Ж.-П. Демайи, Эрмитов подход Янга–Миллса к гипотезе Гриффитса о положительности обильных векторных расслоений, *Матем. сб.*, 2021, том 212, номер 3, 39–53

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9387

УДК 512.723+517.95

Ж.-П. Демайи

Эрмитов подход Янга–Миллса к гипотезе Гриффитса о положительности обильных векторных расслоений

Для данного векторного расслоения произвольного ранга с обильным детерминантным линейным расслоением на проективном многообразии предлагается новая эллиптическая система эрмитовых дифференциальных уравнений типа Янга–Миллса на тензор кривизны. Система составлена таким образом, что ее решения дают эрмитовы метрики положительной кривизны в смысле Гриффитса и даже в двойственном смысле Накано. Как следствие, если бы получилось доказать существование решения для любого обильного векторного расслоения, то гипотеза Гриффитса об эквивалентности между обильностью и положительностью векторных расслоений была бы доказана.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: обильное векторное расслоение, положительность по Гриффитсу, эрмитово уравнение Янга–Миллса.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9387

§ 1. Введение

Пусть X – проективное n-мерное многообразие. Гипотеза Гриффитса (см. [5]) говорит, что голоморфное векторное расслоение $E \to X$ обильно по Хартсхорну; это значит, что ассоциированное линейное расслоение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ обильно тогда и только тогда, когда E допускает эрмитову метрику h такую, что тензор кривизны Черна $\Theta_{E,h} = i\nabla^2_{E,h}$ положителен по Гриффитсу. Другими словами, если мы положим $\operatorname{rank} E = r$ и

$$\Theta_{E,h} = i \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant \lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes e^*_\lambda \otimes e_\mu \tag{1.1}$$

в терминах голоморфных координат $(z_1,\dots,z_n)$ на X и ортонормированного базиса $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ расслоения E, то ассоциированная квадратичная форма

$$\widetilde{\Theta}_{E,h}(\xi\otimes v) := \langle \Theta_{E,h}(\xi,\overline{\xi})\cdot v, v\rangle_h = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant \lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k v_\lambda \overline{v}_\mu \tag{1.2}$$

должна принимать положительные значения на ненулевых тензорах $\xi\otimes v \in T_X\otimes E$. Более сильное понятие положительности по Накано (см. [8]) предполагает, что

$$\widetilde{\Theta}_{E,h}(\tau) := \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant \lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\lambda\mu}\tau_{j\lambda}\overline{\tau}_{k\mu} > 0 \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке European Research Council project “Algebraic and Kähler Geometry” – ERC-ALKAGE (грант № 670846, сентябрь 2015 г.).

для всех ненулевых тензоров $\tau = \sum_{j,\lambda} \tau_{j\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j} \otimes e_\lambda \in T_X \otimes E$. На самом деле интересно рассматривать также тензор кривизны двойственного расслоения E^*, который задается матрицей, противоположной к транспонированной $\Theta_{E,h}$, т.е.

$$\Theta_{E^*,h^*} = -{}^T\Theta_{E,h} = -\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\mu\lambda}\, dz_j \wedge d\overline{z}_k \otimes (e_\lambda^*)^* \otimes e_\mu^*. \tag{1.4}$$

Это приводит к понятию двойственной положительности по Накано, которая гласит, что

$$-\widetilde{\Theta}_{E^*,h^*}(\tau) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n,\, 1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r} c_{jk\mu\lambda}\tau_{j\lambda}\overline{\tau}_{k\mu} > 0 \tag{1.5}$$

для всех ненулевых тензоров $\tau = \sum_{j,\lambda} \tau_{j\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j} \otimes e_\lambda^* \in T_X \otimes E^*$. С другой стороны, положительность по Гриффитсу $\Theta_{E,h}$ эквивалентна отрицательности по Гриффитсу Θ_{E^*,h^*} и влечет положительность индуцированной метрики на тавтологическом линейном расслоении $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)(1)}$. Согласно теореме Кодаиры о вложении (см. [6]) положительность $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)(1)}$ эквивалентна его обильности, поэтому мы видим непосредственно из определений, что

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Theta}_{E,h} \text{ двойственно положительно по Накано}\\ &\qquad \Longrightarrow \quad \widetilde{\Theta}_{E,h} \text{ положительно по Гриффитсу} \quad \Longrightarrow \quad E \text{ обильно.}\end{aligned} \tag{1.6}$$

В настоящей работе мы рассматриваем следующий

Основной вопрос 1.1. Верно ли, что

$$E \text{ обильно} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{\Theta}_{E,h} \text{ двойственно положительно по Накано?}$$

Положительный ответ, очевидно, докажет гипотезу Гриффитса даже в более сильной формулировке. Следует заметить, что положительность по Накано влечет положительность по Гриффитсу, но в общей ситуации это более ограничительное условие. Как следствие, нельзя ожидать, что обильность влечет положительность по Накано. Так, легко показать, что $T_{\mathbb{P}^n}$ обильно (и полуположительно по Накано для метрики Фубини–Штуди), но не положительно по Накано, поскольку теорема о занулении Накано (см. [8]) тогда влекла бы

$$H^{n-1,n-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{C}) = H^{n-1}(\mathbb{P}^n, \Omega^{n-1}_{\mathbb{P}^n}) = H^{n-1}(\mathbb{P}^n, K_{\mathbb{P}^n} \otimes T_{\mathbb{P}^n}) = 0. \tag{1.7}$$

С другой стороны, нет примеров обильных векторных расслоений, которые не являются двойственно положительными по Накано, поэтому основной вопрос, сформулированный выше, все еще актуален, хотя возможность получить хоть какой-то ответ и может выглядеть очень оптимистичной. Здесь стоит отметить, что известны интересные связи между обильностью и положительностью по Гриффитсу и Накано, например, Б. Бернардссон (см. [1]) доказал, что обильность E влечет положительность по Накано $S^mE \otimes \det E$ для любого $m \in \mathbb{N}$; см. также [3], где есть более раннее прямое и элементарное доказательство гораздо более слабого результата о том, что положительность по Гриффитсу расслоения E влечет положительность по Накано расслоения $E \otimes \det E$; см. [7], где приведены результаты, аналогичные [1].

