ell^{-1/4} r_{k,\ell} = 0$; *(iii)* $\lim\limits_{k,\ell\to+\infty} \Big(\sqrt{\tfrac{\ell}{k}}\, r_{k,\ell}\Big) = 0.$

On a alors

$$\liminf_{k,\ell} \frac{1}{\mathrm{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell})} N_{P_{k,\ell}}(\lambda) \geqslant \nu_{\Gamma(a)}(V(a)+\lambda)$$

$$\limsup_{k,\ell} \frac{1}{\mathrm{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell})} N_{P_{k,\ell}}(\lambda) \leqslant \bar{\nu}_{\Gamma(a)}(V(a)+\lambda)$$

en outre, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que $P_{k_0,\ell_0} \subset K$ on a pour tout $P_{k,\ell} \subset K$:

$$N_{P_{k,\ell}}(\lambda) \leqslant C_K \Big(1 + r_{k,\ell} \sqrt{\lambda_+ + \max_K V_+}\,\Big)^n$$

où la constante C_K ne dépend que de K.

Note 3.7. — Dans la métrique standard de $\mathbb{R}^n$, les ouverts $P_{k,\ell}$ sont des parallélépipèdes dont les faces sont parallèles aux axes de coordonnées, de longueurs de côté $r_{k,\ell}/\sqrt{k}$ le long de $L^\perp$, et $r_{k,\ell}/\sqrt{\ell}$ le long de L. On a alors les renseignements suivants sur l'ordre de grandeur de ces côtés :

$$1)\ k^{1/2}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \to +\infty \qquad \text{et} \qquad k^{1/4}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} = \Big(\frac{k}{\ell}\Big)^{-1/4}\ell^{-1/4} r_{k,\ell} \to 0$$

$$2)\ \ell^{1/2}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} \to +\infty \qquad \text{et} \qquad \ell^{1/4}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} = \ell^{-1/4} r_{k,\ell} \to 0.$$

Nous montrons maintenant que la forme quadratique $Q_{P_{k,\ell}}$ est très voisine de la forme dont les paramètres $\Gamma(a)$ et $V(a)$ sont constants. Dans ce qui suit a est élément d'un compact K fixé de $\mathbb{R}^n$, et les C_i, $i = 1, 2, \ldots$ seront des constantes indépendantes de k, ℓ et a.

LEMME 3.8. — *On peut choisir une suite $\widetilde{A}_{k,\ell}$ de formes des connexions $\nabla^a_{k,\ell}$ de courbure constante $\Gamma_{k,\ell}(a)$ sur chaque $P_{k,\ell}$ telle que l'on ait pour tout $x \in P_{k,\ell}$*

$$\big|\widetilde{A}_{k,\ell}(x) - A_{k,\ell}(x)\big|_{k,\ell} \leqslant C_1\Big(\frac{r^2_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} + r_{k,\ell}\sqrt{\frac{\ell}{k}}\Big).$$

Démonstration. — Ecrivons $\Gamma_{k,\ell} = kB_E + \ell B_{F|TL} = kB_E + \ell(B_F + (B_{F|TL} - B_F))$. Soit A_E (resp. A_F) une forme telle que $dA_E = B_E$ (resp. $dA_F = B_F$). Soit donc $A_{k,\ell} = kA_E + \ell A_F$ une forme de la connexion $\nabla_{k,\ell}$ pour une trivialisation de $E^k \otimes F^\ell$ sur Ω. Notons $x' = (x_1, \ldots, x_{2r})$ les coordonnées transverses à L et $x'' = (x_{2r+1}, \ldots, x_n)$ les coordonnées sur les feuilles de L. Le fait que B_E soit une forme fermée dont le noyau contient TL implique que B_E ne dépend pas des variables x''.

Par conséquent, la régularité $\mathcal{C}^\infty$ de B_E implique :

$$|B_E(x) - B_E(a)|_{1,1} = |B_E(x', a'') - B_E(a', a'')|_{1,1} \leqslant C_2\,\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}$$

car a' et x' appartiennent au cube de côté $r_{k,\ell}/\sqrt{k}$ d'après la note 3.7.

D'autre part, le pavé $P_{k,\ell}$ est contenu dans un cube de côté $r_{k,\ell}/\sqrt{\ell}$, donc :

$$|B_F(x) - B_F(a)|_{1,1} \leqslant C_3\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}.$$

Si A'_E (resp. A'_F) est la forme dont la différentielle vaut $B_E(x) - B_E(a)$ (resp. $B_F(x) - B_F(a)$) calculée par la formule d'homotopie classique qui permet d'exprimer une forme fermée comme un cobord dans un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$|A'_E(x)|_{1,1} \leqslant C_4\Big(\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}\Big) \times \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}$$

$$|A'_F(x)|_{1,1} \leqslant C_5\Big(\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\Big)^2.$$

Comme le noyau de B_E contient TL, la forme A'_E est à valeurs dans l'orthogonal N^*L de T^*L. Le même type d'argument que ceux utilisés dans la démonstration de la proposition 1.8 donne alors :

$$|A'_E(x)|_{k,\ell} \leqslant C_6\,\frac{r^2_{k,\ell}}{k\sqrt{\ell}} \qquad \text{et} \qquad |A'_F(x)|_{k,\ell} \leqslant C_7\,\frac{r^2_{k,\ell}}{\ell\sqrt{\ell}}.$$

On en déduit l'estimation :

$$|kA'_E + \ell A'_F|_{k,\ell} \leqslant C_8\frac{r^2_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}.$$

Maintenant, $B_L = B_F(a) - B_{F|TL}(a)$ est une forme constante dont l'expression en coordonnées ne contient que des termes $dx_j \wedge dx_m$ où $j \in \{1, \ldots, 2r\}$

et m est quelconque. La forme A'_L telle que $dA'_L = B_L$ calculée de la même façon que précédemment vérifie immédiatement

$$\ell |A'_L(x)|_{k,\ell} \leqslant C_9 r_{k,\ell} \sqrt{\ell/k}.$$

La forme $\widetilde{A}_{k,\ell} = k(A_E - A'_E) + \ell(A_F - A'_F - A'_L)$ vérifie l'énoncé du lemme 3.8. $\square$

Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ un système de coordonnées linéaires en $(x_1, \ldots, x_n)$ choisi de façon à ce que $(y_1, \ldots, y_{2r})$ soient des coordonnées transverses à L et tel que $(\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n)$ soit une base orthogonale au point a pour la métrique $g_{k,\ell}$, qui diagonalise $\Gamma_{k,\ell}(a)$. C'est-à-dire qu'on a

$$\tilde{g}_{k,\ell} = g_{k,\ell}(a) = k \sum_{j=1}^{2r} dy_j^2 + \ell \sum_{j=2r+1}^{n} dy_j^2$$

$$\Gamma_{k,\ell}(a) = k \sum_{j=1}^{r} \Gamma_j(a)\, dy_j \wedge dy_{j+r} + \ell \sum_{j=r+1}^{[n/2]} \Gamma_j(a)\, dy_{2j-1} \wedge dy_{2j}.$$

Notons $\widetilde{\nabla}_{k,\ell} = d + i\widetilde{A}_{k,\ell} \wedge \bullet$ la connexion de courbure $\Gamma_{k,\ell}(a)$, et $\widetilde{V} = V(a)$. On peut alors définir pour $u \in W_0^1(P_{k,\ell}, \mathbb{C})$ la forme quadratique "gelée en a" :

$$\widetilde{Q}_{k,\ell}(u) = \int_{P_{k,\ell}} |\widetilde{\nabla}_{k,\ell} u|^2_{\widetilde{k,\ell}} - \widetilde{V}|u|^2_{\widetilde{k,\ell}}\, d\sigma_{\widetilde{k,\ell}}$$

où les indices $\widetilde{k,\ell}$ signifient que les produits scalaires considérés ainsi que l'élément de volume $d\sigma_{\widetilde{k,\ell}}$ sont ceux induits par $\tilde{g}_{k,\ell}$.

Lemme 3.9. — *Il existe une suite $\varepsilon_{k,\ell}$ tendant vers 0 telle que l'on ait :*

$$(1 - \varepsilon_{k,\ell})\|u\|^2_{\widetilde{k,\ell}} \leqslant \|u\|^2_{k,\ell} \leqslant (1 + \varepsilon_{k,\ell})\|u\|^2_{\widetilde{k,\ell}}$$

$$(1 - \varepsilon_{k,\ell})\widetilde{Q}_{k,\ell}(u) - \varepsilon_{k,\ell}\|u\|^2_{\widetilde{k,\ell}} \leqslant Q_{k,\ell}(u) \leqslant (1 + \varepsilon_{k,\ell})\widetilde{Q}_{k,\ell}(u) + \varepsilon_{k,\ell}\|u\|^2_{\widetilde{k,\ell}}$$

pour tout $u \in W_0^1(P_{k,\ell}, \mathbb{C})$.

Démonstration. — Sur $P_{k,\ell}$, on a les encadrements,

$$\big(1 - C_{10}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\big)\tilde{\eta} \leqslant \eta \leqslant \big(1 + C_{10}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\big)\tilde{\eta} \quad \text{et} \quad \big(1 - C_{10}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\big)\tilde{\zeta} \leqslant \zeta \leqslant \big(1 + C_{10}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\big)\tilde{\zeta}$$

d'où le premier encadrement.

En posant $A'_{k,\ell} = kA'_E + \ell A'_F + \ell A'_L$, on en déduit

$$\begin{aligned} Q_{k,\ell}(u) &= \int_{P_{k,\ell}} \big(|\widetilde{\nabla}_{k,\ell} u - iA'_{k,\ell} \wedge u|^2_{k,\ell} - V|u|^2_{k,\ell}\big) d\sigma_{k,\ell} \\ &\leqslant \big(1 + C_{11}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\big) \int_{P_{k,\ell}} |\widetilde{\nabla}_{k,\ell} u - iA'_{k,\ell} \wedge u|^2_{\widetilde{k,\ell}} - \widetilde{V}|u|^2_{\widetilde{k,\ell}} d\sigma_{\widetilde{k,\ell}} + \delta_{k,\ell}\|u\|^2_{\widetilde{k,\ell}} \end{aligned}$$

où $\delta_{k,\ell} = \sup_{P_{k,\ell}} |V - V(a)| + C_{10}\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}$ est une quantité qui tend vers 0. Appliquons maintenant l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant (1+\alpha)(a^2 + \alpha^{-1}b^2)$ au terme $|\widetilde{\nabla}_{k,\ell} u - iA'_{k,\ell} \wedge u|^2_{\widetilde{k,\ell}}$

avec $\alpha_{k,\ell} = C_1\big(\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}} + r_{k,\ell}\sqrt{\ell/k}\big)$: on obtient la seconde majoration, car cette suite tend vers 0 par hypothèse. La minoration s'obtient de même grâce à l'inégalité $(1-\alpha)(a^2 - \alpha^{-1}b^2) \leqslant (a+b)^2$ $\square$

Nous sommes ramenés sur les pavés $P_{k,\ell}$ au cas où $\Gamma_{k,\ell}$, V, et la métrique sont constants. On peut en outre supposer que V est nul en faisant la translation $\lambda \to \lambda + V(a)$.

A priori, les pavés $P_{k,\ell}$ ne sont pas des parallélépipèdes dont les faces sont parallèles aux axes des coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$, si bien que nous ne pouvons pas appliquer directement la proposition 2.6 pour achever la démonstration de la proposition 3.6. Cependant, du fait que les coordonnées $(y_1, \ldots, y_{2r})$ diagonalisent $B_E(a)_{|NL}$ dans la métrique $\eta(a)$, le passage des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ aux coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ laisse stable la sous-variété L_a. On peut donc choisir les coordonnées y de façon à ce que y'' soit un système de coordonnées sur L et $(dy_1, \ldots, dy_{2r})$ soit un repère de N^*L sur Ω.

Ecrivons $y' = Ax'$ et $y'' = Bx' + Cx''$. On a

$$x \in P_{k,\ell} \Leftrightarrow |x - x^0|_{k,\ell} \leqslant r_{k,\ell} \Rightarrow |y' - y'_0| \leqslant |A|\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}} \quad \text{et}$$
$$|y'' - y''_0| \leqslant |C|\frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}(1 + O(\sqrt{\ell/k})).$$

On peut donc encadrer le pavé $P_{k,\ell}$ par deux cubes de côté $O(r_{k,\ell})$ pour la métrique $\tilde{g}_{k,\ell}$, et dont les faces sont parallèles aux axes des coordonnées y.

Soit $\varepsilon \in\,]0,1[$, nous allons paver chaque parallélépipède $P_{k,\ell}$ à l'aide de pavés $P_{k,\ell,\alpha}$ (resp. $P'_{k,\ell,\alpha}$), $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, semblables à celui de la proposition 2.6. Ce sont des cubes de côté $\varepsilon r_{k,\ell}$ (resp. $\varepsilon(1+\varepsilon)r_{k,\ell}$) dans la métrique $\tilde{g}_{k,\ell}$, dont les faces sont parallèles aux axes des coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$, et dont le centre a pour coordonnées $\varepsilon r_{k,\ell}\big(\frac{\alpha_1}{\sqrt{k}}, \ldots, \frac{\alpha_{2r}}{\sqrt{k}}, \frac{\alpha_{2r+1}}{\sqrt{\ell}}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\sqrt{\ell}}\big)$ (dans le repère $(\partial/\partial y_i, i = 1, \ldots, n)$).

Etant entendu que nous ne considérons les $P_{k,\ell,\alpha}$ (resp. $P'_{k,\ell,\alpha}$) que s'ils sont contenus dans $P_{k,\ell}$ (resp. s'ils rencontrent $P_{k,\ell}$), on a :

$$P_{k,\ell} \supset \bigcup P_{k,\ell,\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\Sigma_\alpha \operatorname{Vol}(P_{k,\ell,\alpha})}{\operatorname{Vol}(P_{k,\ell})} \geqslant 1 - C_{12}\varepsilon$$

$$P_{k,\ell} \subset \bigcup P'_{k,\ell,\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\Sigma_\alpha \operatorname{Vol}(P'_{k,\ell,\alpha})}{\operatorname{Vol}(P_{k,\ell})} \leqslant 1 + C_{12}\varepsilon$$

où C_{12} est une constante uniforme par rapport à k et ℓ.

Le nombre des pavés $P_{k,\ell,\alpha}$ ou $P'_{k,\ell,\alpha}$ considérés est majoré par $C_{13}\varepsilon^{-n}$ et, comme les cubes $P'_{k,\ell,\alpha}$ se recouvrent deux à deux sur une longueur $\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}$ le long des axes $y_1, \ldots, y_r$ et $\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}$ le long des axes $y_{2r+1}, \ldots, y_n$ lorsqu'ils sont contigus, on peut trouver une partition de l'unité $\Sigma\psi^2_{k,\ell,\alpha} = 1$ sur $\overline{P}_{k,\ell,\alpha}$ avec $\operatorname{supp}\psi_{k,\ell,\alpha} \subset P'_{k,\ell,\alpha}$ et $\sup_{\overline{P}_{k,\ell,\alpha}} \Sigma_\alpha |d\psi_{k,\ell,\alpha}|^2 \leqslant C\varepsilon^{-n-4} r^{-2}_{k,\ell}$.

En effet, si $d\psi_{k,\ell,\alpha} = \Sigma\psi_j(y)dy_j$, il est possible de construire les $\psi_{k,\ell,\alpha}$ de sorte que :

$$|dy_j|^2_{k,\ell} = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad |\psi_j|^2 \leqslant C_{14}\Big(\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}\Big)^{-2} \quad \text{si } 1 \leqslant j \leqslant 2r$$

$$|dy_j|^2_{k,\ell} = \frac{1}{\ell} \quad \text{et} \quad |\psi_j|^2 \leqslant C_{14}\Big(\frac{\varepsilon^2 r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\Big)^{-2} \quad \text{si } 2r+1 \leqslant j \leqslant n.$$

L'hypothèse $\lim_{k/\ell,\ell\to+\infty} r_{k,\ell} = +\infty$ permet d'appliquer le lemme 3.3 b) si bien que l'on peut maintenant déduire la proposition 3.6 de la proposition 2.6 appliquée sur chaque pavé $P_{k,\ell,\alpha}$ et $P'_{k,\ell,\alpha}$ dont le côté $\varepsilon r_{k,\ell}$ (resp. $\varepsilon(1+\varepsilon)r_{k,\ell}$) tend vers $+\infty$.

