УДК 512.723+517.95

Ж.-П. Демайи

Эрмитов подход Янга–Миллса к гипотезе Гриффитса о положительности обильных векторных расслоений

Для данного векторного расслоения произвольного ранга с обильным детерминантным линейным расслоением на проективном многообразии предлагается новая эллиптическая система эрмитовых дифференциальных уравнений типа Янга–Миллса на тензор кривизны. Система составлена таким образом, что ее решения дают эрмитовы метрики положительной кривизны в смысле Гриффитса и даже в двойственном смысле Накано. Как следствие, если бы получилось доказать существование решения для любого обильного векторного расслоения, то гипотеза Гриффитса об эквивалентности между обильностью и положительностью векторных расслоений была бы доказана.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: обильное векторное расслоение, положительность по Гриффитсу, эрмитово уравнение Янга–Миллса.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9387

§ 1. Введение

Пусть X – проективное n-мерное многообразие. Гипотеза Гриффитса (см. [5]) говорит, что голоморфное векторное расслоение $E \to X$ обильно по Хартсхорну; это значит, что ассоциированное линейное расслоение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ обильно тогда и только тогда, когда E допускает эрмитову метрику h такую, что тензор кривизны Черна $\Theta_{E,h} = i\nabla^2_{E,h}$ положителен по Гриффитсу. Другими словами, если мы положим $\operatorname{rank} E = r$ и

$$\Theta_{E,h} = i \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes e^*_\lambda \otimes e_\mu \tag{1.1}$$

в терминах голоморфных координат $(z_1,\dots,z_n)$ на X и ортонормированного базиса $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ расслоения E, то ассоциированная квадратичная форма

$$\widetilde{\Theta}_{E,h}(\xi\otimes v) := \langle \Theta_{E,h}(\xi,\overline{\xi})\cdot v, v\rangle_h = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k v_\lambda \overline{v}_\mu \tag{1.2}$$

должна принимать положительные значения на ненулевых тензорах $\xi\otimes v \in T_X\otimes E$. Более сильное понятие положительности по Накано (см. [8]) предполагает, что

$$\widetilde{\Theta}_{E,h}(\tau) := \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\tau_{j\lambda}\overline{\tau}_{k\mu} > 0 \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке European Research Council project “Algebraic and Kähler Geometry” – ERC-ALKAGE (грант № 670846, сентябрь 2015 г.).