На данный момент известно, что гипотеза Гриффитса верна в случаях $n = \dim X = 1$ и $r = \operatorname{rank} E = 1$ (в этих случаях положительность и двойственная положительность по Накано совпадают с положительностью по Гриффитсу). Доказательства можно найти в [14; теорема 2.6] и [2]. В обоих случаях доказательства базируются на существовании фильтрации Хардера–Нарасимхана и на теореме Нарасимхана–Сешадри (см. [9]) для стабильных векторных расслоений – одномерном случае теоремы Дональдсона–Уленбека–Яу (см. [4], [13]). Заманчиво исследовать, можно ли в технике калибровочной теории найти подход к гипотезе Гриффитса. В этом направлении П. Науманн (см. [10]) предложил метод потоков Кэлера–Риччи, который стартует с данной метрики Финслера положительной кривизны и сходится к эрмитовой метрике. Однако не очевидно, сохраняет ли поток, предложенный в [10], положительность, поэтому он может давать в пределе эрмитову метрику, которая не имеет положительной кривизны. Другая смежная идея предложена В. Пингали в [11] и заключается в изучении уравнения Монжа–Ампера для векторных расслоений $(\Theta_{E,h})^n = \eta \operatorname{Id}_E$, где η – положительная форма объема на X. Решение такого уравнения требует полистабильности в размерности $n = 1$ и в общем случае свойства положительности (E, h), которое даже сильнее, чем положительность по Накано (и поэтому гораздо сильнее, чем обильность).

В § 2 мы описываем более гибкую систему дифференциальных уравнений, основанную на комбинации больших детерминантальных уравнений и условия отсутствия следа Эрмита–Эйнштейна. Она основывается на хорошо известном методе продолжения и подобрана таким образом, чтобы гарантировать положительность кривизны даже в двойственном по Накано смысле – условие, которое все еще в итоге может оказаться эквивалентным обильности. Мы показываем, что возможно построить такую нелинейную систему дифференциальных уравнений, которая эллиптична и обратима по крайней мере в начальный момент времени. Однако нерешенной останется задача – проверить, можно ли показать существование длительного по времени решения упомянутого уравнения или одного из его вариантов. В § 3 мы обсуждаем смежные экстремальные проблемы и концепции объема векторных расслоений.

§ 2. Подход с помощью комбинации уравнений Монжа–Ампера и эрмитовых уравнений Янга–Миллса

Пусть $E \to X$ – голоморфное векторное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой h. Если тензор кривизны Черна $\Theta_{E,h}$ двойственно положителен по Накано, то $\frac{1}{r}$-ю степень $(n \times r)$-мерного определителя соответствующей эрмитовой квадратичной формы на $T_X \otimes E^*$ можно рассматривать как положительную (n, n)-форму

$$\det\nolimits_{T_X \otimes E^*}({}^{T}\Theta_{E,h})^{1/r} := \det(c_{jk\mu\lambda})^{1/r}_{(j,\lambda),(k,\mu)} i\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge i\, dz_n \wedge d\overline{z}_n. \tag{2.1}$$

Более того, эта (n, n)-форма не зависит ни от выбора координат (z_j) на X, ни от ортонормального базиса (e_λ) на E (но ортонормальность (e_λ) требуется). Обратно, если дана кэлерова метрика ω_0 на X, то основная идея состоит в том, что рассмотрение “матричного уравнения Монжа–Ампера”

$$\det\nolimits_{T_X \otimes E^*}({}^{T}\Theta_{E,h})^{1/r} = f\omega_0^n, \tag{2.2}$$

где f – гладкая положительная функция, может обеспечить двойственную положительность по Накано, если это рассмотрение скомбинировать с техникой продолжения из начальной точки, для которой положительность известна. Для $r = 1$ мы имеем ${}^T\Theta_{E,h} = \Theta_{E,h} = -i\,\partial\overline{\partial}\log h$, и уравнение (2.2) является стандартным уравнением Монжа–Ампера. Если дана f, не зависящая от h, то теорема Яу (см. [15]) гарантирует существование единственного решения $\theta = \Theta_{E,h} > 0$, поскольку E – обильное линейное расслоение и $\int_X f\omega_0^n = c_1(E)^n$. Тогда мы имеем гладко изменяющееся решение $\theta_t = \Theta_{E,h_t} > 0$, если справа в уравнении (2.2) f_t гладко меняется в зависимости от некоторого параметра t.

Теперь в предположении, что E – обильное расслоение ранга $r > 1$, уравнение (2.2) становится недоопределенным, поскольку действительный ранг пространства эрмитовых матриц h на E равен r^2, в то время как (2.2) дает только одно скалярное уравнение. Если $E = \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant r} E_j$ разлагается в сумму обильных линейных расслоений и мы возьмем диагональную эрмитову структуру $h = \bigoplus h_j$ на E, то $(nr \times nr)$-определитель разлагается в произведение блоков, и уравнение (2.2) сводится к

$$\Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \Theta^n_{E_j,h_j}\Big)^{1/r} = f\omega_0^n. \tag{2.2$_s$}$$

Это "разложенное уравнение" можно решить для любого $f = \prod f_j^{1/r}$ с $\int_X f_j\omega_0^n = c_1(E_j)^n$, просто решая отдельные уравнения $\Theta^n_{E_j,h_j} = f_j\omega_0^n$, $f_j > 0$, но разложение не обязательно единственно. В этом случае неравенство Гёльдера требует выполнения неравенства $\int_X f\omega_0^n \leqslant \big(\prod c_1(E_j)^n\big)^{1/r}$, и равенства можно достичь, взяв все f_j пропорциональными f.

В общем случае решения все еще могут существовать, но из-за отсутствия единственности мы не можем получить априорные оценки. Чтобы восстановить хорошо определенную систему уравнений, нужно ввести $r^2 - 1$ дополнительных скалярных уравнений или матричное уравнение действительного ранга $r^2 - 1$. Если E обильно, детерминантное линейное расслоение $\det E$ тоже обильно. По теореме Кодаиры о вложимости мы можем найти гладкую эрмитову метрику η_0 на $\det E$ такую, что $\omega_0 := \Theta_{\det E,\eta_0} > 0$ является кэлеровой метрикой на X. В случае, когда E является ω_0-стабильным или ω_0-полистабильным, мы знаем из теоремы Дональдсона–Уленбека–Яу, что существует эрмитова метрика h на E, удовлетворяющая условию Эрмита–Эйнштейна

$$\omega_0^{n-1} \wedge \Theta_{E,h} = \frac{1}{r}\omega_0^n \otimes \mathrm{Id}_E, \tag{2.3}$$

поскольку наклон E относительно $\omega_0 \in c_1(E)$ равен $1/r$.