La majoration uniforme de la proposition 3.6 provient, quant à elle, de la majoration du théorème 2.5 et du fait que toutes les constantes rencontrées sont uniformes sur K. □

On déduit maintenant le théorème 3.1 de la proposition 3.6 grâce au principe de localisation 3.3 en pavant l'ouvert Ω par des pavés qui sont des cubes dans la métrique $g^0_{k,\ell} = k\sum_{j=1}^{2r} dx_j^2 + \ell\sum_{j=2r+1}^{n} dx_j^2$ de côté $r_{k,\ell} = \min\big(\ell^{1/6}, (\frac{k}{\ell})^{1/4}\big)$.

Soient, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $\Pi_{k,\ell,\alpha}$ (resp. $\Pi'_{k,\ell,\alpha}$) les cubes de côté $r_{k,\ell}$ (resp. $r'_{k,\ell} = r_{k,\ell}(1+r_{k,\ell}^{-\frac{1}{2}}) = r_{k,\ell}+r_{k,\ell}^{\frac{1}{2}}$) et de centre commun x_α, avec $x'_\alpha = \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{k}}\alpha'$ et $x''_\alpha = \frac{r_{k,\ell}}{\sqrt{\ell}}\alpha''$ où $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2r})$, $\alpha'' = (\alpha_{2r+1}, \ldots, \alpha_n)$ conformément à la convention déjà énoncée.

Soit $I_{k,\ell}$ (resp. $I'_{k,\ell}$) l'ensemble des indices $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\Pi_{k,\ell,\alpha} \subset \Omega$ (resp. $\Pi'_{k,\ell,\alpha} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$). Il existe une partition de l'unité $\sum_{\alpha\in I'_{k,\ell}} \psi^2_{k,\ell,\alpha} \equiv 1$ sur $\overline{\Omega}$, avec $\operatorname{supp}\psi_{k,\ell,\alpha} \subset \Pi'_{k,\ell,\alpha}$ et

$$|d\psi_{k,\ell}|^2_{k,\ell} = \sup_{\Omega} \sum_{\alpha\in I'_{k,\ell}} |d\psi_{k,\ell,\alpha}|^2_{k,\ell} \leqslant C_{15} r_{k,\ell}^{-1} \longrightarrow 0.$$

Posons

$$\Omega_{k,\ell} = \bigcup_{\alpha\in I_{k,\ell}} \Pi_{k,\ell,\alpha}$$

et

$$\Omega'_{k,\ell} = \bigcup_{\alpha\in I'_{k,\ell}} \Pi'_{k,\ell,\alpha}$$

On définit pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ par

$$f_{k,\ell} = \sum_{\alpha\in I_{k,\ell}} N_{\Pi_{k,\ell,\alpha},k,\ell}(\lambda) \frac{1}{\operatorname{Vol}_{k,\ell}(\Pi_{k,\ell,\alpha})} \mathbb{I}_{\Pi_{k,\ell,\alpha}}$$

$$f'_{k,\ell} = \sum_{\alpha\in I'_{k,\ell}} N_{\Pi'_{k,\ell,\alpha},k,\ell}\big(\lambda + |d\psi_{k,\ell}|^2_{k,\ell}\big) \frac{1}{\operatorname{Vol}_{k,\ell}(\Pi'_{k,\ell,\alpha})} \mathbb{I}_{\Pi_{k,\ell,\alpha}}.$$

Le lemme 3.3 implique l'encadrement :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{k,\ell} d\sigma_{k,\ell} \leqslant N_{\Omega,k,\ell}(\lambda) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f'_{k,\ell} d\sigma_{k,\ell}. \tag{3.10}$$

Si $x \in \Omega$ est un point n'appartenant pas à l'ensemble négligeable $Z = \bigcup_{\substack{k,\ell\in\mathbb{N}\\ \alpha\in\mathbb{Z}^n}} \partial\Pi_{k,\ell,\alpha}$, il existe une suite unique d'indices $\alpha_{k,\ell}$ tels que $x \in \Pi_{k,\ell,\alpha_{k,\ell}}$. La proposition 3.6 appliquée à la suite de cubes $P_{k,\ell} = \Pi_{k,\ell,\alpha_{k,\ell}}$, $P'_{k,\ell} = \Pi'_{k,\ell,\alpha_{k,\ell}}$ où $\mathrm{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell}) \sim \mathrm{Vol}_{k,\ell}(P'_{k,\ell})$ montre que les suites ponctuelles

$$f_{k,\ell}(x) = \frac{N_{P_{k,\ell},k,\ell}(\lambda)}{\mathrm{Vol}_{k,\ell}(P_{k,\ell})} \quad \text{et} \quad f'_{k,\ell}(x) = \frac{N_{P'_{k,\ell},k,\ell}\big(\lambda + |d\psi_{k,\ell}|^2_{k,\ell}\big)}{\mathrm{Vol}_{k,\ell}(P'_{k,\ell})} \tag{3.11}$$

sont telles que

$$\liminf_{k,\ell} f_{k,\ell}(x) \geqslant \nu_\Gamma(V(x)+\lambda)\mathbb{I}_\Omega(x) \tag{3.12}$$

et

$$\limsup_{k,\ell} f'_{k,\ell}(x) \leqslant \bar{\nu}_\Gamma(V(x)+\lambda)\mathbb{I}_{\overline{\Omega}}(x).$$

Ceci car $r'_{k,\ell} \sim r_{k,\ell}$ vérifie les hypothèses de la propositon 3.6 dès que $\ell = \mathrm{o}(k)$. Le théorème 3.1 découle alors du théorème de la convergence dominée appliqué aux inégalités (3.10)–(3.12) grâce à la majoration donnée par la proposition 3.6 :

$$f_{k,\ell} \leqslant f'_{k,\ell} \leqslant C_{\overline{\Omega}}(1 + \sqrt{\lambda_+ + C_{14}})^n \qquad \square$$

La fonction $\lambda \to \int_\Omega \nu_\Gamma(\lambda+V)d\sigma$ est croissante. Elle admet donc un ensemble au plus dénombrable de discontinuités. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces discontinuités. Si $\partial\Omega$ est de mesure nulle, on a donc :

Corollaire 3.13. — *Si $\ell \to +\infty$, $\ell/k \to +\infty$, alors*

$$\lim_{\ell,k\to+\infty} \frac{1}{N_{\Omega,k,\ell}(\lambda)} \int_\Omega \nu_\Gamma(V+\lambda)d\sigma_{k,\ell} = 1 \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in \mathbb{R}\backslash\mathcal{D}.$$

4. Démonstration du théorème 0.1 et du corollaire 0.2

Nous nous replaçons dans la situation du paragraphe I, et nous allons maintenant tirer les conséquences de la proposition 1.8 et du théorème 3.1 : nous avons l'équivalent suivant :

Proposition 4.1. — *Soient V_j, $j = 1, \ldots, N$ les valeurs propres de l'endomorphisme de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k,\ell)$ défini par $V_{k,\ell}$ dans la métrique $\omega_{k,\ell}$. Soit $\gamma_{k,\ell}$ la courbure de la connexion $\nabla_{k,\ell}$, alors, si $\delta^q_{k,\ell}(\lambda)$ désigne le nombre de valeurs* *propres* $\leqslant \lambda$ *de la forme quadratique* $Q_X(u) = \int_X (|\nabla_{k,\ell} u|^2 - \langle V_{k,\ell} u, u\rangle) d\sigma_{k,\ell}$, *on a*

$$k^{-r}\ell^{r-n} \sum_{j=1}^{N} \int_X \nu_\gamma(V_j+\lambda) d\sigma_{k,\ell} \leqslant \liminf_{k,\ell} k^{-r}\ell^{r-n} \delta^s_{k,\ell}(\lambda)$$

$$\leqslant \limsup_{k,\ell} k^{-r}\ell^{r-n} \delta^q_{k,\ell}(\lambda) \leqslant k^{-r}\ell^{r-n} \sum_{j=1}^{N} \int_X \bar{\nu}_\gamma(V_j+\lambda) d\sigma_{k,\ell}.$$

En effet, si $\{u_j,\ j=1,\ldots,N\}$ est la famille des coordonnées de u dans une base de sections propres de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G(k,\ell)$ pour $V_{k,\ell}$, on a :

$$Q_X(u) = \sum_{j=1}^{N} \int_X (|\nabla_{k,\ell} u_j|^2 - V_j |y_j|^2) d\sigma = \sum_{j=1}^{N} Q_{X,j}(u)$$

si bien que Q_X est somme directe de N formes quadratiques du type considéré au paragraphe 3. La proposition 4.1 provient alors du fait que le spectre de Q_X est la réunion disjointe de chacun des spectres des $Q_{X,j}$, auxquelles on peut appliquer le théorème 3.1 car les termes de courbures associés sont $\gamma_{k,\ell} + ic_\nabla(\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G)$ où le deuxième terme (la courbure de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes G$ pour la connexion ∇) tend vers 0 en norme dans la métrique $\omega_{k,\ell}$.

Soit $x \in X$, nous pouvons prendre des coordonnées locales (z_j) sur X au voisinage de x telles que, au point x, on ait :

$$\omega_{k,\ell} = k\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{r} dz_j \wedge d\bar{z}_j + \ell\frac{i}{2}\sum_{j=r+1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

et

$$\gamma_{k,\ell} = k\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{r} \alpha_j dz_j \wedge d\bar{z}_j + \ell\frac{i}{2}\sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

Les valeurs propres de la forme $\gamma_{k,\ell}$ sont donc indépendantes de k et ℓ, et égales à celles de la forme γ définie dans l'introduction.

Soit $f_e,\ e=1,\ldots,g$, une base de G. Au voisinage de x, une $(p,q)-$forme à valeurs dans $G(k,\ell)$ s'écrit :

$$u = \sum_{\substack{|I|=p,\ |J|=q \\ 1\leqslant e\leqslant g}} u_{I,J,e} dz_I \wedge d\bar{z}_J \otimes f_e.$$

Soit $\alpha_J = \sum_{j\in J} \alpha_j$ et $\bar{\alpha}_J = (\alpha_{\complement J} - \alpha_J)$. Un calcul direct donne :

$$\langle [\gamma, \Lambda] u, u\rangle = 2^{p+q} \sum_{I,J,e} \big(\alpha_I + \alpha_J - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\big) |u_{I,J,e}|^2$$

où $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ sont les r valeurs propres non nulles de $ic(E)_x$ donc $\left(\frac{i}{2\pi}c(E)\right)^r = \frac{r!}{(2\pi)^r}\alpha_1\ldots\alpha_r\, dz_1\wedge d\bar{z}_1 \wedge\ldots\wedge dz_r \wedge d\bar{z}_r$ et $\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_n$ sont les valeurs propres de

$ic(F)_{|NY}$, si bien que

$$\big(\frac{i}{2\pi}c(E)\big)^r \wedge \big(\frac{i}{2\pi}c(F)\big)^{n-r} = \big(\frac{i}{2\pi}c(E)\big)^r \wedge \big(\frac{i}{2\pi}c(F)_{|TY}\big)^{n-r}$$
$$= r!(n-r)!\bar{\nu}_\gamma(\overline{\alpha'}_J)\frac{d\sigma_{k,\ell}}{k^r\ell^{n-r}} \qquad \square$$

Démonstration du corollaire 0.2. — Supposons qu'il existe un feuilletage Y de X, de codimension $r \leqslant n-1$, tel que $c(E)_{|TY} = 0$ (le cas $r = n$ est sans intérêt puisque nous n'obtenons pas dans ce cas la précision du théorème initial de Demailly [De1]).

Soit $F = \mathbb{C}$ muni d'une métrique constante, donc $c(F) \equiv 0$. Notons $[\alpha]$ la partie entière du réel positif α, et raisonnons par l'absurde.

Soit $\ell_k = \big[\big(\frac{\dim H^q(X, E^k\otimes G)}{k^r}\big)^{1/n-r}\big]$. Si cette quantité n'était pas bornée, il existerait une sous-suite notée encore ℓ_k tendant vers $+\infty$. On aurait alors

$$\big(\frac{\ell_k}{k}\big)^{n-r} \leqslant \frac{\dim H^q(X, E^k \otimes G)}{k^n} = \mathrm{o}(1) \quad \text{car} \quad c(E)^n = 0$$

d'après le théorème 0.1, avec $r = n$ et $F = \mathbb{C}$ (théorème de Demailly). On peut donc appliquer le théorème 0.1 a) aux fibrés E et F, d'où :

$$1 \leqslant \lim_{k,\ell_k \to +\infty} \frac{\dim H^q(X, E^k \otimes F^{\ell_k} \otimes G)}{k^r \ell_k^{n-r}} = 0. \qquad \square$$

Pour finir, nous désirons donner une application simple du théorème 0.1.

THÉORÈME 4.4. — *Si E est un fibré en droites holomorphe dont la fibration noyau de la courbure est bien feuilletée de codimension r; si F est un fibré dont la dimension de Kodaira est supérieure à $r+1$, il existe une infinité de puissances tensorielles du faisceau quotient Q de E par F qui admettent des sections non triviales.*

Démonstration. — Rappelons que la dimension de Kodaira du fibré F peut être définie par $\kappa(F) = \limsup_{k\to+\infty} (\mathrm{Log}\dim H^0(X, F^k)/\mathrm{Log}k)$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

induit en prenant une puissance tensorielle de la première flèche une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^k \longrightarrow F^k \longrightarrow Q^k \longrightarrow 0.$$

Le théorème 4.4 est une conséquence immédiate du corollaire 0.2 et de la suite exacte longue de cohomologie associée.

Note sur épreuves. Les estimations de la troisième partie conduisent à un équivalent pour le noyau de la chaleur associé à la forme $Q_{k,\ell}$ sous les hypothèses du théorème 0.1. Nous développons ceci dans un article achevé récemment (la méthode est celle de [Bo1], la principale différence résidant dans l'utilisation d'une majoration uniforme du noyau de la chaleur riemannien à la place d'un simple équivalent pour t voisin de 0). On obtient de cette façon une constante effective sinon optimale pour le corollaire 0.2 (*cf.* [Bo2]).

Bibliographie

[Bi] BISMUT J.-M. — *Demailly's asymptotic inequalities : a heat equation proof*, J. Funct. Anal., **72** (1987), 263–278.

[Bo] BOTT R. — *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math., **60** (1954), 248–251.

[Bo1] BOUCHE TH. — *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (1), **40** (1990), 117–130.

[Bo2] BOUCHE TH. — *Noyau de la chaleur et inégalités de Morse holomorphes pour un fibré en droites à courbure dégénérée*, à paraître au Bull. Sci. Math.,.

[De1] DEMAILLY J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $d''-$cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **35** (1985), 189–229.

[De2] DEMAILLY J.-P. — *Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne,* Séminaire P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse), 1983/84, Lecture Notes in Math. Springer, **1295** (1987), 48–58.

[Wi] WITTEN E. — *Supersymmetry and Morse Theory*, J. Differential Geom., **17** (1982), 661–692.

— ◇ —

Chapitre II

Inégalités de Morse holomorphes sur une variété non compacte

0. Introduction

Soit X une variété analytique de dimension complexe n, L un fibré holomorphe en droites hermitien de classe $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de X, E un fibré holomorphe vectoriel de rang r au-dessus de X. Soit $D = D' + D''$ la connexion canonique de L, $c(L) = D^2$ la forme de courbure associée. Nous ferons l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes sur la géométrie de X et L, m et l étant des entiers $\geqslant 1$:

• *Hypothèse* $P(m,l)$: X est fortement m-convexe (*i.e.* il existe une fonction exhaustive ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, telle que $id'd''\psi$ ait au moins $(n-m+1)$ valeurs propres > 0 hors d'un compact K) et $ic(L)$ admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqslant 0$ hors de K.

• *Hypothèse* $Q(m)$: X est kählérienne hors d'un compact K, et faiblement 1-complète (*i.e.* il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, exhaustive et plurisousharmonique), en outre, la courbure de L est semi-positive de rang supérieur à $(n-m+1)$ sur $X \setminus K$.