В общем случае нельзя ожидать, что E является ω_0-полистабильным, но Уленбек и Яу показали, что всегда существует гладкое решение конкретного "ослабленного" уравнения Эрмита–Эйнштейна. Более точно, пусть $\mathrm{Herm}(E)$ – пространство эрмитовых (не обязательно положительных) форм на E, пусть дана эрмитова метрика $h > 0$, и пусть $\mathrm{Herm}_h(E, E)$ – пространство h-эрмитовых эндоморфизмов $u \in \mathrm{Hom}(E, E)$; обозначим через

$$\mathrm{Herm}(E) \to \mathrm{Herm}_h(E, E), \qquad q \mapsto \widetilde{q} \quad \text{такой, что} \quad q(v, w) = \langle v, w\rangle_q = \langle \widetilde{q}(v), w\rangle_h, \tag{2.4}$$

естественный изоморфизм между эрмитовыми квадратичными формами и эрмитовыми эндоморфизмами, который, конечно, зависит от h. Мы также обозначим через

$$\mathrm{Herm}^\circ_h(E, E) = \big\{u \in \mathrm{Herm}_h(E, E);\ \mathrm{tr}\, u = 0\big\} \tag{2.5}$$

пространство "бесследовых" эрмитовых эндоморфизмов. В дальнейшем мы фиксируем стандартную эрмитову метрику H_0 на E такую, что $\det H_0 = \eta_0$, поэтому $\Theta_{\det E, \det H_0} = \omega_0 > 0$. Согласно [13; теорема 3.1] для любого $\varepsilon > 0$ существует гладкая эрмитова метрика q_ε на E такая, что

$$\omega_0^{n-1} \wedge \Theta_{E, q_\varepsilon} = \omega_0^n \otimes \left(\frac{1}{r}\,\mathrm{Id}_E - \varepsilon \log \widetilde{q}_\varepsilon\right), \tag{2.6}$$

где $\widetilde{q}_\varepsilon$ вычисляется относительно H_0, а $\log u$ обозначает логарифм положительного эрмитова эндоморфизма u. Интуитивная идея состоит в том, что $\log \widetilde{q}_\varepsilon$ вносит достаточное "трение", чтобы избежать взрывного поведения аппроксимирующего решения во время использования стандартного метода продолжения (см. § 2 и § 3 в [13]). С другой стороны, когда $\varepsilon \to 0$, метрика q_ε становится "все более и более искаженной" и влечет асимптотически разложение E на слабо голоморфные подрасслоения, соответствующие фильтрации Хардера–Нарасимхана расслоения E относительно ω_0. Если мы запишем $\det q_\varepsilon = e^{-\varphi} \det H_0$ и возьмем след в (2.6), то найдем $\omega_0^{n-1} \wedge (\omega_0 + i\,\partial\overline{\partial}\varphi) = \omega_0^n(1 + \varepsilon\varphi)$, следовательно, $\omega_0^{n-1} \wedge i\,\partial\overline{\partial}\varphi - \varepsilon\varphi\omega_0^n = 0$. Стандартное применение принципа максимума показывает, что $\varphi = 0$, поэтому (2.6) влечет $\det q_\varepsilon = \det H_0$ и $\log \widetilde{q}_\varepsilon \in \mathrm{Herm}^\circ_{H_0}(E, E)$. В общем случае для произвольной эрмитовой метрики h пусть

$$\Theta^\circ_{E,h} = \Theta_{E,h} - \frac{1}{r}\Theta_{\det E, \det h} \otimes \mathrm{Id}_E \in C^\infty(X, \Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes \mathrm{Herm}^\circ_h(E, E)) \tag{2.7}$$

– тензор кривизны $E \otimes (\det E)^{-1/r}$ относительно тривиальной детерминантной метрики $h^\circ := h \otimes (\det h)^{-1/r}$. Уравнение (2.6) эквивалентно $\det q_\varepsilon = \det H_0$ и

$$\omega_0^{n-1} \wedge \Theta^\circ_{E, q_\varepsilon} = -\varepsilon\omega_0^n \otimes \log \widetilde{q}_\varepsilon. \tag{2.8}$$

Это матричное уравнение ранга $r^2 - 1$, которое включает в себя только q°_ε и не зависит от $\det q_\varepsilon$. Заметим, что здесь мы имеем $\log \widetilde{q}_\varepsilon \in \mathrm{Herm}^\circ_{H_0}(E, E)$, но также $\log \widetilde{q}_\varepsilon \in \mathrm{Herm}^\circ_{q_\varepsilon}(E, E)$.

В этом контексте, если дано достаточно большое $\alpha > 0$, кажется естественным искать зависящее от времени семейство метрик $h_t(z)$ на слоях E_z расслоения E, $t \in [0, 1]$, удовлетворяющее обобщенному уравнению Монжа–Ампера

$$\det{}_{T_X \otimes E^*}({}^T\Theta_{E, h_t} + (1 - t)\alpha\omega_0 \otimes \mathrm{Id}_{E^*})^{1/r} = f_t\omega_0^n, \qquad f_t > 0, \tag{2.9}$$

и бесследовому условию Эрмита–Эйнштейна

$$\omega_t^{n-1} \wedge \Theta^\circ_{E, h_t} = g_t \tag{2.9°}$$

с гладко меняющимися семействами функций $f_t \in C^\infty(X,\mathbb{R})$, эрмитовых метрик $\omega_t > 0$ на X и сечений $g_t \in C^\infty(X, \Lambda^{n,n}_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes \mathrm{Herm}^\circ_{h_t}(E,E))$, $t \in [0,1]$. Здесь мы начнем, например, с решения Яу–Уленбека $h_0 = q_\varepsilon$ уравнения (2.6) и берем $\alpha > 0$ таким большим, что ${}^T\Theta_{E,h_0} + \alpha\omega_0 \otimes \mathrm{Id}_{E^*} > 0$ в смысле Накано. Если эти условия могут быть выполнены для всех $t \in [0,1]$ без "взрывов" решений h_t, выводим из (2.9), что

$$ {}^T\Theta_{E,h_t} + (1-t)\alpha\omega_0 \otimes \mathrm{Id}_{E^*} > 0 \quad \text{в смысле Накано} \tag{2.9$^+$}$$

для всех $t \in [0,1]$. В момент времени $t = 1$ тогда получим эрмитову метрику h_1 на E такую, что Θ_{E,h_1} двойственно положительно по Накано. Мы все еще имеем свободу в корректировке f_t, ω_t и g_t в уравнениях (2.9) и (2.9°). Мы имеем систему дифференциальных уравнений порядка 2, и любой выбор правых сторон вида

$$f_t(z) = F\big(t, z, h_t(z), D_z h_t(z), D_z^2 h_t(z)\big) > 0, \tag{2.10}$$
$$g_t(z) = G\big(t, z, h_t(z), D_z h_t(z), D_z^2 h_t(z)\big) \in C^\infty(X, \Lambda^{1,1}_{\mathbb{R}} T^*_X \otimes \mathrm{Herm}^\circ(E,E)) \tag{2.10°}$$

априори допустим для обеспечения условия положительности (2.9$^+$), хотя наличие членов второго порядка $D_z^2 h_t(z))$ может влиять на главный символ уравнений. В уравнении (2.9°) метрики ω_t можно было бы взять зависящими от t, но если бы не некоторые причины, которые могут возникнуть на следующих уровнях анализа, кажется, что проще положить $\omega_t = \omega_0$ не зависящей от t. На этом этапе мы имеем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть (E, H_0) – гладкое эрмитово векторное расслоение такое, что E обильно и $\omega_t = \omega_0 = \Theta_{\det E, \det H_0} > 0$. Тогда система уравнений (2.9), (2.9°) – хорошо определенная (фактически нелинейная) эллиптическая система уравнений для любого выбора правых сторон*

$$f_t = F(t, z, h_t, D_z h_t) > 0, \qquad g_t = G(t, z, h_t, D_z h_t, D_z^2 h_t) \in \mathrm{Herm}^\circ(E,E)$$

при условии, что символ η_h линеаризованного оператора $u \mapsto DG_{D^2h}(t,z,h, Dh, D^2h) \cdot D^2u$ имеет норму Гильберта–Шмидта $\sup_{\xi \in T^*_X, |\xi|_{\omega_0}=1} \|\eta_h(\xi)\|_h \leqslant (r^2+1)^{-1/2} n^{-1}$ для любой участвующей в уравнении метрики $h = h_t$. Если гладкое решение h_t существует на всем временном промежутке $[0,1]$, то E двойственно положительно по Накано.

Доказательство. Если записать эрмитову метрику h на E как $h(v,w) = \langle \widetilde{h}(v), w\rangle_{H_0}$ с $\widetilde{h} \in \mathrm{Herm}_{h_0}(E,E)$, мы получим $h = H_0 \widetilde{h}$ в терминах матриц. Тензор кривизны задается обычной формулой $\Theta_{E,h} = i\,\overline{\partial}(h^{-1}\partial h) = i\,\overline{\partial}(\widetilde{h}^{-1}\,\partial_{H_0}\widetilde{h})$, где $\partial_{H_0} s = H_0^{-1}\,\partial(H_0 s)$ – $(1,0)$-компонента связности Черна, ассоциированной с H_0 на E. Для простоты обозначений положим

$$M := \mathrm{Herm}(E), \qquad M_h = \mathrm{Herm}_h(E,E), \qquad M_h^\circ = \mathrm{Herm}_h^\circ(E,E).$$

Система уравнений (2.9), (2.9°) ассоциирована с нелинейным дифференциальным оператором

$$P\colon C^\infty(X,M) \to C^\infty(X, \mathbb{R} \oplus M_h^\circ), \qquad h \mapsto P(h),$$

определенным через

$$P(h) = \omega_0^{-n}\big(\det\nolimits_{T_X\otimes E^*}({}^T\Theta_{E,h} + (1-t)\alpha\omega_0\otimes \mathrm{Id}_{E^*})^{1/r},\\ \omega_0^{n-1}\wedge\Theta_{E^\circ,h} - G(t,z,h,Dh,D^2h)\big).$$

Он по определению эллиптичен в h, если его линеаризация $u\mapsto (dP)_h(u)$ является эллиптическим линейным оператором; ключевой факт заключается в том, что M и $\mathbb{R}\oplus M_h^\circ$ имеют один и тот же ранг r^2 над полем $\mathbb{R}$. Наша цель – вычислить символ $\sigma_{dP}\in C^\infty(X, S^2T_X^{\mathbb{R}}\otimes \mathrm{Hom}(M,\mathbb{R}\oplus M_h^\circ))$ для dP и проверить, что $u\mapsto\sigma_{dP}(\xi)\cdot u$ обратимо для любого ненулевого вектора $\xi\in T_X^*$. Возьмем инфинитезимальное изменение δh метрики h в $C^\infty(X,M)$ и представим его как $\delta h = \langle u\bullet,\bullet\rangle_h$ с $u\in M_h = \mathrm{Herm}_h(E,E)$. В терминах матриц мы имеем $\delta h = hu$, т.е. $u=(u_{\lambda\mu}) = h^{-1}\delta h$ – это “логарифмическое изменение h”. В этих обозначениях вычисляем $(dP)_h(u)$ в ортонормальных координатах $(z_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ на X относительно ω_0. Мы имеем $h+\delta h = h(\mathrm{Id}+u)$ и $(h+\delta h)^{-1} = (\mathrm{Id}-u)h^{-1}$ по модулю $O(u^2)$, поэтому

$$\begin{aligned} d\Theta_{E,h}(u) &= i\,\overline{\partial}(h^{-1}\,\partial(hu)) - i\,\overline{\partial}(uh^{-1}\,\partial h) = i\,\overline{\partial}\partial u + i\,\overline{\partial}(h^{-1}\,\partial h u) - i\,\overline{\partial}(uh^{-1}\,\partial h)\\ &= i\,\overline{\partial}\partial_{h^*\otimes h}u = -i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial}u, \end{aligned}\tag{2.11}$$

где $\partial_{h^*\otimes h}$ обозначает $(1,0)$-компоненту связности Черна на голоморфном векторном расслоении $\mathrm{Hom}(E,E) = E^*\otimes E$, индуцированную метрикой $h^*\otimes h$. Как следствие, член второго порядка линеаризованного оператора – это просто

$$d\Theta_{E,h}(u)^{[2]} = -i\,\partial\overline{\partial}u,$$

а логарифмический дифференциал первой скалярной компоненты $P_{\mathbb{R}}(h)$ оператора $P(h)$ имеет члены второго порядка, заданные через

$$P_{\mathbb{R}}(h)^{-1}\,dP_{\mathbb{R},h}(u)^{[2]} = \frac{1}{r}\,\mathrm{tr}(-\theta^{-1}\cdot{}^T i\,\partial\overline{\partial}u) = -\frac{1}{r}(\det\theta)^{-1}\sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\,\frac{\partial^2 u_{\lambda\mu}}{\partial z_j\,\partial\overline{z}_k},\tag{2.12}$$