Soit q un entier $\geqslant 0$, nous notons $X(q)$ l'ensemble des points de X où $ic(L)$ est non dégénérée et admet exactement q valeurs propres négatives, $X(\geqslant q) = \bigcup_{\nu \geqslant q} X(\nu)$. Nous notons également $H^q(X, E \otimes L^k)$ le q-ième groupe de cohomologie de Dolbeault à valeurs dans $E \otimes L^k$, où L^k est la puissance tensorielle k-ième du fibré L. Nous démontrons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 0.1. — *Soient $m, l \geqslant 1$. Si X et L vérifient $P(m,l)$, on a, pour tout $q \geqslant m+l-1$*

1) Inégalités de Morse asymptotiques :

$$\dim H^q(X, E \otimes L^k) \leqslant r \frac{k^n}{n!} \int_{X(q)} (-1)^q \Big(\frac{i}{2\pi} c(L)\Big)^n + \mathrm{o}(k^n).$$

2) Inégalités de Morse fortes :

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim H^{\nu}(X,E\otimes L^k)\leqslant r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\geqslant q)}(-1)^q\big(\frac{i}{2\pi}c(L)\big)^n+\mathrm{o}(k^n).$$

THÉORÈME 0.2. — *Soit $m\geqslant 1$. Si X et L vérifient l'hypothèse $Q(m)$, on a, pour tout $q\geqslant m$:*

1) Inégalités de Morse asymptotiques :

$$\dim H^{n,q}(X,L^k)\leqslant\frac{k^n}{n!}\int_{X(q)}(-1)^q\big(\frac{i}{2\pi}c(L)\big)^n+\mathrm{o}(k^n).$$

2) Inégalités de Morse fortes :

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{\nu-q}\dim H^{n,\nu}(X,L^k)\leqslant\frac{k^n}{n!}\int_{X(\geqslant q)}(-1)^q\big(\frac{i}{2\pi}c(L)\big)^n+\mathrm{o}(k^n)$$

Notre méthode utilise pour une part les techniques des articles [D1] et [D2] de Jean-Pierre Demailly : nous majorons la dimension des espaces propres du Laplacien antiholomorphe à l'aide du théorème de répartition spectrale de [D1], appliqué à un ouvert relativement compact de X, contenant K; on utilise aussi pour cela l'inégalité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne [D2] à l'extérieur de cet ouvert. De cette façon, nous obtenons les inégalités des théorèmes 0.1 et 0.2 pour les groupes de cohomologie à croissance qui s'identifient au premier espace propre du laplacien antiholomorphe.

Comme application de ces résultats, nous démontrons une estimation pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété fortement m-convexe. Notre résultat généralise l'estimation obtenue récemment par Siu pour les domaines m-convexes d'une variété de Stein ([S]), avec une démonstration différente plus directe.

Je tiens à remercier Jean-Pierre Demailly, dont les conseils m'ont aidé à mettre au point la rédaction définitive de ce travail.

1. Estimation des premières fonctions propres de Δ'' hors d'un compact

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — Soit ω, une métrique hermitienne complète sur X (définie ultérieurement), $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'accouplement sesquilinéaire canonique des formes et $\|\cdot\|$ la norme associée. Que nous soyons dans l'une ou l'autre des hypothèses $P(m,l), Q(m)$, nous noterons ψ la fonction d'exhaustion $\mathcal{C}^\infty$ et $X_c=\{x\in X:\psi(x)<c\}$ la famille croissante d'ouverts relativement compacts

associée, $a_0 < a_1 < a_2$, des réels tels que $K \subset X_a$. Λ est l'adjoint de l'opérateur de multiplication extérieure par ω, $\delta = \delta' + \delta''$ l'adjoint formel de D. Si A et B sont deux endomorphismes de degré resp. δ_1 et δ_2 du module gradué $\mathcal{C}^\infty_\bullet(X, E \otimes L) = \mathcal{C}^\infty(\Lambda^\bullet T^*X \otimes E \otimes L)$, on pose $[A, B] = AB - (-1)^{\delta_1\delta_2}BA$. On définit alors $\Delta' = [D', \delta']$, $\Delta'' = [D'', \delta'']$ les laplaciens holomorphe et antiholomorphe. Enfin, $\mathcal{C}$ est le cône des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ convexes, croissantes de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ et, si $\chi \in \mathcal{C}$, on note L_χ le fibré hermitien obtenu à partir de L en multipliant la métrique de chaque fibre par le poids $e^{-\chi\circ\psi}$.

Soit $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ l'espace des (n, q)-formes sur $(L_\chi)^{\otimes k}$ de carré intégrable par rapport à l'élément de volume $dV = \frac{\omega^n}{n!}$. D'' définit sur cet espace un opérateur dont l'adjoint hilbertien est δ'' – cela car la métrique ω est complète, en vertu du lemme de Hörmander sur la densité des formes à support compact dans $\mathrm{Dom}(D'')$ pour la norme du graphe (*cf.* [H]). Par conséquent, $\Delta'' = D''\delta'' + \delta''D''$ est son propre adjoint hilbertien. Soit $\lambda \in \mathbf{R}^*_+$, notons $\mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$ la somme directe des espaces propres de Δ'', pour les valeurs propres $\leqslant k\lambda$ dans $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$. Pour mener de front les démonstrations des théorèmes 0.1 et 0.2, nous ferons la convention suivante sur E : $E = \mathbf{C}$ (fibré hermitien trivial) si X et L vérifient $Q(m)$. Sous l'hypothèse $P(m, l)$, nous démontrerons en fait le théorème 0.1 pour les groupes $H^{n,q}(X, E \otimes L^k)$, l'énoncé que nous en avons donné sera retrouvé en remplaçant E par le fibré $E' = \Lambda^n TX \otimes E$ car $H^{n,q}(X, E \otimes L^k) \simeq H^q(X, \Lambda^n T^*X \otimes E \otimes L^k)$.

PROPOSITION 1.1. — *Si X et L vérifient l'une ou l'autre des hypothèses $P(m, l)$ ou $Q(m)$, si $q \geqslant m$, si X est muni d'une métrique complète, et si χ est suffisamment croissante, on a l'isomorphisme :*

$$\mathcal{H}^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi) \simeq H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$$

où le groupe de droite désigne le groupe de cohomologie à croissance *associé aux métriques de X et de $E \otimes L^k_\chi$.*

En effet, nous avons la décomposition en somme orthogonale de $\ker D''$: $\ker D'' = \ker \Delta'' \oplus \overline{\mathrm{Im}\, D''}$. Or, nous savons que $\ker D''/\,\mathrm{Im}\, D'' \simeq H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ est de dimension finie si χ est à croissance assez forte (la méthode du théorème de finitude de [D3] s'applique ici sans difficulté). Par utilisation du théorème de l'application ouverte, il est facile d'en déduire que $\mathrm{Im}\, D''$ est fermée et que $\ker D''/\,\mathrm{Im}\, D'' \simeq \ker \Delta''$. □

Le lemme suivant exprime intuitivement le fait que les éléments de $\mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$ sont assez précisément connus par leur restriction à un compact assez grand, si λ reste petit.

LEMME 1.2. — *Il existe k_0, un entier positif, et $\chi_0 \in \mathcal{C}$ telle que, si $h \in \mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$ avec $\lambda < \frac{1}{4}$, on ait :*

$$\int_{X \setminus X_a} \|h\|^2 \leqslant \int_{X_a} \|h\|^2$$

dès que $a > a_1, \chi \in \chi_0 + \mathcal{C}$, *et* $k \geqslant k_0$.

Ce résultat est une conséquence d'une étude assez poussée de la courbure de $E \otimes L^k$, combinée avec l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano non kählérienne de [D2], que nous rappelons ci-dessous :

PROPOSITION 1.3. — *Soient* $\tau = [\Lambda, d'\omega]$, τ^* *son adjoint formel,* $\Delta'_\tau = [D' + \tau, \delta' + \tau^*]$, $T_\omega = [\Lambda, [\Lambda, \frac{i}{2} d'd''\omega]] - [d'\omega, (d'\omega)^*]$; *alors*

$$\Delta'' = \Delta'_\tau + [\mathrm{ic}(E \otimes L^k_\chi), \Lambda] + T_\omega \tag{1.5}$$

Démonstration du lemme 1.2. —

1) *Supposons que* X *vérifie* $P(m, l)$.

$id'd''\psi$ ayant $(n - m + 1)$ valeurs propres strictement positives hors de $K \subset X_{a_0}$, il existe une métrique ω_1, sur X, de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que les valeurs propres ε_j de $id'd''\psi$ par rapport à ω_1 vérifient sur $X \setminus X_{a_0}$: $\frac{-1}{2m} \leqslant \varepsilon_j \leqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$, et $\varepsilon_m = \cdots = \varepsilon_n = 1$, les ε_j étant rangées par ordre croissant. On peut alors choisir $\rho \in \mathcal{C}$, suffisamment croissante pour que $\omega = e^{\rho\circ\psi}\omega_1$ soit une métrique complète sur X. Par rapport à ω, les valeurs propres de $id'd''\psi$ sont $\varepsilon'_j = e^{-\rho\circ\psi}\varepsilon_j$.

D'autre part, soit $\chi \in \mathcal{C}$;

$$\begin{aligned} ic(L_\chi) &= ic(L) + id'd''\chi \circ \psi \\ &= ic(L) + i(\chi''\circ\psi)d'\psi \wedge d''\psi + i(\chi'\circ\psi)d'd''\psi \\ &\geqslant ic(L) + i(\chi'\circ\psi)d'd''\psi. \end{aligned}$$

Soient λ_j, α_j les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ et $ic(L)$, respectivement, par rapport à ω, rangées par ordre croissant. Nous avons :

$$\alpha_n \geqslant \cdots \geqslant \alpha_1$$

et

$$\lambda_j \geqslant \alpha_1 + \chi'\circ\psi e^{-\rho\circ\psi}\varepsilon_j.$$

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$, un calcul explicite donne :

$$\begin{aligned} \langle [ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle &\geqslant (\lambda_1 + \cdots + \lambda_q)||u||^2 \qquad (1.4)(\textit{cf.}\ [\mathrm{D2}]\ \text{par exemple}) \\ &\geqslant [(q\alpha_1) + \chi' \circ \psi e^{-\rho\circ\psi}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q)]||u||^2 \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_q \geqslant -\frac{m-1}{2m} + 1 \geqslant \frac{1}{2}$ si $q \geqslant m$.

Soit χ_0, une fonction de $\mathcal{C}$, supposée nulle sur $\psi(K)$, choisie assez croissante pour que

$$\chi'_0 \circ \psi \geqslant \left[1 + 2|[ic(E), \Lambda]|_\omega + 2|T_\omega|_\omega + |2n\alpha_1|\right] e^{\rho\circ\psi}$$

sur $X \setminus X_{a_0} \subset X \setminus K$; alors, si $\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}$ (dans la suite, nous choisirons $\chi - \chi_0$ nulle sur $]-\infty, a_0[$), $\chi' \geqslant \chi'_0$, et, par conséquent, d'après (1.3)

$$\begin{aligned} \langle \Delta'' u, u\rangle &= \langle \Delta'_\tau u, u\rangle + k\langle [ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle + \langle [ic(E), \Lambda]u, u\rangle + \langle T_\omega u, u\rangle \\ &\geqslant \langle \Delta'_\tau u, u\rangle + \frac{k}{2}||u||^2 \quad \text{sur} X \setminus X_{a_0} \end{aligned}$$

donc

$$\int_X \langle \Delta'' u, u\rangle \geqslant \frac{k}{2}\int_{X\setminus X_{a_0}} ||u||^2 - kC_1\int_{X_{a_0}} ||u||^2 \tag{1.5}$$

Comme $a_1 > a_0$, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X,[0,1])$, telle que $\varphi(X_{a_0}) = \{0\}$, $\varphi(X\setminus X_{a_1}) = \{1\}$. Soit $\lambda < \frac{1}{4}$, $h \in \mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$; le lemme 1.2 va résulter de la minoration (1.5) appliquée à φh. Pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $C = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$, on a la majoration : pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $(x+y)^2 \leqslant (1+\varepsilon)x^2 + Cy^2$. Donc

$$\begin{aligned}\int_X \langle \Delta''(\varphi h), (\varphi h)\rangle &= \int_X \big(||D''\varphi \wedge h + \varphi D'' h||^2 + ||d'\varphi \lrcorner h + \varphi \delta'' h||^2\big)\\ &\leqslant (1+\varepsilon)\int_X \big(||D''h||^2 + ||\delta'' h||^2\big) + C_2\int_X ||h||^2 \qquad (1.6)\\ &\leqslant (k\lambda(1+\varepsilon) + C_2)\int_X ||h||^2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1.5) \Longrightarrow k\int_{X\setminus X_{a_1}} ||h||^2 &\leqslant k\lambda\big(1+\varepsilon+\frac{C_3}{k}\big)\int_X ||h||^2\\ \Longrightarrow k\int_{X\setminus X_{a_1}} ||h||^2 &\leqslant \frac{2\lambda(1+2\varepsilon)}{1-2\lambda(1+2\varepsilon)}\int_{X_{a_1}} ||h||^2\end{aligned}$$

si $k_0 \geqslant C_3/\varepsilon$, une fois ε choisi de sorte que $\lambda(1+2\varepsilon) < \frac{1}{4}$, le lemme 1.2 est démontré. □

2) *Supposons que X vérifie $Q(m)$.*

Soit α, une métrique hermitienne, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, kählérienne sur $X\setminus K$, où $ic(L)$ est semi-positive; soit $\varphi \in \mathcal{C}$, nous posons :

$$\omega = ic(L_\chi) + e^{-\rho\circ\psi}\alpha$$

Lemme 1.7. — *Pour tout $\chi_1 \in \mathcal{C}$, $\chi_1 \not\equiv 0$, si $\chi \in \chi_1^2 + \mathcal{C}$, alors ω est complète.*

En effet,

$$\begin{aligned}\omega &\geqslant id'd''(\chi_1^2\circ\psi) = 2i(\chi_1\circ\psi.\chi_1''\circ\psi d'd''\psi + (\chi_1'\circ\psi)^2 d'\psi\wedge d''\psi)\\ &\geqslant 2id'(\chi_1\circ\psi)\wedge d''(\chi_1\circ\psi).\end{aligned}$$

Ainsi, si χ_1 est une fonction de $\mathcal{C}$ non bornée (*i.e.* non nulle), $\chi_1\circ\psi$ est une fonction exhaustive sur X et $|\chi_1\circ\psi(x) - \chi_1\circ\psi(y)|$ minore la distance géodésique $\delta(x,y)$. □

Notons λ_j(resp. λ_j', λ_j''), les valeurs propres de $ic(L_\chi)$(resp. $ic(L_\chi), ic(L)$) par rapport à la métrique ω(resp. α, α), rangées par ordre croissant, on a les relations $\lambda_j' \geqslant \lambda_j''$ par le minimax, donc

$$\lambda_j = \frac{\lambda_j'}{\lambda_j' + e^{-\rho\circ\psi}} \geqslant \frac{\lambda_j''}{\lambda_j'' + e^{-\rho\circ\psi}}.$$

L'hypothèse sur le rang de $ic(L)$ signifie que $\lambda''_m > 0$ sur $X \setminus X_{a_0}$. Choisissons ρ suffisamment grand pour que $e^{-\rho\circ\psi} \leqslant \frac{\lambda''_m}{2}$ sur $X \setminus X_{a_0}$.

Soit $u \in \mathcal{C}^\infty_{n,q}(X, L^k_\chi)$; la minoration (1.4) s'écrit ici

$$\langle [ic(L_\chi), \Lambda]u, u\rangle \geqslant \lambda_m ||u||^2 \quad \text{si} q \geqslant m \tag{1.8}$$

car $\forall j = 1, \ldots, n, \lambda_j \geqslant 0$, et $\lambda_m \geqslant \frac{\lambda''_m}{\lambda''_m + e^{-\rho\circ\psi}} \geqslant \frac{2}{3}$.

Lemme 1.9. — *ρ étant fixée, il existe $\chi_0 \in \chi_1^2 + \mathcal{C}$, telle que, si $\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}$,*

$$|T_\omega|_\omega \leqslant \frac{1}{6} \quad \text{sur} X \setminus X_{a_0}$$

Ceci est démontré dans [D3] (Lemme 1.5), il suffit de voir que comme $d\alpha = 0, T_\omega$ ne fait apparaître que des dérivées de $\rho \circ \psi$, que l'on peut contenir par la croissance de $\chi \circ \psi$ sur $X \setminus X_{a_0}$.

L'inégalité (1.5) est une conséquence immédiate de l'inégalité (1.8) et du lemme 1.9 grâce à l'identité 1.3. La fin de la démonstration du lemme 1.2, dans ce cas, est donc similaire au cas précédent. □

2. Application du théorème de répartition spectrale et conclusion

Nous notons $\mathcal{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda)$ la somme directe des espaces propres du Laplacien antiholomorphe Δ'' sur X_{a_2}, avec conditions de Dirichlet au bord, pour les valeurs propres $\leqslant k\lambda$; soit $W^{n,q}_0(X_{a_2}, E\otimes L^k_\chi)$ l'adhérence dans $L^2_{n,q}(X, E\otimes L^k_\chi)$ de l'espace des (n, q)-formes $\mathcal{C}^\infty$ à support compact inclus dans X_{a_2}, et soit P_λ le projecteur orthogonal de $W^{n,q}_0(X_{a_2}, E\otimes L^k_\chi)$ sur $\mathcal{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda)$. Soit κ une fonction tronquante $\mathcal{C}^\infty$ nulle sur $X \setminus X_{a_2}$, valant 1 sur X_{a_1}. On note $C = 4\sup_{X_{a_2}} ||d\kappa||^2$.

Théorème 2.1. — *Soit $0 < \lambda < \frac{1}{4}$. Si X vérifie l'une ou l'autre des hypothèses $P(m, l), Q(m)$, et si $q \geqslant m$, l'endomorphisme de $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$, $\tilde{\kappa}(h) = P_{3(\lambda+\frac{C}{k})}(\kappa.h)$ définit une injection de $\mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$ dans $\mathcal{H}^{n,q}_{a_2}(3(\lambda + \frac{C}{k}))$ dès que $\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}$, $k \geqslant k_0$.*

Corollaire 2.2. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$ est un espace de dimension finie, et l'on a : si $k \geqslant k_1 = k_1(\lambda)$,*

$$\dim \mathcal{H}^{n,q}_{a_2}(\lambda) \leqslant \dim \mathcal{H}^{n,q}(\lambda) \leqslant \dim \mathcal{H}^{n,q}_{a_2}(4\lambda).$$

Démonstration du corollaire 2.2. — L'elliplicité de Δ'' garantit par le lemme de Rellich la finitude de l'espace $\mathcal{H}^{n,q}_{a_2}(4\lambda)$, et la première inégalité est conséquence immédiate du principe du minimax; il suffit de choisir $k_1 \geqslant \sup\left(k_0, \frac{3C}{\lambda}\right)$.

Démonstration du théorème 2.1. — Si $h \in \mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$, d'après le lemme 1.2, nous avons :

$$\int_X ||h||^2 \leqslant 2\int_{X_{a_1}} ||h||^2 = 2\int_{X_{a_1}} ||\kappa.h||^2$$

et, par le calcul (1.6) :

$$\begin{aligned}\int_{X_{a_2}} \langle \Delta''(\kappa.h), \kappa.h\rangle &\leqslant \frac{3}{2}k\big(\lambda \int_X ||h||^2 + \frac{C}{k}\int_{X_{a_2}} ||h||^2\big)\\ &\leqslant \frac{3}{2}k\big(\lambda + \frac{C}{k}\big)\int_X ||h||^2\\ &\leqslant 3k\big(\lambda + \frac{C}{k}\big)\int_{X_{a_2}} ||\kappa.h||^2.\end{aligned}$$

Ceci montre que pour $h \neq 0$ (donc $\kappa.h \neq 0$), les composantes de $\kappa.h$ sur les espaces propres de Δ'' de valeur propre $\leqslant 3k\big(\lambda + \frac{C}{k}\big)$ ne peuvent être toutes nulles (*i.e.* $P_{3(\lambda+\frac{C}{k})}(\kappa.h) \neq 0$). □

Définissons $\mathrm{Dom}^q D'' \subset L^2_{n,q}(X, \otimes L^k_\chi)$ le domaine de l'opérateur D'' au sens des distributions (*i.e.* l'ensemble des éléments u de $L^2_{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi)$ tels que $D''u$ (calculé au sens des distributions) soit dans $L^2_{n,q+1}(X, E \otimes L^k_\chi)$).

Proposition 2.3. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\mathcal{H}^{n,\bullet}(\lambda)$ est un sous-complexe de Dolbeault D'' : $\mathrm{Dom}^\bullet D''$, ayant même cohomologie.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{H}^{n,q}(\lambda)$ est un complexe de rang fini si $\lambda < \frac{1}{4}$, en degré $q \geqslant m$, le spectre de Δ'' est discret au voisinage de 0. Par conséquent, l'opérateur de Green $G = \int_{\lambda>0} \frac{1}{\lambda} dP_\lambda$ est un opérateur borné de $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$ (de norme $\frac{1}{\lambda_1}$ si λ_1 est la première valeur propre non nulle de Δ''). Il vérifie les relations :

$$\Delta'' G = G\Delta'' = Id - P_0, [G, D''] = 0.$$

L'opérateur $\delta'' G$ est donc un opérateur fermé dans $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$ et, comme la métrique ω est complète, pour $u \in L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$, on a :

$$\begin{aligned}\int_X ||\delta'' Gu||^2 dV &\leqslant \int_X \langle \Delta'' Gu, Gu\rangle dV\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda_1}\int_X ||u||^2 dV\end{aligned}$$

Il en résulte que $\delta'' G$ est un opérateur borné de $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$. D'autre part,

$$\begin{aligned}Id - P_\lambda &= \Delta'' G(Id - P_\lambda) + P_0(Id - P_\lambda)\\ &= \Delta'' G(Id - P_\lambda)\\ &= D''(\delta'' G(Id - P_\lambda)) + \delta'' G(Id - P_\lambda) D''\end{aligned}$$

si bien que $\delta'' G(Id - P_\lambda)$ définit une homotopie entre Id et P_λ sur $\mathrm{Dom}^\bullet D''$. $\square$

LEMME 2.4. — *Soit*

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} 0$$

un complexe d'espaces vectoriels de dimensions c^q, finies si $q \geqslant m$, sur un corps K. Soit $h^q = \dim H^q(C^\bullet)$. On a les inégalités suivantes, si $m \leqslant q \leqslant n$:

1) Inégalités de Morse :

$$h^q \leqslant c^q.$$

2) Inégalités de Morse fortes :

$$h^q - h^{q+1} + \cdots + (-1)^{n-q} h^n \leqslant c^q - c^{q+1} + \cdots + (-1)^{n-q} c^n.$$

Démonstration. — Si $Z^q = \ker d^q$, et $B^q = \mathrm{Im}\, d^{q-1}$, ont pour dimension z^q et b^q, les inégalités (1) et (2) résultent des formules

$$c^q = z^q + b^{q+1}, \quad h^q = z^q - b^q.$$

$$h^q - h^{q+1} + \cdots + (-1)^{n-q} h^n = -b^q + c^q - c^{q+1} + \cdots + (-1)^{n-q} c^n. \qquad \square$$

Notons λ_j^χ les valeurs propres de $ic(L_\chi)$ sur X, rangées par ordre décroissant de la valeur absolue, $s = s(x)$ le rang de $ic(L_\chi)_x$. Soit J un multiindice de longueur q dans $\{1, \ldots, n\}$, $\lambda > 0$, nous définissons les C_n^q fonctions semi-continues supérieurement suivantes :

$$\nu_J(\lambda) = \frac{2^{s-2n}\pi^{-n}}{\Gamma(n-s+1)} |\lambda_1^\chi \ldots \lambda_s^\chi| \sum_{(p_1,\ldots,p_s)\in \mathbf{N}^s} \Big(2\lambda + \lambda_{\complement J}^\chi - \lambda_J^\chi - \sum_{j=1}^{s} (2p_j+1)|\lambda_j^\chi|\Big)_+^{n-s}$$

avec les conventions $\lambda_J^\chi = \sum_{j\in J} \lambda_j^\chi$,

$$x_+^0 = 0 \quad \text{si} x < 0$$
$$x_+^0 = 1 \quad \text{si} x \geqslant 0.$$

Nous allons maintenant utiliser un théorème de répartition spectrale dû à J.-P. Demailly. D'après ce résultat (avec les changements de notations adéquats), le spectre de l'opérateur $\frac{1}{k}\Delta''$ pour le problème de Dirichlet sur X_{a_2} admet la répartition spectrale asymptotique décrite par le théorème 2.5.

THÉORÈME 2.5 [*cf.* [D1] Th. 2.16 et 3.14, calculs des parties III et IV]. — *Il existe un ensemble dénombrable $N \subset \mathbf{R}$ tel que, si $\lambda \in \mathbf{R}_+^* \setminus N$,*

$$\dim \mathcal{H}_{a_2}^{n,q}(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q} \int_{X_{a_2}} \nu_J(\lambda) dV + \mathrm{o}(k^n).$$

Soit $I(q,\lambda) = \sum_{|J|=q} \int_{X_{a_2}} \nu_J(\lambda) dV$. Le lemme 2.4 appliqué au complexe $\mathcal{H}^{n,\bullet}(\lambda)$, moyennant le corollaire 2.2, la proposition 2.3 et le théorème 2.5, implique le

COROLLAIRE 2.6. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a : si* $\lambda \in]0, \frac{1}{4}[\setminus N$ *et* $q \geqslant m$, *il existe* $k_1 = k_1(\lambda)$ *tel que, si* $k \geqslant k_1$:

1) $\dim H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi) \leqslant rk^n I(q, 4\lambda) + \mathrm{o}(k^n)$

2) $\sum_{\nu=q}^n (-1)^{\nu-q} \dim H^{n,\nu}(X, E \otimes L^k_\chi) \leqslant rk^n[I(q,4\lambda) - I(q+1,\lambda) + \cdots + (-1)^{n-q} I(n, \tilde{\lambda}) + \mathrm{o}(k^n)$ *(avec* $\tilde{\lambda} = \lambda$ *si* $n-q$ *est impair,* $\tilde{\lambda} = 4\lambda$ *si* $n-q$ *est pair).*

Faisons maintenant tendre λ vers 0 par valeurs dans $]0, \frac{1}{4}[\setminus N$ et k vers l'infini. La limite de $I(q,\lambda)$ (resp. $I(q,4\lambda)$) est, par la convention faite sur x^0_+, $I(q,0)$. Notons $X(q,\chi)$ l'ensemble des points de X où $ic(L_\chi)$ est non dégénérée d'indice q.

LEMME 2.7. — *Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a :*

$$I(q,0) = \frac{1}{n!} \int_{X_{a_2} \cap X(q,\chi)} (-1)^q \big(\frac{i}{2\pi} c(L_\chi)\big)^n$$

Démonstration. — La quantité $\lambda^\chi_{\complement J} - \lambda^\chi_J - \sum (2p_j+1)|\lambda^\chi_j|$ est toujours $\leqslant 0$, nulle aux seuls points $x \in X(q,\chi)$ où $ic(L_\chi)$ est non dégénérée d'indice q, avec $(p_1, \ldots, p_n) = 0$, et $J = \{j = 1, \ldots, n | \lambda^\chi_j < 0\}$. En un tel point,

$$\begin{aligned} \nu_J(\lambda) &= 2^{-n}\pi^{-n}(-1)^q(\lambda^\chi_1 \ldots \lambda^\chi_n) \\ &= \frac{1}{n!}(-1)^q \big(\frac{i}{2\pi} c(L_\chi)\big)^n. \end{aligned} \qquad \square$$

Nous retrouvons maintenant les groupes sans conditions de croissance que nous voulons estimer par la

PROPOSITION 2.8 ([D3], Lemme 1.9). — *On a la décomposition en réunion filtrante croissante :* $L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k, \mathrm{loc}) = \bigcup_{\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}} L^2_{n,\bullet}(X, E \otimes L^k_\chi)$ *où* χ *est choisie égale à* χ_0 *sur* X_{a_2}.

Ceci résulte du fait que le poids $e^{-\chi\circ\psi}$ sur les fibres permet de rendre toute forme L^2_{loc} sur X globalement de carré intégrable dès lors que $e^{-\chi\circ\psi}$ est à décroissance assez rapide à l'infini.

De plus, d'après [D3], on a le

LEMME 2.9. — *Pour* χ *à croissance assez rapide et* $k \geqslant k_0, q \geqslant m$,

$$\dim H^{n,q}(X, E \otimes L^k) = \dim H^{n,q}(X, E \otimes L^k_\chi).$$

Ce lemme résulte des propositions (3.12) et (3.13) de [D3], où l'on a pris garde de choisir χ suffisamment croissante, permettant de vérifier le lemme 2.9 indépendamment de k.

Fin de la démonstration des théorèmes 0.1 et 0.2. — Le corollaire 2.6, combiné avec les lemmes 2.7 et 2.9, permet d'obtenir maintenant les théorèmes

0.1 et 0.2. Observons tout d'abord que le majorant $I(q,0)$ est en fait uniforme par rapport à χ (car χ est toujours choisie égale à χ_0 sur X_{a_2}). D'autre part :

• *sous l'hypothèse* $P(m,l), ic(L)$ admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqslant 0$ hors de K, et $id'd''(\chi_0\circ\psi)$ au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors de K; donc $ic(L_{\chi_0}) = ic(L) + id'd''\chi_0\circ\psi$ est positive sur l'intersection des sommes directes des espaces propres attachés aux valeurs propres $\geqslant 0$ de $ic(L)$ et $id'd''\chi_0\circ\psi$ respectivement. Cette intersection est de codimension $\leqslant m-1+l-1$, donc de dimension $\geqslant n-(m+l-1)+1$. Par conséquent, si $q \geqslant m+l-1$, on a $X(q,\chi_0)\subset K$, et $\chi_0\circ\psi$ a été choisie nulle sur K donc $X(q,\chi_0) = X(q)$ et $ic(L_\chi) = ic(L)$ sur $X(q)$.

• *sous l'hypothèse* $Q(m), ic(L_\chi) \geqslant ic(L)$ sur X et $ic(L)$ admet au moins $n-m+1$ valeurs propres $\geqslant 0$ sur $X\setminus K$, donc $ic(L_\chi)$ aussi. Par conséquent, si $q\geqslant m$, on a $X(q,\chi)\subset K$, donc $X(q,\chi) = X(q)$ et $ic(L) = ic(L_\chi)$ sur $X(q)$. □

Remarques sur le théorème 0.1. —

(2.10) : les inégalités (1) et (2) du théorème 0.1 sont valides pour $q\geqslant m$, sans hypothèse sur la courbure de L, pour le fibré L_{χ_0}.

(2.11) : les inégalités (1) et (2) du théorème 0.1 sont valides pour $q\geqslant \sup(m,l)$ si l'on admet l'hypothèse supplémentaire suivante :

$R(m,l)$: X est très fortement m-convexe (*i.e.* il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$, exhaustive, *plurisousharmonique*, dont le hessien complexe admet au moins $(n-m+1)$ valeurs propres >0 hors d'un compact, et $ic(L)$ possède au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqslant 0$ hors d'un compact.

En effet, sous cette hypothèse, $id'd''\chi_0\circ\psi$ est semi-positive hors de K, et par conséquent $ic(L_{\chi_0})$ possède au moins l valeurs propres $\geqslant 0$ hors de K. Par conséquent $X(q,\chi_0)\subset K$ dès que $q\geqslant l$; d'autre part les inégalités du corollaire 2.6 sont valides dès que $q\geqslant m$.

(2.12) Enfin, remarquons que nous avons en fait la proposition suivante sensiblement plus forte que le corollaire 2.2 :

PROPOSITION 2.12. — *Si X est fortement m-convexe, avec les notations précédentes, il existe un choix de $\chi_0\in\mathcal{C}$, tel que, pour $\chi\in\chi_0+\mathcal{C}$, on ait, si $q\geqslant m$:*

$$\dim \mathcal{H}^{n,q}_\chi(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q}\int_X \nu_J(\lambda)dV + \mathrm{o}(k^n)$$

pour tout λ en dehors d'une partie dénombrable $N\subset\mathbf{R}$.

Démonstration. — Avec les notations de la démonstration du lemme 1.2, choisissons χ_0 assez croissante pour que :

$$\chi_0'\circ\psi \geqslant \big[2j+1+2|[ic(E),\Lambda]|_\omega + 2|T_\omega|_\omega + 2n|\alpha_1|\big]e^{\rho\circ\psi} \tag{2.13}$$

sur $X \setminus X_{a_0+j}$.