где θ – $(n\times r)$-матрица $\theta=\theta(t,h) = {}^T\Theta_{E,h} + (1-t)\alpha\omega_0\otimes\mathrm{Id}_{E^*} > 0$, $\widetilde{\theta}$ – ее косопряженная и $\theta^{-1} = (\det\theta)^{-1}\,{}^T\widetilde{\theta}$, поэтому $P_{\mathbb{R}}(h) = \omega_0^{-n}(\det\theta)^{1/r}$. Нам также нужно вычислить члены второго порядка в дифференциале второй компоненты

$$h\mapsto P^\circ(h) = \omega_0^{-n}(\omega_0^{n-1}\wedge\Theta_{E,h}^\circ - G(t,z,h,Dh,D^2h)).$$

Положим $u = (1/r)\,\mathrm{tr}\,u\otimes\mathrm{Id}_E + u^\circ$, $u^\circ\in M^\circ$ и $\mathrm{tr}\,u = \sum_\lambda u_{\lambda\lambda}\in\mathbb{R}$. Обозначив $\tau = (1/r)\,\mathrm{tr}\,u$, это на самом деле дает изоморфизм $M_h\to\mathbb{R}\oplus M_h^\circ$, $u\mapsto(\tau,u^\circ)$. Поскольку u° – логарифмическое изменение $h^\circ = h(\det h)^{-1/r}$, мы получаем

$$(dP^\circ)_h(u)^{[2]} = \omega_0^{-n}(-\omega_0^{n-1}\wedge i\,\partial\overline{\partial}u^\circ - DG_{D^2h}\cdot D^2u).\tag{2.13}$$

Если мы зафиксируем эрмитову метрику h и возьмем ненулевой кокасательный вектор $0\neq\xi\in T_X^*$, символ σ_{dP} задается выражением вида

$$\sigma_{(dP)_h}(\xi)\cdot u = -\bigg(\frac{(\det\theta)^{-1+1/r}}{r\omega_0^n}\sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k u_{\lambda\mu},\ \frac{1}{n}|\xi|^2u^\circ + \widetilde{\sigma}_G(\xi)\cdot u\bigg),\tag{2.14}$$

где $\widetilde{\sigma}_G$ – главный символ оператора $DG_{D^2h}\cdot D^2$. Если $g_t = G(t,z,h_t,Dh_t)$ не зависит от D^2h_t, то символ $\widetilde{\sigma}_G$ равен 0 и из (2.12) легко видеть, что $u\mapsto \sigma_{(dP)_h}(\xi)\cdot u$ – изоморфизм в $\mathrm{Hom}(M_h,\mathbb{R}\oplus M_h^\circ)$. Действительно, первое суммирование дает

$$\sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k u_{\lambda\mu} = \sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k u^\circ_{\lambda\mu} + \frac{1}{r}\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\lambda}\xi_j\overline{\xi}_k\,\mathrm{tr}\,u.$$

С помощью легких вычислений мы получаем обратный оператор $\mathbb{R}\oplus M_h^\circ\to M_h$, $(\tau,v)\mapsto u$, где

$$-r\omega_0^n(\det\theta)^{1-1/r}\tau = \sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k u^\circ_{\lambda\mu} + \frac{1}{r}\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\lambda}\xi_j\overline{\xi}_k\,\mathrm{tr}\,u, \qquad -v = \frac{1}{n}|\xi|^2u^\circ,$$

следовательно, $u^\circ = -(n/|\xi|^2)v$ и

$$\sigma_{(dP)_h}(\xi)^{-1}\cdot(\tau,v) = \frac{(n/|\xi|^2)\sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k v_{\lambda\mu} - r\omega_0^n(\det\theta)^{1-1/r}\tau}{\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\lambda}\xi_j\overline{\xi}_k}\,\mathrm{Id}_E - \frac{n}{|\xi|^2}v.$$

Возьмем нормы Гильберта Шмидта $|u|^2 = \sum_{\lambda,\mu}|u_{\lambda\mu}|^2$ на $M_h = \mathrm{Herm}_h(E,E)$ и $c|\tau|^2+|v|^2$ на $\mathbb{R}\oplus M_h^\circ$ (где h – исходная метрика, а C – константа). Из-за однородности мы можем также предположить, что $|\xi| = |\xi|_{\omega_0} = 1$. Поскольку $\big(\sum_{j,k}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k\big)_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r}$ – положительная эрмитова матрица в силу свойства положительности по Накано, то ее след является точной верхней гранью для наибольшего собственного значения, и мы получаем

$$\Big|\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k v_{\lambda\mu}\Big|^2 \leqslant (1-\delta)\Big(\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\lambda}\xi_j\overline{\xi}_k\Big)^2\ \sum_{\lambda}|v_{\lambda\mu}|^2.$$

Неравенство Коши–Шварца влечет

$$\Big|\sum_{j,k,\lambda,\mu}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\mu}\xi_j\overline{\xi}_k v_{\lambda\mu}\Big|^2 \leqslant r(1-\delta)\Big(\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\lambda}\xi_j\overline{\xi}_k\Big)^2\ \sum_{\lambda,\mu}|v_{\lambda\mu}|^2.$$

Для $|\xi|=1$, поскольку $\mathrm{Id}_E\perp M^\circ$ и $|\,\mathrm{Id}_E\,|^2 = r$, это влечет

$$\begin{aligned}\big|\sigma_{(dP)_h}(\xi)^{-1}\cdot(\tau,v)\big|^2 &\leqslant \bigg(nr^{1/2}(1-\delta)^{1/2}|v| + \frac{r\omega_0^n(\det\theta)^{1-1/r}}{\sum_{j,k,\lambda}\widetilde{\theta}_{jk\lambda\lambda}\xi_j\overline{\xi}_k}|\tau|\bigg)^2 r + n^2|v|^2\\ &< (n^2r^2+n^2)(C|\tau|^2+|v|^2)\end{aligned}$$

для достаточно большого C. Согласно стандартному аргументу о возмущении (2.12) остается биективным, если $|\widetilde{\sigma}_G(\xi)|_h$ меньше, чем число, обратное к норме $\sigma_{(dP)_h}(\xi)^{-1}$, т.е. $(r^2+1)^{-1/2}n^{-1}$. Аналогично, можно также разрешить скалярной правой части F иметь “небольшую зависимость” от D^2h_t, но это выглядит менее полезным. Теорема доказана.

Наша следующая задача – убедиться, что существование решения имеет место на открытом интервале времени $[0,t_0[$ (и, как мы надеемся, на всем отрезке $[0,1]$). Хорошо известно, что в случае метрики ранга 1 $h = e^{-\varphi}$ уравнение

Кэлера–Эйнштейна $(\omega_0+i\,\partial\overline{\partial}\varphi_t)^n = e^{tf+\lambda\varphi_t}\omega_0^n$ более просто позволяет получить открытость и замкнутость решений, если применять метод продолжения для $\lambda > 0$, поскольку линеаризованный оператор $\psi \mapsto \Delta_{\omega_{\varphi_t}}\psi - \lambda\psi$ всегда обратим. Один способ обобщить условие Кэлера–Эйнштейна на случай более высоких рангов $r \geqslant 1$ состоит в том, чтобы взять

$$f_t(z) = \left(\frac{\det H_0(z)}{\det h_t(z)}\right)^{\lambda} a_0(z), \qquad \lambda \geqslant 0, \tag{2.15}$$

где $a_0(z) = \omega_0^{-n}\det({}^T\Theta_{E,h_0} + \alpha\omega_0 \otimes \mathrm{Id}_{E^*})^{1/r} > 0$ выбрано так, чтобы h_0 удовлетворяло уравнению при $t = 0$ (выбор $\lambda > 0$ делается, чтобы f_t автоматически масштабировалось с помощью домножения h_t на константу и, следовательно, гарантировалась строгая обратимость). Для части без следа нужно ввести фрикционный член g_t, который тоже помогает получить обратимость линеаризованного оператора и, возможно, может помочь избежать взрывного поведения решения, когда t увеличивается до 1. Выбор, который совместим с решением Яу–Уленбека (2.8) в точке $t = 0$, – это взять

$$g_t = -\varepsilon\left(\frac{\det H_0(z)}{\det h_t(z)}\right)^{\mu} \omega_0^n \otimes \log \widetilde{h}_t^{\circ}, \qquad \varepsilon > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \tag{2.15°}$$

если вспомнить, что $\det h_0 = \det H_0$. Эти правые стороны не зависят от старших производных h_t, поэтому теорема 2.1 гарантирует эллиптичность дифференциальной системы. Более того, справедлива

Теорема 2.2. *Для $\varepsilon \geqslant \varepsilon_0(h_t)$ и $\lambda \geqslant \lambda_0(h_t)(1+\mu^2)$ с достаточно большими $\varepsilon_0(h_t)$ и $\lambda_0(h_t)$ эллиптическая дифференциальная система, определенная уравнениями* (2.9), (2.9°) *и* (2.15), (2.15°), *а именно*

$$\omega_0^{-n}\det\nolimits_{T_X\otimes E^*}({}^T\Theta_{E,h_t} + (1-t)\alpha\omega_0 \otimes \mathrm{Id}_{E^*})^{1/r} = \left(\frac{\det H_0(z)}{\det h_t(z)}\right)^{\lambda} a_0(z),$$

$$\omega_0^{-n}(\omega_0^{n-1}\wedge \Theta^{\circ}_{E,h_t}) = -\varepsilon\left(\frac{\det H_0(z)}{\det h_t(z)}\right)^{\mu} \log \widetilde{h}_t^{\circ},$$

имеет обратимую эллиптическую линеаризацию. Как следствие, для таких значений ε и λ существует открытый интервал $[0, t_0) \subset [0,1]$, на котором решение h_t существует.

Доказательство. Заменим оператор $P\colon C^\infty(X,M) \to C^\infty(X,\mathbb{R}\oplus M_h^{\circ})$, который использовался в доказательстве теоремы 2.1, на $\widetilde{P} = (\widetilde{P}_{\mathbb{R}}, \widetilde{P}^{\circ})$, который определяется через

$$\widetilde{P}_{\mathbb{R}}(h) = \omega_0^{-n}\left(\frac{\det h(z)}{\det H_0(z)}\right)^{\lambda} \det\nolimits_{T_X\otimes E^*}({}^T\Theta_{E,h} + (1-t)\alpha\omega_0\otimes \mathrm{Id}_{E^*})^{1/r},$$

$$\widetilde{P}^{\circ}(h) = \omega_0^{-n}(\omega_0^{n-1}\wedge\Theta^{\circ}_{E,h}) + \varepsilon\left(\frac{\det h(z)}{\det H_0(z)}\right)^{-\mu} \log \widetilde{h}^{\circ}.$$

Здесь нам придется следить за самим линеаризованным оператором dP, а не за его главным символом. Снова положим $u = h^{-1}\delta h \in \mathrm{Herm}_h(E,E)$ и используем формулу (2.11) для $d\Theta_{E,h}(u)$. Это влечет

$$\widetilde{P}_{\mathbb{R}}(h)^{-1}\, d\widetilde{P}_{\mathbb{R},h}(u) = \lambda \operatorname{tr} u - \frac{1}{r}\operatorname{tr}_{T_X\otimes E^*}\bigl(\theta^{-1}\cdot {}^T(i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial} u)\bigr).$$

Мы используем тот факт, что $h^\circ = h \cdot (\det h)^{-1/r}$, если рассматривать его как эрмитов эндоморфизм, имеет логарифмическое изменение:

$$(\widetilde{h}^\circ)^{-1}\delta\widetilde{h}^\circ = u^\circ = u - \frac{1}{r}\operatorname{tr} u \cdot \mathrm{Id}_E\,.$$

Согласно классической формуле, выражающей дифференциал логарифма матрицы, мы имеем

$$d\log g(\delta g) = \int_0^1 ((1-t)\,\mathrm{Id} + tg)^{-1}\delta g((1-t)\,\mathrm{Id} + tg)^{-1}\,dt,$$

что влечет

$$d\log \widetilde{h}^\circ(u) = \int_0^1 ((1-t)\,\mathrm{Id} + t\widetilde{h}^\circ)^{-1}\widetilde{h}^\circ u^\circ((1-t)\,\mathrm{Id} + t\widetilde{h}^\circ)^{-1}\,dt.$$