Alors, si $\chi \in \chi_0 + \mathcal{C}, \chi' \geqslant \chi'_0$, et par conséquent, d'après le calcul (1.6), on a :

$$\text{si } h \in \mathcal{H}^{n,q}_{\chi}(\lambda), \int_{X\setminus X_{a_0+j+1}} ||h||^2 \leqslant \frac{\lambda(1+2\varepsilon)}{j-\lambda(1+2\varepsilon)} \int_{X_{a_0+j+1}} ||h||^2 \tag{1.6$'$}$$

d'où l'on déduit :

$$\int_{X_{a_0+j+2}} \langle \Delta''(\kappa.h), \kappa.h\rangle \leqslant \frac{j}{j-\lambda(1+2\varepsilon)} \big(\frac{C}{k} + \lambda\big)(1+2\varepsilon) \int_{X_{a_0+j+2}} ||\kappa.h||^2 \tag{2.2$'$}$$

si κ est une fonction tronquante nulle sur $X \setminus X_{a_0+j+2}$, égale à 1 sur X_{a_0+j+1}. Pour j assez grand, cela démontre l'inégalité :

$$\text{si} q \geqslant m, \dim \mathcal{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda) \leqslant \dim \mathcal{H}^{n,q}_{\chi}(\lambda) \leqslant \dim \mathcal{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda(1+3\varepsilon)) \tag{2.14}$$

qui permet de conclure en faisant tendre ε vers 0 et j, k vers l'infini. En effet, par le théorème 2.5, nous avons que

$$\dim \mathcal{H}^{n,q}_{a_0+j+2}(\lambda) = \frac{rk^n}{n!} \int_{X_{a_0+j+2}} \nu_J(\lambda) dV + \mathrm{o}(k^n)$$

où $\nu_J(\lambda) = 2^{-n}\pi^{-n}|\lambda^{\chi}_1 \dots \lambda^{\chi}_s| \big(2\lambda - \lambda^{\chi}_J + \lambda^{\chi}_{\complement J} - \sum_{(p_j)}(2p_j+1)|\lambda^{\chi}_j|\big)^{n-s}_+$.

Notons que, si $q \geqslant m$, il existe un $s \geqslant m$ tel que $s \in J$. Dans ce cas, et d'après (2.13), $\lambda^{\chi}_s \geqslant \lambda^{\chi}_m \geqslant 2j$ sur $X \setminus X_{a_0+j}$. Par conséquent

$$2\lambda - \lambda^{\chi}_J + \lambda^{\chi}_{\complement J} - \sum(2p_j+1)|\lambda^{\chi}_j| \leqslant 2(\lambda - \lambda^{\chi}_m) \leqslant 2(\lambda - 2j)$$

sur $X \setminus X_{a_0+j}$.

En définitive, pour tout multiindice J de longueur q, $\nu_J(\lambda)$ est nul sur $X \setminus X_{a_0+j}$ dès que $j > \frac{\lambda}{2}$, donc les majorants intégraux restent à support dans un compact fixe lorsque j tend vers l'infini, et ε vers 0. □

3. Estimations pour l'opérateur de Monge-Ampère sur une variété fortement m-convexe

Nous dirons qu'une fonction φ est faiblement l-convexe sur une variété X de dimension n sur $\mathbf{C}$ si son hessien complexe admet au moins $(n-l+1)$ valeurs propres $\geqslant 0$. Les fonctions faiblement 1-convexes sont donc les fonctions plurisousharmoniques.

Théorème 3.1. — *Soit X une variété $\mathbf{C}$-analytique de dimension n, fortement m-convexe, φ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X, faiblement l-convexe hors d'un compact K de X. Pour $0 \leqslant \nu \leqslant n$, soit G_ν l'ensemble des points de X où $id'd''\varphi$ est non dégénérée et admet ν valeurs propres < 0. Alors, pour tout $q \geqslant m+l-1$, on a :*

$$\sum_{\nu=q}^{n} \int_{G_\nu} (id'd''\varphi)^n \geqslant 0 \quad \text{si } q \text{ est pair}$$

$$\sum_{\nu=q}^{n}\int_{G_\nu}(id'd''\varphi)^n \leqslant 0 \quad \text{si } q \textit{ est impair}$$

Démonstration. — Notons $\mathbf{C}_\varphi$ le fibré hermitien trivial $X \times \mathbf{C}$ muni de la métrique $e^{-\varphi}$ sur les fibres. Ce fibré vérifie l'hypothèse $P(m,l)$ car sa courbure est exactement $id'd''\varphi$. Si nous appliquons le théorème 0.1 à ce fibré, les inégalités de Morse fortes se retranscrivent comme suit :

$$\sum_{\nu=q}^{n}(-1)^{q-\nu}\dim H^\nu(X,\mathbf{C}) \leqslant \frac{k^n}{(n!)(2\pi)^n}(-1)^q\sum_{\nu=q}^{n}\int_{G_\nu}(id'd''\varphi)^n + \mathrm{o}(k^n) \qquad (3.2)$$

car $\mathbf{C}^{\otimes k} \simeq \mathbf{C}$. Divisons l'inégalité (3.2) par k^n, et faisons tendre k vers l'infini, nous obtenons le théorème 3.1 car le membre de gauche est fini et ne dépend pas de k. Celui-ci généralise les théorèmes 3 et 4 de [S], qui n'étaient valables que pour des domaines m-convexes d'une variété de Stein.

De façon analogue, le théorème 0.2 implique le

Théorème 3.2. — *Soit X, une variété faiblement 1-complète, kählérienne hors d'un compact, et φ, une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur X, dont le hessien est semi-positif de rang au moins $(n-m+1)$ hors d'un compact (φ plurisousharmonique et fortement m-convexe hors d'un compact). Alors, pour tout $q \geqslant m$, on a :*

$$\sum_{\nu=q}^{n}\int_{G_\nu}(id'd''\varphi)^n \geqslant 0 \quad \text{si } q \textit{ est pair}$$

$$\sum_{\nu=q}^{n}\int_{G_\nu}(id'd''\varphi)^n \leqslant 0 \quad \text{si } q \textit{ est impair}$$

Bibliographie

[D1] Demailly J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier, Tome XXXV, **4** (1985), 189–229.

[D2] Demailly J.-P. — *Sur l'identité de Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne.* Séminaire P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda (Analyse) (1983/84), 88-97, Lecture Notes in Math., **1198**, Springer, 1986.

[D3] Demailly J.-P. — *Sur les théorèmes d'annulation et de finitude de T. Ohsawa et O. Abdelkader.* Séminaire P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda (Analyse) 1985/86, Lecture Notes in Math., **1295**, Springer, 1987.

[H] Hörmander L. — *An introduction to Complex Analysis in several variables*, North-Holland Publishing Company, 2nd edition, 1973.

[S] Siu Y.-T. — *Calculus inequalities derived from holomorphic Morse inequalities*, Prépublication, 1987, à paraître aux Math. Annalen.

— ◇ —

Chapitre III

Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif

(version corrigée de l'article *Aplatissement de la métrique de Fubini-Study d'un fibré positif au dessus d'une variété projective)*

par Thierry **BOUCHE**

Résumé. — Soit E, un fibré linéaire positif au dessus d'une variété complexe compacte. Nous montrons que la fonction de distorsion définie par le rapport entre la métrique initiale et la métrique de Fubini-Study de $E^{\otimes k}$ admet un équivalent lorsque k tend vers l'infini. Ceci améliore les encadrements de Kempf et Ji sur les variétés abéliennes, et les étend à toute variété projective. La démonstration repose sur le calcul d'un équivalent pour le noyau de la chaleur, avec contrôle de la convergence par rapport au temps.

Abstract. — Let E be a positive line bundle over a compact complex manifold. We show that the distortion function defined by the quotient of the initial metric by the Fubini-Study metric of $E^{\otimes k}$, admits an equivalent when k tends to infinity. This improves the previous inequalities given by Kempf and Ji over Abelian varieties, and extends them to any projective manifold. The proof rests upon the computation of an equivalent for the heat kernel, with control of the convergence with respect to the time parameter.

0. Introduction

Soit X une variété analytique complexe, compacte et connexe, de dimension n sur $\mathbf{C}$ munie d'une métrique hermitienne ω. Soit L un fibré linéaire holomorphe *positif* au-dessus de X (c'est-à-dire que L est muni d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ dont la courbure $ic(L)$ est une $(1,1)-$forme définie positive. Cette condition équivaut en géométrie algébrique à l'amplitude). Notons L^k sa $k-$ième puissance tensorielle (k entier positif) et $V_k = H^0(X, L^k)$ l'espace des sections holomorphes globales de L^k. L^k étant globalement engendré pour k suffisamment grand, il existe une application holomorphe naturelle :

$$\begin{aligned}\Phi_k :& X \longrightarrow \mathbb{P}(V_k^*) \\ & x \mapsto H_x = \{\sigma \in V_k | \sigma(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Le théorème de plongement de Kodaira affirme que, pour $k \geqslant k_0$, Φ_k est en fait un plongement de X dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V_k^*)$.

Soit $\mathcal{O}(1)$, le fibré canonique (dual du fibré en droites tautologique au-dessus de $\mathbb{P}(V_k^*)$). On a un isomorphisme $L^k \simeq \Phi_k^*(\mathcal{O}(1))$. On appelle métrique de Fubini-Study la métrique induite sur L^k par celle de $\mathcal{O}(1)$, lorsque V_k est muni de sa métrique L^2 naturelle. Si X est une variété abélienne, Kempf [7] puis Ji [6] ont montré que la métrique de Fubini-Study converge vers la métrique initiale lorsque k tend vers l'infini. Tian [11] a étendu ce résultat au cas d'une variété projective quelconque, en se restreignant toutefois au cas $\omega = ic(L)$. Si $\xi \in L_x^k \setminus \{0\}$, notons $|\xi|_k$ (resp. $|\xi|_{k^{F-S}}$) la norme de ξ dans la métrique initiale (resp. de Fubini-Study) ; on définit alors la *fonction de distorsion* entre ces métriques $b_k(x) = \frac{|\xi|_k}{|\xi|_{k^{F-S}}}$.

L'objet de cet article est de donner un équivalent ponctuel de $b_k(x)$ lorsque k tend vers l'infini, sur toute variété projective.

Soit $\det ic_x(L)$ le produit des valeurs propres de la courbure $ic_x(L)$ par rapport à la métrique ω sur X, nous montrons le

Théorème principal. — *En tout point x de X, on a l'équivalent*

$$b_k(x) \sim k^n \det \frac{i}{2\pi} c_x(L)$$

lorsque $k \to +\infty$, uniformément par rapport à $x \in X$.

Une conséquence immédiate est que $(b_k)^{1/k}$ converge uniformément vers 1 sur X, c'est-à-dire que la métrique de Fubini-Study de L converge uniformément vers la métrique initiale.

Notre méthode de démonstration s'appuie sur une estimation asymptotique du noyau de l'opérateur de la chaleur $e^{-\frac{2t}{k}\Delta_k''}$ où Δ_k'' est le laplacien antiholomorphe défini par la connexion de Chern de L (théorème 1). Ces estimations sont comparables à celles de Bismut [1], mais plutôt que d'utiliser une méthode probabiliste, nous employons une approche analytique qui doit beaucoup à Mac Kean et Singer [8]. Certains détails techniques nous ont également été proposés par Jean-Pierre Demailly à la suite d'une discussion qu'il avait eue avec monsieur Mohan Ramachandran aux Etats-Unis. Cela nous permet d'obtenir des renseignements sur l'uniformité de notre équivalent par rapport aux différents paramètres (en particulier le temps).

L'organisation du papier est la suivante : le chapitre I est consacré à l'étude d'une formule asymptotique pour le noyau de la chaleur associé à un opérateur de Schrödinger général; au chapitre II nous observons que la fonction $b_k(x^0)$ est équivalente au noyau de la chaleur au point (x^0, x^0) lorsque, pour un ε petit, $t = k^\varepsilon$

tend vers $+\infty$, il ne reste alors qu'à calculer explicitement, dans ce cas, les valeurs du chapitre I.

Ces résultats, accompagnés des grandes lignes de leurs démonstrations ont été annoncés par Jean-Pierre Demailly [4], l'objet de ce travail est d'en donner les démonstrations complètes.

1. Comportement asymptotique du noyau de la chaleur associé à un opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, E et F deux fibrés vectoriels de classe $\mathcal{C}^\infty$, hermitiens de rangs respectifs (sur $\mathbf{C}$) 1 et r. Nous noterons $\mathcal{C}_q^\infty(M, F)$ l'espace des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda^q T^* M \otimes F$ (nous omettrons l'indice q lorsqu'il sera nul). Soit $d\sigma$, l'élément de volume riemannien de M ; les métriques considérées sur les fibres permettent de définir une norme quadratique

$$\|u\|^2 = \int_M |u|^2 d\sigma.$$

La fermeture pour cette norme de $\mathcal{C}_q^\infty(M, F)$ sera notée $L_q^2(M, F)$.

On appelle connexion D sur F un opérateur différentiel d'ordre 1 vérifiant, si $f \in \mathcal{C}_p^\infty(M, C)$ et $u \in \mathcal{C}_q^\infty(M, F)$

$$D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^p f \wedge Du.$$

Si (u, v) est l'accouplement sesquilinéaire canonique, la connexion D sera dite hermitienne si elle vérifie :

$$d(u, v) = (Du, v) + (-1)^{\deg u}(u, Dv).$$

L'opérateur D^2 est alors un opérateur de multiplication extérieure par une $2-$forme (appelée courbure de D et notée $c(D)$.)

Dans un ouvert U qui trivialise F, toute connexion s'écrit :

$$Du = du + \Gamma \wedge u$$
$$c(D) = (d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma)$$

si F est de rang 1, et si la connexion D est hermitienne, on aura $\Gamma = -iA$ où A est une $1-$forme *réelle*, et $c(D) = -idA$, $B = dA = ic(D)$ est le *champ magnétique* de la connexion D. Nous noterons $s = s(x)$ le rang de B en chaque point $x \in M$.

On peut toujours trouver un système de coordonnées sur U $(x_1, \ldots, x_m)$ tel que $(dx_1, \ldots, dx_m)$ soit un repère orthonormée de T^*M, et qui diagonalise B en un point x^0 de U : soit

$$B_{x^0} = \sum_{j=1}^{s(x^0)} B_j(x^0) dx_j \wedge dx_{j+s}.$$

Si D^* est l'adjoint de D, l'opérateur de Laplace-Beltrami (ou laplacien brut) associé à D est $\Delta = D^*D + DD^*$. Le laplacien riemannien usuel Δ_g correspond au cas où $F = \mathbf{C}$ est trivial, et $D = d$. L'opérateur Δ est elliptique (c'est un opérateur à symbole diagonal, dont chaque composante est le symbole principal de Δ_g). Soit E^k la $k-$ième puissance tensorielle du fibré E, D_k la connexion induite sur $F_k = E^k \otimes F$ par les connexions hermitiennes de E et F, et Δ_k le laplacien brut associé. Soit $V \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathrm{Herm}(F,F))$. Nous allons désormais étudier sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}\times M, F_k)$ l'opérateur de la chaleur suivant : $L_k = \frac{\partial}{\partial t} + \Box_k$ où $\Box_k = \frac{1}{k}\Delta_k - V$, avec l'abus de notation $V = \mathrm{id}_{E^k} \otimes V$. $\Box_k$ étant un opérateur elliptique pour tout k, l'opérateur $e^{-t\Box_k}$ existe et possède un noyau $e_k(t,x,y)$ dit *noyau de la chaleur.* Soit $V_0 = \sup_M \|V\|$, M étant compacte, on sait que $\Box_k$ admet un spectre discret $-V_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ et une base hilbertienne de sections propres correspondantes : $\psi_j \in \mathcal{C}^\infty(M, F_k)$. Le noyau de la chaleur est alors donné par la formule :

$$e_k(t,x,y) = \sum_{j\geqslant 1} e^{-t\lambda_j}\psi_j(x)\otimes\psi_j^*(y)$$

et admet les propriétés suivantes :

(1i) $e_k(t,x,y) \in \mathcal{C}^\infty\big(]0,+\infty[\times M \times M, \mathrm{Hom}(F_k,F_k)\big)$;

(1ii) $L_k e_k = 0$ où $\Box_k$ est appliqué à la première variable;

(1iii) $e_k(t,x,y) \to \delta_y$ (masse de Dirac) si $t \to 0$;

(1iv) $e_k(t,x,y) = e_k^*(t,y,x)$.

Les propriétés (1i–iii) *définissent* e_k.

Si Ω est un ouvert de M, et $\Box_{k,\Omega}$ est l'opérateur défini par $\Box_k$ sur Ω, avec condition de Dirichlet au bord, on aura de même, en notant $\bar{e}_{k,\Omega}$ le noyau de la chaleur associé :

(2i) $\bar{e}_{k,\Omega} \in \mathcal{C}^\infty\big(]0,+\infty[\times\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}, \mathrm{Hom}(F,F)\big)$

(2ii) $L_k\bar{e}_{k,\Omega} = 0$ à l'intérieur de Ω

(2iii) $\bar{e}_{k,\Omega}(t,\partial\Omega,y) = \{0\}$

(2iv) $\bar{e}_{k,\Omega} \xrightarrow[t\to 0]{} \delta_y$

Si $B = \sum_{j=1}^s B_j dx_j \wedge dx_{j+s}$ est la valeur du champ magnétique de la connexion D_E de E au point $x \in M$, le but de ce chapitre est le

Théorème 1. — *Lorsque $k \to +\infty$, on a l'équivalent*

$$e_k(t,x,x) \sim \frac{k^{\frac{m}{2}} e^{tV(x)}}{(4\pi)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}-s}} \prod_{j=1}^s \frac{B_j(x)}{sh\, B_j(x)t}$$

uniformément par rapport à $(x,t) \in M \times [t_0,t_1] \subset M\times]0,+\infty[$.

Nous étudierons, en outre, le cas suivant pour le chapitre II :

Théorème 2. — *Soit* $\mathbf{e}^0(t,x) = \frac{e^{tV(x)}}{(4\pi)^{\frac{m}{2}} t^{\frac{m}{2}-s}} \prod_{j=1}^s \frac{B_j(x)}{\mathrm{sh}\, B_j(x)t}$. *Il existe*

$\varepsilon > 0$ *tel que, sur l'ensemble* $\{V(x) - \sum_{j=1}^{s} B_j(x) \leqslant 0\}$, *on ait*

$$\left|\frac{e_k(t,x,x)}{k^{\frac{m}{2}}} - \mathbf{e}^0(t,x)\right| \leqslant C\mathbf{e}^0(t,x)k^{-1/5}$$

pour tout $t \in]0, k^{\varepsilon}]$ *et* $k \geqslant k_0$.

La méthode que nous suivons est analogue dans le principe à celle des articles [2], [3], mais très différente par ses détails : nous montrons avant tout que le problème est local (*i.e.* $e_k(t,x^0,x^0) \sim \bar{e}_{k,\Omega}(t,x^0,x^0)$ où Ω est un voisinage quelconque de x^0) ceci grâce à une comparaison entre e_k et le noyau de la chaleur associé à Δ_g déduite de l'inégalité de Kato. Ensuite, nous utilisons un calcul explicite du noyau e_k^0 associé à l'opérateur $\Box_k^0$ (*i.e.* $\Box_k$ figé en x^0). Enfin, nous vérifions que la différence entre e_k et e_k^0 est négligeable devant e_k^0, lorsque l'on réduit le domaine à des boules dont le rayon tend vers 0.

Soit B_r, une boule de centre x^0 et de rayon r, et qui soit un ouvert de carte pour M, et soit $\overline{V_r} = \sup_{x\in B_r} \|V(x)\|$.

Proposition 1 (Principe de localisation pour $e_k(t,x,y)$). — *Il existe des constantes* c_1 *et* $\varepsilon_1 > 0$ *telles que l'on ait, pour tout* $t \in \left]0, \min\left(k\varepsilon_1, \frac{kr^2}{2m}\right)\right]$ *et tout* $x^0 \in M$:

$$|e_k(t,x^0,x^0) - \bar{e}_{k,B_r}(t,x^0,x^0)| \leqslant C_1 \frac{k^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{kr^2}{4t} + 2t\overline{V_r}}$$

La proposition 1 est une conséquence du

Lemme 1. — *Soit* $d(x,y)$, *la distance géodésique sur* (M,g) *de* x *à* y. *On a pour tout* $t \in]0, k\varepsilon_1]$ *et pour tout* $(x,y) \in M^2$:

$$|e_k(t,x,y)| \leqslant C_1 \frac{k^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{m}{2}}} e^{-k\frac{d(x,y)^2}{4t} + t\overline{V_r}}.$$

Pour voir ceci, appelons $e_g(\tau,x,y)$ le noyau de la chaleur associé à l'opérateur Δ_g, et $\hat{e}_k(\tau,x,y)$ le noyau de la chaleur associé à $k\Box_k = \Delta_k - kV$. L'inégalité de Kato s'écrit pour Δ_k de la façon suivante :

$$\text{si } u \in \mathcal{C}^{\infty}(B_r, F_k), \quad \langle \Delta_k u, u\rangle \geqslant |u|\Delta_g|u| \tag{$*$}$$

et, par suite :

$$\langle k\Box_k, u, u\rangle \geqslant |u|(\Delta_g - k\overline{V_r}|u|).$$

Cette inégalité a pour conséquence la relation de domination entre les semi-groupes associés (*cf.* Hess-Schrader-Uhlenbock [5] ou Simon [10]) qui donne ponctuellement :

$$|\hat{e}_k(t,x,y)| \leqslant \operatorname{rg} F\, e^{k\overline{V_r}} e_g(\tau,x,y). \tag{3}$$

Mais $e_g(\tau,x,y)$ admet le développement asymptotique (*cf.* Minakshisundaran-Pleijel [9]) au voisinage de $\tau = 0$:

$$e(\tau,x,y) \sim u_0\,(4\pi\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4\tau}},$$

ce qui implique

$$\text{(4)} \qquad \text{pour tout } \tau \leqslant \varepsilon, \quad e_g(\tau,x,y) \leqslant u_1\,(4\pi\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4\tau}}.$$

Le lemme 1 est alors le résultat des majorations (3) et (4) où l'on a posé $\tau = \frac{t}{k}$. □

Démonstration de la proposition 1. — Soit φ, une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans B_r. Définissons :

$$\psi(t,x) = \int_{B_r} (\bar{e}_{k,B_r} - e_k)\,\varphi.$$

Cette fonction vérifie (d'après (1ii–iii) et (2ii–iv)) :

$$\text{(5}i\text{)} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} + \Box_k\psi = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\times B_r$$

$$\text{(5}ii\text{)} \qquad \psi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Or, d'après l'inégalité de Kato, $e^{-t\overline{V}_r}|\psi|$ doit vérifier le principe du maximum pour l'opérateur de la chaleur[(1)] On a donc :

$$\begin{aligned}|\psi(t,x^0)| &\leqslant e^{t\overline{V}_r} \sup_{(\tau,x)\in[0,t]\times\partial B_r} |\psi| \\ &\leqslant C_1 \frac{k^{\frac{m}{2}}}{t^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{ka_0}{t}d^2(\operatorname{supp}\varphi,\partial B_r)+2t\overline{V}_r}\|\varphi\|_1\end{aligned}$$

si $t \leqslant \frac{2}{m}\,k\,a_0\,d^2(\operatorname{supp}\varphi,\partial B_r)$.

La proposition 1 est la limite de cette majoration lorsque φ tend vers la masse de Dirac au point x_0. □

Définissons maintenant l'opérateur $\Box_k^0$ comme $\Box_k$ gelé en x^0, c'est-à-dire que :

(1) En effet, si l'on remarque que $\langle\frac{\partial}{\partial t}\psi,\psi\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = |\psi|\frac{\partial}{\partial t}|\psi|$, l'inégalité de Kato $(*)$ implique :

$$\langle L_k,\psi,\psi\rangle \geqslant |\psi|(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k}\Delta_g - \overline{V}_r)|\psi|,$$

d'où

$$(**) \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k}\Delta_g - \overline{V}_r\Big)|\psi| \leqslant 0,$$

ce qui équivaut à

$$(**)' \qquad \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{k}\Delta_g\Big)\, e^{-t\overline{V}_r}|\psi| \leqslant 0.$$

La fonction $e^{-t\overline{V}_r}|\psi|$ atteint par conséquent son maximum sur $\{0\}\times B_r \cup [0,t]\times\partial B_r$. (*cf.* par exemple Folland, G.-B., *Introduction to partial differential equations*, Princeton Univ. Press (1976)).

• la courbure de E est constante : $\square = \sum_{j=1}^{s} B_j dx_j \wedge dx_{j+s}$ soit, dans une trivialisation *adhoc* : $A = \sum_{j=1}^{s} B_j x_j dx_{j+s}$,

• D_F est plate,

• l'espace ambiant est $\mathbf{R}^m$ muni de la métrique constante $g^0 = \Sigma dx_j \otimes dx_j$,

• V est constante, et diagonale dans un repère e_λ de F :

$$\langle V_{u,u} \rangle = \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant r} V_\lambda |u_\lambda|^2 \quad \text{si } u = \sum_{\lambda=1}^{r} u_\lambda \otimes e_\lambda.$$

On calcule alors directement la valeur du noyau de la chaleur associé (*cf.* Demailly [4]) :

$$(6)\, e_k^0(t,x,y) = \prod_{j=1}^{s} \frac{kB_j}{4\pi sh\, B_j t} \exp\Big(\frac{-kB_j}{4} \coth B_j t \big((x_j - y_j)^2 + (x_{j+s} - y_{j+s})^2 \big) + \frac{i}{2} k B_j (x_j + y_j)(x_{j+s} - y_{j+s}) \Big) \times e^{tV} \big(\frac{k}{4\pi t} \big)^{\frac{m-2s}{2}} \exp\Big(-k \sum_{j>2s} (x_j - y_j)^2 / 4t \Big).$$

La proposition 1 nous autorise à modifier $\square_k$ hors d'une boule sans que cela modifie l'équivalent recherché : nous allons nous y prendre de la façon suivante : soit $B_k = B_{r_k}$ la boule de centre x^0 et de rayon $r_k = k^{-5/12}$, resp. B'_k la boule de même centre et de rayon $2r_k$ (de façon à ce que $k\ r_k^2 \to +\infty$ et $k\ r_k^3 \to 0$), nous construisons un opérateur $\widetilde{\square}_k$ qui coïncide avec $\square_k$ sur B_k, et avec $\square_k^0$ sur $\mathbf{R}^m \setminus B'_k$ (si χ est une fonction troncante valant 1 sur B_k, et 0 hors de B'_k, on peut définir $\widetilde{\Delta}_k$ comme le laplacien associé à la connexion $\widetilde{D}_k = \chi D_k + (1-\chi) D_k^0$, de forme $k\widetilde{A}_k = k\chi A + k(1-\chi)A_0 + \chi A_F$ où A_F est la forme de la connexion D_F, lorsque la variété est munie de la métrique $\tilde{g} = \chi g + (1-\chi) g^0$; de même $\widetilde{V} = \chi V + (1-\chi) V(x^0)$).

Le calcul direct donne :

$$\Delta_k u = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_e} \Big(g^{j\ell} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big) + ik \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{A}_\ell\, g^{j\ell} + ik \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_\ell} (A_j g^{j\ell} \sqrt{\det g}\, u) + k^2 |A|^2$$

d'où l'estimation :

$$(7) \quad \widetilde{\square}_k - \square_k^0 = \begin{cases} 0\Big(\frac{|x-x^0|}{k} \nabla^2 + \big(\frac{1}{k} + |x-x^0|^2 \big) \nabla + |x-x^0| + k|x-x^0|^3 \Big) \\ 0 \text{ hors de } B'_k \end{cases}$$

si l'on a choisi A de sorte que

$$|A(x) - A(x^0)| \leqslant C_2 |x - x^0|^2 \qquad (\textit{cf. } [3], \text{ lemme } 2.10)$$

Proposition 2. — *On a l'équivalent suivant, lorsque k tend vers $+\infty$: $\tilde{e}_k(t,x^0,x^0) \sim e^0_k(t,x^0,x^0)$ uniformément pour $t \in [t_0,t_1] \subset]0,+\infty[$.*

D'après le lemme 1, et les propriétés (1i–v) de $\tilde{e}_k$ et e^0_k, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_k(t,x,y) - e^0_k(t,x,y) &= \int_{\mathbf{R}^m} e^0_k(0,z,y)\, \tilde{e}_k(t,x,z)dz - \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{e}_k(0,x,z)\, e^0_k(t,z,y)dz \\
&= \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{e}_k(\tau,x,z)\, e^0_k(t-\tau,z,y)dz \\
&= -\int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \big\{ \widetilde{\Box}^*_k \tilde{e}_k(\tau,x,z)\, e^0_k(t-\tau,z,y) \\
&\qquad\qquad - \tilde{e}_k(t,x,z)\, \Box^0_k(e^0_k(t-\tau,z,y) \big\} dz \\
&= -\int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \tilde{e}_k(\tau,x,z)\, (\widetilde{\Box}_k - \Box^0_k)_z e^0_k(t-\tau,z,y)dz \\
&= -\int_0^t d\tau \int_{B'_k} \tilde{e}_k(\tau,x,z)\, (\widetilde{\Box}_k - \Box^0_k)_z e^0_k(t-\tau,z,y)dz.
\end{aligned}$$

Posons $f_k(t,x,y) = (\widetilde{\Box}_k - \Box^0_k) e^0_k(t,x,y)$, et notons la dernière égalité $\tilde{e}_k - e^0_k = \tilde{e}_k \sharp f_k$. Nous sommes donc conduits à la somme formelle :

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_k &= e^0_k + e^0_k \sharp f_k + \cdots + e^0_k \sharp f_k \sharp \ldots \sharp f_k + \cdots \\
&= \sum_{p \geqslant 0} e^0_k \sharp f_k^{\sharp p}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Lemme 2. — *La somme de Lévi (8) converge vers $\tilde{e}_k$.*

Nous allons tout d'abord donner une estimation de f_k en combinant l'estimation (7) avec l'expression (6) :

$$|\nabla e^0_k(t,z,y)| \leqslant C_5 \Big(\Big(\frac{k}{t}|z-y| \Big) + k(|z|+|y|) \Big) |e^0_k(t,z,y)|$$

$$|\nabla^2 e^0_k(t,z,y)| \leqslant C_6 \Big(\frac{k}{t} + k + \frac{k^2}{t^2}|y-z|^2 + k^2\big(|y|+|z|\big)^2 + \frac{k^2}{t}|y-z|(|y|+|z|) \Big) |e^0_k|$$

d'où,

$$|f_k(t,z,y)| \leqslant C_7 \Big(\frac{k|z-y|^3}{t^2} + \frac{|z-y| + k|z-y|^2}{t} + k r_k^3 + r_k^2 \Big)\, |e^0_k(t,z,y)|.$$

Comme $r_k = k^{-5/12}$ et $x^p e^{-\alpha x}$ est une fonction bornée sur $\mathbf{R}^+$ pour tout $p \geqslant 0$ et $\alpha > 0$, il vient, pour un $a_0 > 0$, et k assez grand :

$$|f_k(t,z,y)| \leqslant C_8 \frac{k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{t}} e^{t\overline{V}_r}\, t^{-\frac{m}{2}} e^{\frac{-a_0 k|z-y|^2}{t}}, \tag{9}$$

d'où

$$|e_k^0 \sharp f_k(t,x,y)| \leqslant C_9 k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} e^{t\overline{V}_r} \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^m} \tau^{-\frac{m+1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-a_0 k\left(\frac{|z-y|^2}{\tau}+\frac{|z-x|^2}{t-\tau}\right)} dz$$

Or, par un calcul direct, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^m} \tau^{-\frac{m+1}{2}} (t-\tau)^{-\frac{m}{2}} e^{-a_0 k\left(\frac{|z-y|^2}{\tau}+\frac{|z-x|^2}{t-\tau}\right)} dz = \left(\frac{\pi}{a_0}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{(kt)^{-\frac{m}{2}}}{\sqrt{\tau}} e^{-a_0 k \frac{|x-y|^2}{t}}$$

et, par conséquent :

$$(10) \qquad \begin{cases} |e_k^0 \sharp f_k(t,x,y)| \leqslant C_{10}^2 k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} e^{t\overline{V}_r} \dfrac{t^{-\frac{m+1}{2}}}{2} e^{\frac{-a_0 k}{t}|x-y|^2} \\ \cdots \\ |\underbrace{e_k^0 \sharp \cdots \sharp}_{(p \text{ fois})} f_k(t,x,y)| \leqslant C_{10}^p k^{\frac{m}{2}-\frac{p}{4}} e^{t\overline{V}_r} \dfrac{t^{-\frac{m-1}{2}+p}}{p!} e^{\frac{-a_0 k}{t}|x-y|^2} \end{cases}$$

(11 i) si bien que la série (8) converge ainsi que toutes ses dérivées sur tout compact de $]0,+\infty[\times\mathbf{R}^{2m}$. Cela établi, les propriétés (1 ii–iii) en découlent rapidement :

(11 ii) pour tout $b \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbf{R}^{2m}, \mathrm{Hom}(F,F))$, on a les relations :

$$\frac{\partial}{\partial t}(e_k^0 \sharp b) = -b - \square_k^0 (e_k^0 \sharp b) \qquad \text{et} \qquad f_k \sharp b = (\widetilde{\square}_k - \square_k^0)(e_k^0 \sharp b)$$

où la dérivation porte sur x. Il vient donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(e_k^0 + e_k^0 \sharp f_k + \cdots) &= -\square_k^0 e_k^0 - (\widetilde{\square}_k - \square_k^0) e_k^0 - (\widetilde{\square}_k - \square_k^0) e_k^0 \sharp f_k - \square_k^0 e_k^0 - \cdots \\ &= -\widetilde{\square}_k (e_k^0 + e_k^0 \sharp f_k + \cdots). \end{aligned}$$

(11 iii) On a $e_k^0(0,x,y) = \delta_x(y)$ et, d'après (10) :

$$(12) \qquad |\tilde{e}_k - e_k^0| \leqslant k^{\frac{m}{2}} t^{-\frac{m-1}{2}} e^{t\overline{V}_r} \Big(\exp(C_{10} \frac{t}{k^{1/4}}) - 1\Big) e^{-\frac{a_0 k}{t}|x-y|^2}$$

où le second membre tend vers 0 dans $L^1(]0,+\infty[)$ lorsque t tend vers 0.