В итоге мы получаем

$$\begin{aligned}(d\widetilde{P}^\circ)_h(u) &= -\omega_0^{-n}(\omega_0^{n-1}\wedge i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial}u^\circ) + \varepsilon\left(\frac{\det h(z)}{\det H_0(z)}\right)^{-\mu}\\ &\times\left(\int_0^1 ((1-t)\,\mathrm{Id} + t\widetilde{h}^\circ)^{-1}\widetilde{h}^\circ u^\circ((1-t)\,\mathrm{Id} + t\widetilde{h}^\circ)^{-1}\,dt - \mu\operatorname{tr} u\log\widetilde{h}^\circ\right).\end{aligned}$$

Чтобы проверить обратимость, используем норму $|\tau|^2 + C|v|^2$ на $\mathbb{R}\oplus M_h^\circ$ и вычисляем внутреннее L^2-произведение $\langle\!\langle (d\widetilde{P})_h(u), (\tau, u^\circ)\rangle\!\rangle$ над X, где $\tau = (1/r)\operatorname{tr} u$. Эллиптичность оператора $-i\,\partial_H\overline{\partial}$ влечет, что он имеет дискретное множество собственных значений, стремящееся к $+\infty$, и мы получаем неравенство типа Гаардинга вида $\langle\!\langle -i\,\partial_H\overline{\partial}v, v\rangle\!\rangle_H \geqslant c_1\|\nabla v\|_H^2 - c_2\|v\|_H^2$, где $c_1, c_2 > 0$ зависят от H. Применяем эти неравенства к $v=\tau$, $H=1$ и $v = u^\circ$, $H = h^*\otimes h$, заменяя u на $u = \tau\,\mathrm{Id} + u^\circ$. Отсюда выводим, что

$$\begin{aligned}\big\langle\!\big\langle (d\widetilde{P})_h(u), (\tau, u^\circ)\big\rangle\!\big\rangle &\geqslant c_1\|d\tau\|^2 - c_2\|\tau\|^2 + \lambda r\|\tau\|^2\\ &- \frac{1}{r}\big\langle\!\big\langle \operatorname{tr}_{T_X\otimes E^*}(\theta^{-1}\cdot{}^T(i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial}u^\circ)), \tau\big\rangle\!\big\rangle\\ &+ C\big(c_1^\circ\|\nabla u^\circ\|^2 - c_2^\circ\|u^\circ\|^2 + c_3\varepsilon\|u^\circ\|^2 - c_4\varepsilon|\mu|\,\|\tau\|\,\|u^\circ\|\big),\end{aligned}$$

где все константы c_j могут зависеть от h. Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{r}\big\langle\!\big\langle \operatorname{tr}_{T_X\otimes E^*}(\theta^{-1}\cdot{}^T(i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial}u^\circ)), \tau\big\rangle\!\big\rangle\right| &\leqslant c_5\|\nabla u^\circ\|\big(\|d\tau\| + \|\tau\|\big)\\ &\leqslant \frac{1}{2}c_1\big(\|d\tau\|^2 + \|\tau\|^2\big) + c_6\|\nabla u^\circ\|^2,\end{aligned}$$

и мы имеем

$$c_4\varepsilon|\mu|\,\|\tau\|\,\|u^\circ\| \leqslant \frac{1}{2}c_3\varepsilon\|u^\circ\|^2 + c_7\varepsilon\mu^2\|\tau\|^2.$$

Если выбрать

$$\varepsilon \geqslant 2\frac{c_2^\circ}{c_3} + 1, \qquad C \geqslant \frac{c_6}{c_1^\circ} + 1, \qquad \lambda r \geqslant c_2 + \frac{1}{2}c_1 + Cc_7\varepsilon\mu^2 + 1,$$

то мы в итоге получим

$$\big\langle\!\big\langle (d\widetilde{P})_h(u), (\tau, u^\circ)\big\rangle\!\big\rangle \geqslant \frac{1}{2}c_1\|d\tau\|^2 + \|\tau\|^2 + c_1^\circ\|\nabla u^\circ\|^2 + \frac{1}{2}Cc_3\varepsilon\|u^\circ\|^2$$

и заключаем, что $(d\widetilde{P})_h$ является обратимым эллиптическим оператором. Тогда свойство открытости в точке $t = 0$ следует из стандартных результатов об эллиптических уравнениях в частных производных. Теорема доказана.

Замечания 2.3. (a) Теорема 2.2 не совсем подходит для целей настоящей работы, поскольку константы $\varepsilon_0(h_t)$ и $\lambda_0(h_t)$ зависят от решения h_t. Было бы очень важно узнать, можно ли получить настолько универсальные оценки, чтобы сделать эти константы независимыми от h_t и, следовательно, гарантировать существование решений при больших значениях переменной. Это может потребовать каким-нибудь образом модифицировать правые стороны наших уравнений, особенно части без следа, при этом рассматривая похожее детерминантальное уравнение Монжа–Ампера, которое все еще гарантирует двойственную положительность по Накано. Технику итераций Яу, которая использовалась в [15] для получения оценок нулевого порядка для уравнений Монжа–Ампера, возможно, придется адаптировать к этой ситуации.

(b) Отсутствие взрывного поведения решений, когда $t \to 1$, не получается автоматически, поскольку это свойство не может выполняться, когда $\det E$ обильно, а E – нет. Один способ должен состоять в том, чтобы показать, что взрыв в момент времени $t_0 < 1$ дает “дестабилизирующий подпучок” $\mathscr{S}$, что противоречит обильности $E/\mathscr{S}$. Аналогичное было сделано в [13] для нахождения противоречия с гипотезой о стабильности.

Варианты 2.4. (a) Детерминантальное уравнение всегда дает кэлерову метрику

$$\beta_t := \mathrm{tr}_E(\Theta_{E,h_t} + (1-t)\alpha\omega_0 \otimes \mathrm{Id}_E) = \Theta_{\det E, \det h_t} + r(1-t)\alpha\omega_0 > 0.$$

Интересный вариант бесследового уравнения – это

$$\omega_t^{-n}(\omega_t^{n-1} \wedge \Theta^\circ_{E,h_t}) = -\varepsilon\left(\frac{\det H_0(z)}{\det h_t(z)}\right)^{\mu} \log \widetilde{h}_t^\circ, \tag{2.16}$$

где $\omega_t = \dfrac{1}{r\alpha+1}\beta_t$ (заметим, что $\beta_0 = (r\alpha+1)\omega_0$). Важно понять, является ли соответствующая система дифференциальных уравнений по-прежнему эллиптической с обратимой линеаризацией. В соответствии с уравнением (2.16) часть системы дифференциальных уравнений, относящаяся к $\mathrm{Herm}(E,E)^\circ$, зависит от функционала

$$\widetilde{P}^\circ(h) = \omega_0^{-n}\big(\omega_t^{n-1} \wedge \Theta^\circ_{E,h}\big) + \varepsilon\left(\frac{\det h(z)}{\det H_0(z)}\right)^{-\mu} \log \widetilde{h}^\circ,$$

и относительно функционала, используемого в теореме 2.2, дифференциал $d\widetilde{P}_h^\circ(u)$ имеет дополнительный член, приходящий из вариации формы ω_t^{n-1}.