Le lemme 2 est donc démontré en vertu de l'unicité du noyau de la chaleur (cela parce que la série $\tilde{e}_k$ est intégrable sur $\mathbf{R}^m$). On pourra d'ailleurs remarquer que notre démonstration du lemme 2 est identique à celle de Mac Kean et Singer [8], car nous avons ici utilisé une majoration de $|e_k^0|$ indépendante de B (*cf.* lemme 1). □

Il est clair que le lemme 2 et la proposition 1 impliquent le théorème 1 grâce à la majoration (12).

Démonstration du théorème 2. — Il suffit d'obtenir un ordre de convergence plus précis que celui donné par (12) pour la somme de Lévi de $\tilde{e}_k$, en (x^0, x^0).

Pour cela, observons tout d'abord que les estimations utilisées pour la majoration (9) conduisent en fait à
(13)
$$|f_k(t,z,y)| \leqslant C_{11}\frac{k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}}{\sqrt{t}}e^{t\overline{V}_r}\prod_{j=1}^{2s}\frac{\sqrt{B_j}\,e^{-a_0kB_j\coth\,B_jt|y_j-z_i|^2}}{\sqrt{\operatorname{sh}B_jt}}\times\prod_{j>2s}\frac{e^{-\frac{a_0k}{t}|y_j-z_j|^2}}{\sqrt{t}}.$$

Dans les calculs qui suivent, nous aurons pour convention $B_j = B_{j-s}$ si $j \in \{s+1,\dots,2s\}$. Par conséquent, il vient
(14)
$$|e_k^0\sharp f_k(t,x^0,x^0)| \leqslant C_{12}k^{m-\frac{1}{4}}e^{t\overline{V}_r}\int_0^t d\tau\int_{\mathbf{R}^m}\prod_{j=1}^{2s}\frac{B_je^{-a_0kB_j(\coth\,B_j\tau+\coth\,B_j(t-\tau))|z_j-x_j^0|^2}}{\sqrt{\operatorname{sh}B_j\tau\operatorname{sh}B_j(t-\tau)}}$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{\tau}}\times\prod_{j>2s}\frac{e^{a_0k(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{t-\tau})|z_j-x_j^0|^2}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}$$
Pour $j > 2s$, un calcul déjà explicité donne :
$$\int_{\mathbf{R}}\frac{e^{-a_0k\frac{t}{(t-\tau)t}|z_j-x_j^0|^2}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}dz_j = \sqrt{\frac{\pi}{ka_0t}}$$
et, pour $1 \leqslant j \leqslant 2s$, on aura :
$$\int_{\mathbf{R}}\frac{B_je^{-a_0kB_j(\coth\,B_j\tau+\coth\,B_j(t-\tau))|z_j-x_j^0|^2}}{\sqrt{\operatorname{sh}B_j\tau\operatorname{sh}B_j(t-\tau)}}dz_j = \sqrt{\frac{\pi B_j}{a_0k}}\times\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}B_jt}}.$$
Si bien que, d'après (14) :

(15)
$$\begin{cases} |e_k^0\sharp f_k(t,x^0,x^0)| \leqslant C_{13}k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}e^{t\overline{V}_r}\displaystyle\prod_{j=1}^{s}\frac{B_j}{\operatorname{sh}B_jt}\frac{t^{s-\frac{m}{2}+1}}{2} \\ \dots \\ |e_k^0\underbrace{\sharp\cdots\sharp}_{(p\text{ fois})}f_k(t,x^0,x^0)| \leqslant C_{13}^pk^{\frac{m}{2}-\frac{p}{4}}e^{t\overline{V}_r}\displaystyle\prod_{j=1}^{s}\frac{B_j}{\operatorname{sh}B_jt}\frac{t^{s-\frac{m}{2}+p}}{(p+1)!}\end{cases}$$
Nous aboutissons pour finir à la majoration suivante :
$$\begin{aligned}|\tilde{e}_k - e_k^0| &\leqslant \left(e^{C_{13}t/k^{1/4}}-1\right)k^{\frac{m}{2}}e^{t\overline{V}_r}\,t^{s-\frac{m}{2}}\prod_{j=1}^{s}\frac{B_j}{\operatorname{sh}B_jt}\\ &\leqslant C_{14}k^{\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}\,t^{s-\frac{m}{2}+1}e^{t\overline{V}_r}\prod_{j=1}^{s}\frac{B_j}{\operatorname{sh}B_jt}\quad\text{si } t\leqslant k^{1/4}\\ &\leqslant C_{15}k^{-\frac{1}{4}}t\,e^{C_{16}tr_k}|e_k^0(t,x^0,x^0)|.\end{aligned}$$

Comme $r_k = k^{-5/12}$, et comme $\varepsilon = \frac{1}{12}$ est l'ordre critique dans ce cas pour la validité du principe de localisation (proposition 1), le théorème 2 est conséquence de cette dernière majoration, avec $\varepsilon < \frac{1}{12}$ car, en utilisant les notations du théorème 2, $\left|\frac{e_k^0(t,x^0,x^0)}{k^{\frac{m}{2}}}\right| = \mathbf{e}_k^0(t,x)$ est une fonction bornée de t et de k si x^0 vérifie $V(x^0) - \sum_{j=1}^s B_j(x^0) \leqslant 0$. □

2. Fonction de distorsion d'un fibré ample

Nous revenons à la variété complexe X présentée dans l'introduction. Le laplacien $\frac{2}{k}\Delta_k''$ sur les $(0,q)$−formes à valeurs dans L^k peut être calculé comme un opérateur de type $\square_k$ sur $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes L^k$. (*cf.* par exemple [3]), avec $B = -ic(L)$, et, si l'on se place dans un système de coordonnées pour lequel on a : $ic(L) = i\sum_{j=1}^s \alpha_j dz_j \wedge d\overline{z}_j$ (ici, $s = n$ et $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \ldots$), V est l'endomorphisme de $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes L$ diagonal dans la base $(d\,\overline{z_J}\,,\ |J|{=}q)$, et de valeurs propres associées $(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)$ avec la convention $\alpha_J = \sum_{j\in J}\alpha_j$.

Comme de plus on a toujours $\alpha_{\complement J} - \alpha_J - \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leqslant 0$, le théorème 2 s'applique dans ce cas. On a, par conséquent, le

Corollaire 1. — *Le noyau de la chaleur associé à $e^{-\frac{2t}{k}\Delta_k''}$ en bidegré $(0,q)$ admet l'équivalent suivant lorsque k tend vers $+\infty$:*

$$e_k^{(0,q)}(t,x,x) = \frac{\sum_{|J|=q} e^{t(\alpha_{\complement J}-\alpha_J)}}{(4\pi)^n}\prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j(x)}{\operatorname{sh}\alpha_j(x)t}\big(k^n + o(k^n)\big)$$

uniformément pour $x \in X$, $t \in [t_0, k^\varepsilon]$.

Nous avons désormais en main les outils nécessaires pour attaquer la preuve du théorème principal (on notera en particulier la forme forte de l'uniformité par rapport aux différents paramètres donnée par le théorème 2, et qui sera utilisée dans toute sa force pour la formule (B) ci-dessous).

Soit $N(k) = \dim V_k$ le nombre de sections holomorphes globales indépendantes pour la norme L^2 de X, et soit $(s_1, \ldots, s_{N(k)})$, une base orthonormée de V_k pour cette norme. Pour $k \geqslant k_0$ cette base réalise le plongement de X dans $\mathbb{P}(V_k^*)$ et, par conséquent la métrique de Fubini-Study s'écrit, pour $\xi \in L_x^k$

$$|\xi|_{F-S}^2 = \frac{|\xi|^2}{|s_1(x)|^2 + \cdots + |s_{N(k)}(x)|^2}.$$

Nous appellerons b_k la fonction de distorsion entre ces deux métriques c'est-à-dire , si $\xi \neq 0$:

$$b_k(x) = \frac{|\xi|^2}{|\xi|_{F-S}^2} = |s_1(x)|^2 + \cdots + |s_{N(k)}(x)|^2.$$

Cette expression est exactement le terme correspondant à la valeur propre 0 dans l'expression du noyau de la chaleur pour $\frac{2}{k}\Delta_k''$, en bidegré $(0,0)$:

$$e_k^{(0,0)}(t,x,x) = \sum_{j=1}^{+\infty} e^{-\frac{2\lambda_j^k t}{k}}|\psi_j(x)|^2,$$

et l'équivalent donné par le théorème principal est la limite pour $t \to +\infty$ du second terme du corollaire 1 (en bidegré $(0,0)$, $J = \emptyset$ et, par conséquent, $\frac{\exp(t\Sigma_{j=1}^n \alpha_j)}{\Pi_{j=1}^n \operatorname{sh} a_j t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$). Il ne reste donc plus qu'à vérifier à l'aide du théorème 2 que le reste $(e_k - b_k)$ tend vers 0 lorsque $t = k^\varepsilon$ tend vers $+\infty$.

Tout d'abord, observons que le corollaire 1 implique :

$$e_k^{(0,0)}(t,x,x) \leqslant C_0 k^n \big(\frac{1}{t^n} + 1\big) \quad \text{si } t \leqslant k^\varepsilon$$

et, par conséquent, pour tout $j \in \mathbf{N}$:

$$(A) \qquad |\psi_j(x)|^2 \leqslant C_0 k^n e^{\frac{t\lambda_j^k}{k}} \Big(1 + \frac{2^n}{t^n}\big).$$

Maintenant, observons que, si ψ_j est une section propre de Δ_k'' associée à la valeur propre $\lambda_j^k, D''\psi_j$ est une $(0,1)-$forme propre (non nulle) pour la même valeur propre. On a par conséquent :

$$\sum_{j \geqslant N(k)+1} e^{-\frac{2t\lambda_j^k}{k}} \frac{|D''\psi_j(x)|^2}{\|D''\psi_j\|^2} \leqslant e_k^{(0,1)}(t,x,x) \leqslant C_1 k^n \big(\frac{1}{t^n} + 1\big) e^{-2\alpha_1 t}$$

(α_1 est la plus petite valeur propre de $ic(L)$, minorée sur X par $\alpha_0 > 0$) d'où, en intégrant sur X :

$$(B) \qquad \sum_{j \geqslant N(k)+1} e^{-\frac{2t\lambda_j^k}{k}} \leqslant C_2 k^n \big(1 + \frac{1}{t^n}\big) e^{-2\alpha_0 t} \quad \text{si } t \leqslant k^\varepsilon$$

En composant les majorations (A) et (B), il vient donc :

$$\begin{aligned} |e_k^{(0,0)}(t,x,x) - b_k(t,x,x)| &\leqslant C_0 k^n \big(1 + \frac{2^n}{t^n}\big) \sum_{j \geqslant N(k)+1} e^{-\frac{t\lambda_j^k}{k}} \\ &\leqslant C_3 k^{2n} \big(1 + \frac{1}{t^{2n}}\big) e^{-\alpha_0 t}. \end{aligned}$$

Cette majoration achève la preuve du théorème principal.

Bibliographie

[1] BISMUT J.-M. — *Demailly's asymptotic inequalities : a heat equation proof*, J. Funct. Anal., **72** (1987), 263–278.

[2] BOUCHE TH. — Inégalités de Morse holomorphes pour un fibré linéaire à courbure dégénérée, à paraître, Prépublication de l'Institut Fourier,**142**, Grenoble(1990).

[3] DEMAILLY J.-P. — *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d"-cohomologie*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **35** (1985), 189–229.

[4] DEMAILLY J.-P. — Holomorphic Morse Inequalities, (Lectures given at the AMS Summer Institute, July 1989, to appear).

[5] Hess H., Schrader R., Uhlenbock D.A. — *Kato's inequality and the spectral distribution of Laplacians on compact Riemannian manifolds*, J. Differential Geom., **15** (1980), 27–38.

[6] Ji S. — *Inequality for distortion function of invertible sheaves on Abelian varieties*, Duke Math. J., vol. 58, **3** (1989), 657–667.

[7] Kempf G. — Metric on invertible sheaves on Abelian varieties, Preprint 88.

[8] Mac Kean H.P.Jr., Singer I.M. — *Curvature and the eigenvalues of the laplacian*, J. Differential Geom., **1** (1967), 43–69.

[9] Minakshisundaran S., Pleijel Å. — *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace Operator on Riemannian manifolds*, Can. J. Math., **1** (1949), 242–256.

[10] Simon B. — *Kato's inequality and the comparison of semi-groups*, J. Funct. Anal., **32** (1979), 97–101.

[11] Tian G. — *Kähler metrics on algebraic manifolds*, Ph. D. Thesis, Harvard University, 57 p., 1988.

— ◇ —

Chapitre IV

La cohomologie coeffective d'une variété symplectique

0. Introduction

Soit X une variété différentielle de dimension $2n$. Cette variété est dite symplectique si elle admet une 2-forme alternée non dégénérée de classe $\mathcal{C}^\infty$ fermée ; nous noterons σ une telle forme. Soit Ω^q le faisceau des germes de q-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X, pour tout entier q , $0 \leqslant q \leqslant 2n$. Nous définissons alors, sur tout ouvert U de X, les faisceaux $\mathcal{A}^q$ des germes de q-formes coeffectives de la façon suivante :

$$\mathcal{A}^q(U) = \big\{u \in \Omega^q(U) \ : \ \sigma \wedge u = 0\big\}.$$

Du fait que la forme σ est fermée, la suite de faisceaux

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}^q \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{q+1} \longrightarrow \cdots$$

est un sous-complexe du complexe de de Rham de la variété X. Notre principal résultat est un analogue du Lemme de Poincaré pour ce complexe : sa cohomologie – que nous appellerons cohomologie coeffective locale de X – est nulle en degré différent de n. Par ailleurs, nous donnons une estimation du groupe non nul $H^n(\mathcal{A}^\bullet)$, et démontrons l'ellipticite de ce complexe en degré $\geqslant n+1$. Nous étudions enfin les rapports de cette cohomologie avec la cohomologie de de Rham, plus spécialement si X est une variété kählérienne.

1. Les groupes $H^q(\mathcal{A}^\bullet)$

1.1. Préliminaires. — Soit x^0 un point de X. Il existe un voisinage ouvert contractile U de x^0, muni de coordonnées locales centrées en x^0, $(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ de sorte que σ s'écrive :

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge d\xi_j \ ; \quad \text{voir par exemple [H].}$$

On appelle ces coordonnées des coordonnées symplectiques.

En posant $\zeta_j = x_j + i\xi_j$ (où $i = \sqrt{-1}$, on voit que U est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$, muni de la forme kählérienne canonique

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j \simeq \sigma.$$

Nous définissons L, l'opérateur de multiplication extérieure par σ, Λ son adjoint dans la métrique kählérienne définie par ω.

La formule de Lepage (décomposition en formes effectives ou primitives, cf. [W]) au-dessus de U :

$$\Lambda^q T^* X = \bigoplus_{r \geqslant (q-n)_+} L^r(\ker \Lambda \cap \Lambda^{q-2r} T^* X),$$

donne par dualité :

$$\Lambda^q T^* X = \bigoplus_{r \geqslant (q-n)_+} \Lambda^r(\ker L \cap \Lambda^{q+2r} T^* X). \tag{1}$$

En outre, Λ étant injective en degré $\geqslant n+1$, et surjective en degré $\leqslant n+1$, L est surjective en degré $\geqslant n-1$, bijective en degré $n-1$, injective en degré $\leqslant n-1$. La formule (1) permet de calculer le rang du fibré vectoriel $\ker L \cap \Lambda^q T^* X$ au-dessus de U. En effet,

$$(1) \Longleftrightarrow \Lambda^q T^* X = (\ker L \cap \Lambda^q T^* X) \oplus \Lambda(\Lambda^{q+2} T^* X) \quad \text{si } q \geqslant n,$$

donc

$$\operatorname{rang}(\ker L \cap \Lambda^q T^* X) = \begin{cases} C_{2n}^q - C_{2n}^{q+2} & \text{si } q \geqslant n, \\ 0 & \text{si } q \leqslant n-1. \end{cases}$$

Comme $\mathcal{A}^q(U) = \mathcal{C}^\infty(\ker L \cap \Lambda^q T^* X)(U)$, c'est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty(X)$-modules libres de rang $(C_{2n}^q - C_{2n}^{q+2})$ si $q \geqslant n$, nul sinon.

1.2. Le cas $q \neq n$.

Théorème 1. — *$H^q(\mathcal{A}^\bullet) = 0$ si $q \neq n$.*

Démonstration. —

- Le cas $q \leqslant n-1$ est trivial vu la nullité du faisceau $\mathcal{A}^q$.
- Le cas $q \geqslant n+1$. Soit v, un cocycle de $\mathcal{A}^q(U)$. Comme q est différent de zéro, et U est supposé contractile, le lemme de Poincaré nous assure qu'il existe une $(q-1)$-forme w' de $\Omega^{q-1}(U)$ vérifiant :

$$dw' = v.$$

De plus, $d(Lw') = Ldw' = Lv = 0$, (car $d\sigma = 0$), donc, par le même argument,

$$\exists w'' \in \Omega^q(U) \;:\; Lw' = dw''.$$

Comme L est surjective en degré $\geqslant n-1$ et comme $q-2 \geqslant n-1$, il existe $w''' \in \Omega^{q-2}(U)$ telle que $w'' = Lw'''$.

Considérons maintenant $w = w' - dw'''$. D'une part,

$$dw = dw' = v.$$

D'autre part,

$$Lw = Lw' - Ldw = Lw' - dw'' = 0. \qquad \blacksquare$$

1.3. Le cas $q = n$.

Théorème 2. — $H^n(\mathcal{A}^\bullet) \simeq dL^{-1}d(\mathcal{A}^n)$.

Démonstration. — Par définition, on a :

$$\Gamma(H^n(\mathcal{A}^\bullet, U) \simeq \{v \in \mathcal{A}^n(U) \ : \ dv = 0\}.$$

La construction du § 2 donne de même :

(i) $$\exists w' \in \Omega^{n-1}(U) \ : \ v = dw'$$

(ii) $$\exists w'' \in \Omega^n(U) \ : \ Lw' = dw''$$

Or L est bijective en degré $n-1$, donc

$$\begin{aligned}(\text{ii}) &\iff w' = L^{-1}dw'' \\ &\iff v = dL^{-1}dw''.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $H^n(\mathcal{A}^\bullet) \subset dL^{-1}d\Omega^n(U)$, mais l'inclusion inverse est évidente car, si $u \in \Omega^n(U)$, on a :

$$d(dL^{-1}du) = 0 \quad \text{et} \quad LdL^{-1}du = dLL^{-1}xdu = d^2u = 0.$$

Pour obtenir le théorème 2, comme $L(\Omega^{n-2}(U)) \subset \ker dL^{-1}d$, il suffit de vérifier le

Lemme 1. — $\Omega^n(U) \simeq \mathcal{A}^n(U) \oplus L(\Omega^{n-2}(U))$.

En effet, si $v \in \Omega^{n-2}(U)$, $dL^{-1}dLv = dL^{-1}dv = d^2v = 0$.

Preuve du lemme. — Soit $w \in \Omega^n(U)$. En tout point x de U, w_x admet la décomposition de Lepage suivante :

$$w = w_{0x} + \sum_{r\geqslant 1} \Lambda^r w_{rx} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Lw_r = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant [n/2], \\ \text{et } \deg w_r = n + 2r. \end{cases}$$

D'autre part, on a d'après [W] les relations de commutations classiques :

(iii) $$[L, \Lambda^r]u = r(q - r - n + 1)\Lambda^{r-1}u \quad \text{pour tout } u \in \Omega^q(U)$$

donc

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{r=1}^{[n/2]} \Lambda^{r+1} \frac{1}{r(r+l)} v_r\right) &= \sum_{r=1}^{[n/2]} \frac{(r+1)(n+2r-r-1-n+1)}{r(r+l)} \Lambda^r w_r \\ &= w - w_0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $w - w_0 \in \operatorname{Im} L$. Enfin, le fait que la somme soit directe provient de l'unicité de la décomposition de Lepage.

Remarque. — Si la variété X est kählérienne, l'opérateur $dL^{-1}d$ a une écriture qui nous semble plus familière et permet de mieux le saisir : si $w \in \mathcal{A}^n(U)$, $dw \in \mathcal{A}^{n+1}(U)$ et, par (iii) :

$$L\Lambda dw = [L, \Lambda]dw = dw$$

donc

$$dL^{-1}dw = dL^{-1}L\Lambda dw = d\Lambda dw = d[\Lambda, d]w = -d(d^c)^*w$$

où $(d^c)^*$ est l'adjoint de l'opérateur $d^c = i(d'' - d')$. La dernière relation de commutation est également démontrée dans [W]. Il est à noter que $(d^c)^*$ n'est autre que l'opérateur δ introduit par J.-L. Koszul sur une variété symplectique quelconque, et qui permet de définir l'homologie, dite canonique d'une telle variété, étudiée récemment par J.-L. Brylinski [B] : $\cdots \longrightarrow \Omega^q(X) \xrightarrow{\delta} \Omega^{q-1}(X) \longrightarrow \cdots$. Il semble donc qu'il y ait un lien assez étroit dans l'étude de ces deux complexes.

2. Ellipticité du complexe $d : \mathcal{A}^\bullet$

Le symbole de l'opérateur différentiel d est l'application qui, à tout élément ζ du fibré cotangent à X associe l'opérateur produit extérieur par ζ sur le faisceau considéré. Par conséquent, le complexe $d : \mathcal{A}^\bullet$ est elliptique en degré q si le complexe :

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{A}^{q-1} \xrightarrow{\zeta\wedge\bullet} \mathcal{A}^q \xrightarrow{\zeta\wedge\bullet} \mathcal{A}^{q+1} \longrightarrow \cdots$$

est *exact* en degré q pour tout ζ non nul.

Ce problème étant purement ponctuel, plaçons-nous en un point x_0 de X. Soit $\zeta \in T^*_{x_0}X \setminus \{0\}$. Il est possible de choisir un repère symplectique de X au voisinage de x_0 tel que $dx_1 = \zeta$, et $\sigma = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge d\xi_j$. La question est alors réduite à savoir si le complexe :

$$\ker L \cap \Lambda^{q-1}T^*_{x_0}X \xrightarrow{dx_1\wedge\bullet} \ker L \cap \Lambda^q T^*_{x_0}X \xrightarrow{dx_1\wedge\bullet} \ker L \cap \Lambda^{q+1}T^*_{x_0}X$$

est exact en degré q.

Lemme 2. — *Le complexe $d : \mathcal{A}^\bullet$ est elliptique en degré $\geqslant n+1$.*

Démonstration. — Soit $u \in \Lambda^q T^*_{x_0}X$ vérifiant :

(i) $d\sigma \wedge u = 0$,

(ii) $dx_1 \wedge u = 0$,

(iii) $u \neq 0$.

Il s'agit de montrer qu'il existe $v \in \Lambda^{q-1}T^*_{x_0}X$ vérifiant $\sigma \wedge v = 0$ et $u = dx_1 \wedge v$.

Notons $\sigma' = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge d\xi_j$. Alors, (ii) entraîne qu'il existe $v_1 \in \Lambda^{q-1}T^*_{x_0}X$ tel que $dx_1 \wedge v_1 = u$, où v_1 ne contient pas dx_1, et (i) implique

$$\theta \wedge dx_1 \wedge v_1 = \sigma' \wedge dx_1 \wedge v_1 = 0\ ;$$

c'est-à-dire $\sigma' \wedge v_1 = 0$.

Deux cas se présentent :

• si $d\xi_1 \wedge v = 0$, alors $\sigma' \wedge v_1 = \sigma \wedge v_1 = 0$, donc le problème est résolu.

• si $d\xi_1 \wedge v \neq 0$, on a une décomposition : $v_1 = v_2 + d\xi_1 \wedge v_3$ où v_2 et v_3 ne contiennent ni dx_1 ni $d\xi_1$ dans leurs expressions en coordonnées. On peut considérer v_2 comme un $(q-l)$-covecteur sur une variété X de dimension $(2n-2)$, munie de la forme symplectique σ'. (Au voisinage de x_0 , X est isomorphe à $T^*\mathbb{R}^n$, X' à $T^*\mathbb{R}^{n-1}$ où $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_1 = 0\}$). Or, l'opérateur associé L' est surjectif sur le degré $(q-1)$, si $(q-1) \geqslant \frac{2n-2}{2} + 1$, i.e. $q \geqslant n+1$ (cf. 1.1). Donc il existe un élément v_4 de $\Lambda^{q-3}T^*_{x_0}X$ tel que $v_2 = \sigma' \wedge v_4$.

Considérons maintenant $v = v_1 - dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge v_4$. Il vérifie :

(i)
$$\begin{aligned}\sigma \wedge v &= \sigma \wedge v_1 - dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \sigma \wedge v_4 \\ &= dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge v_1 - dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge \sigma' \wedge v_4 \\ &= dx_1 \wedge d\xi_1 \wedge (v_1 - v_2) \\ &= 0 \qquad \text{car } v_1 - v_2 = d\xi_1 \wedge v_3,\end{aligned}$$

(ii)
$$dx_1 \wedge v = dx_1 \wedge v_1 = u.$$

■

Nous avons pour conséquence le

THÉORÈME 3. — *Soit X une variété symplectique compacte de dimension $2n$. Alors les groupes de cohomologie $H^q(\mathcal{A}^\bullet(X))$ sont de dimension finie pour tout $q \geqslant n+1$. (Rappelons qu'ils sont nuls pour tous les $q \leqslant n-1$).*

3. Rapports avec la cohomologie de de Rham

Une question se pose naturellement : *Sur une variété compacte symplectique X, les groupes $H^q(\mathcal{A}^\bullet(X))$ sont-ils formés des classes de la cohomologie de de Rham annulées par σ* ? Nous allons montrer que la réponse est **oui** sur une variété kählérienne pour $q \geqslant n+1$.

Le groupe $H^n(\mathcal{A}^\bullet(X))$ contient toutes les formes $dL^{-1}du$, où u est une n-forme $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Ces formes sont toutes dans la classe nulle de $H^n(X, \mathbb{C})$, mais sont dans autant de classes distinctes de $H^n(\mathcal{A}^\bullet(X))$ qu'il y a de sections différentes de $dL^{-1}d(\Omega^n(X))$.

Notons en général $H^\bullet_\sigma(X)$ le sous-groupe des classes de de Rham sur la variété X annulées par L. On a un morphisme :

$$H^\bullet(\mathcal{A}(X)) \longrightarrow H^\bullet_\sigma(X)$$

qui est surjectif en degré $\geqslant n+1$. La question est de savoir s'il est injectif.

• Soit ω une métrique kählérienne sur X, et $\mathcal{H}^\bullet_\omega(X)$ l'espace des formes harmoniques sur X, annulées par L.

On peut remarquer que $H^\bullet_\omega(X)$ et $\mathcal{H}^\bullet_\omega(X)$ sont isomorphes. En effet, l'élément $h \in \mathcal{H}^q(X)$ qui représente une classe $\mathbf{a}$ de $H^q_\omega(X)$ admet pour image par L la $(q+2)$-forme harmonique qui représente l'image par L de $\mathbf{a}$, soit $\mathbf{0}$.

Maintenant, soit $q \geqslant n+1$ et $u \in \mathcal{A}^q(X)$ telle que $[u]_{DR} = \mathbf{0}$, i.e. :

$$Lu = 0 \quad \text{et} \quad \exists v \in \Omega^{q-1}(X) \ : \ u = dv.$$

Alors, $d(Lv) = 0$ donc Lv admet la représentation par une forme harmonique h unique et une q-forme x : $Lv - h + dx$. Or, L est surjective sur les degrés $\geqslant n+1$; on peut donc trouver y vérifiant $x = Ly$, et une $(q-1)$-forme g telle que $Lg = h$. Le fait est que l'on peut choisir g harmonique. En effet, considérons la décomposition de Lepage de g :

$$g = \sum_{r \geqslant (n-q+1)_+} \Lambda^r g_r \quad \text{o } Lg_r = 0 \text{ pour tout } r,$$

alors

$$Lg = \sum_{r \geqslant (n-q+1)_+} L\Lambda^r g_r \ ;$$

soit

$$h = Lg = \sum_{r \geqslant (n-q+1)_+} \Lambda^r g \left[(r+1)(q+r+1-n)g_{r+1}\right]$$

et $\Delta h = 0 \Longleftrightarrow \Delta g_r = 0$ pour tout $r \geqslant (n-q+1)_+ + 1$ donc $g - g_0$ est harmonique, et $L(g-g_0) = Lg = h$.

Par conséquent, $Lv = L(g+dy)$ d'où : $\exists z \in \mathcal{A}^{q-1}(X) \ : \ v = g + z + dy$. 0n a alors

$$u = d(g+z+dy) = dz$$

et

$$Lz = 0.$$

Donc la classe de u dans $H^q(\mathcal{A}(X))$ est également nulle.

Ceci démontre la

Proposition 3.1. — *Soit X une variété kählérienne compacte. Alors, on a les isomorphismes : $H^q_\omega(X) \simeq \mathcal{H}^q_\omega(X) \simeq H^q(\mathcal{A}^\bullet(X))$ pour tout $q = 0, 1, \ldots, 2n$, $q \neq n$.*

• A l'heure actuelle, nous ne savons pas démontrer la proposition 3.1 pour une variété symplectique quelconque. Nous n'avons pas non plus trouvé de contre-exemple simple sur la variété d'Iwasawa, ou les variétés d'Iwasawa généralisées données dans [C-F-G] . Nous restons cependant pessimiste, car la preuve actuelle requiert un lemme dont nous doutons qu'il soit vrai, que nous formulerons comme

PROBLÈME 3.2. — *Est-il vrai qu'une forme fermée de degré q supérieur à $n + 1$ sur une variété symplectique de dimension $2n$ est l'image par L d'une $(q - 2)$-forme fermée* ?

Bibliographie

[B] BRYLINSKI J.L. — *A differential complex for Poisson manifolds*, J. Diff. Geom., **28** (1988), 93–114.

[C-F-G] CORDERO L.A., FERNANDEZ M., GRAY A. — *Variétés symplectiques sans structures kählériennes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **301,** n° 5 (1985), 217–218.

[H] HÖRMANDER L. — *Partial Differential Operators*, tome III, Chap. XXI, "Symplectic geometry", Springer, 1985.

[W] WEYL A. — *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, Hermann, 1958.

— ◇ —