В тех же обозначениях, которые были использованы в предыдущих вычислениях, имеем $\Theta_{\det E,\det h_t} = -i\,\partial\overline{\partial}\log\det(h_t)$ и $\delta(\beta_t)_h(u) = -i\,\partial\overline{\partial}\operatorname{tr} u$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(d\widetilde{P}^\circ)_h(u) = -\omega_0^{-n}\biggl(\omega_t^{n-1}\wedge i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial}u^\circ + \frac{n-1}{r\alpha+1}\omega_t^{n-2}\wedge i\,\partial\overline{\partial}\operatorname{tr} u\wedge\Theta^\circ_{E,h}\biggr)\\ +\varepsilon\biggl(\frac{\det h(z)}{\det H_0(z)}\biggr)^{-\mu}\biggl(\int_0^1\bigl((1-t)\operatorname{Id}+t\widetilde{h}^\circ\bigr)^{-1}\widetilde{h}^\circ u^\circ\bigl((1-t)\operatorname{Id}+t\widetilde{h}^\circ\bigr)^{-1}\,dt\\ -\mu\operatorname{tr} u\log\widetilde{h}^\circ\biggr).\end{aligned}$$

Вновь полагая $\tau = \operatorname{tr} u$, мы видим, что нужно оценить еще один дополнительный член, возникающий во внутреннем L^2-произведении $\langle\!\langle (d\widetilde{P})_h(u), (\tau, u^\circ)\rangle\!\rangle$, а именно

$$\langle\!\langle (\omega_0^n)^{-1}\omega_t^{n-2}\wedge i\,\partial\overline{\partial}\tau\wedge\Theta^\circ_{E,h}, u^\circ\rangle\!\rangle.$$

Мы можем применить тот же аргумент с интегрированием по частям, что и выше, для доказательства того, что линеаризация $(d\widetilde{P})_h$ вновь обратима при подобных предположениях $\lambda\geqslant\lambda_0(h_t)(1+\mu^2)$, по крайней мере для малых значений t. В совсем недавней заметке В. П. Пингали [12] показано, что когда расслоение E является ω_0-стабильным, а в качестве метрики h_0 взята метрика Эрмита–Эйнштейна, бесследовая часть системы дифференциальных уравнений, рассматриваемой в теореме 2.2, имеет решение вида $h_t = h_0 e^{-\psi_t}$, таким образом, всегда "конформное" относительно h_0. В некоторых случаях вызывает сомнение, что метрика h_0 двойственно положительна по Накано. В результате даже в данном идеальном случае не ясно, имеет ли место существование длительного по времени решения для всей системы дифференциальных уравнений, если только не налагаются более сильные ограничения на классы Черна. Кажется, что уравнение (2.16) не влечет подобные препятствия и поэтому может оказаться более подходящим для рассматриваемой проблемы.

(b) На первом шаге к решению (2.6) в [13] рассматриваются уравнения, которые имеют даже более мощные фрикционные члены, берутся правые части вида

$$\omega_0^{n-1}\wedge\Theta_{E,h} = \omega_0^n\otimes(-\varepsilon\log\widetilde{h}+\sigma\widetilde{h}^{-1/2}\Gamma_0\widetilde{h}^{1/2}-\Gamma_0),\qquad \sigma>0,$$

и σ устремляется к нулю в конце анализа. В нашем случае мы можем сделать то же самое, например, добавив член, равный кратности $(\widetilde{h}_t^\circ)^{-1/2}\Gamma_t(\widetilde{h}_t^\circ)^{1/2}-\Gamma_t$ в бесследовое уравнение, поскольку эти члены точно не имеют следа для любого $\Gamma_t\in C^\infty(X,\operatorname{Hom}(E,E))$.

§ 3. Концепция объема Монжа–Ампера для векторных расслоений

Если $E\to X$ – обильное векторное расслоение ранга r, то соответствующее линейное расслоение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)\to Y=\mathbb{P}(E)$ обильно и можно рассмотреть его объем $c_1(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))^{n+r-1}$. Хорошо известно, что это число (которое является целым) совпадает с числом Сегре $\int_X(-1)^n s_n(E)$, где $(-1)^n s_n(E)$ – n-й класс

Сегре расслоения E. Далее, допустим, что E двойственно положительно по Накано (если решение эрмитовой дифференциальной системы Янга–Миллса из § 2 не имеет препятствий, это должно следовать из обильности E). Можно ввести следующее более подходящее понятие объема, которое мы будем называть *объемом Монжа–Ампера расслоения* E:

$$\mathrm{MAVol}(E) = \sup_h \int_X \det\nolimits_{T_X \otimes E^*}((2\pi)^{-1} \cdot {}^T\Theta_{E,h})^{1/r}, \tag{3.1}$$

где супремум берется по всем гладким метрикам h на E таким, что ${}^T\Theta_{E,h}$ положительно по Накано. Этот супремум всегда конечен, и имеем следующее

Утверждение 3.1. *Для любого двойственно положительного по Накано векторного расслоения E мы имеем* $\mathrm{MAVol}(E) \leqslant r^{-n} c_1(E)^n$.

Доказательство. Возьмем такую эрмитову метрику h на E, что ${}^T\Theta_{E,h}$ положительно по Накано, и рассмотрим кэлерову метрику

$$\omega = (2\pi)^{-1}\Theta_{\det E, \det h} = (2\pi)^{-1} \operatorname{tr}_{E^*} \cdot {}^T\Theta_{E,h} \in c_1(E).$$

Если $(\lambda_j)_{1 \leqslant j \leqslant nr}$ – собственные значения ассоциированной эрмитовой формы $(2\pi)^{-1} \cdot {}^T\widetilde{\Theta}_{E,h}$ относительно $\omega \otimes h$, мы имеем

$$\det\nolimits_{T_X \otimes E^*}((2\pi)^{-1} \cdot {}^T\Theta_{E,h})^{1/r} = \Bigl(\prod_j \lambda_j\Bigr)^{1/r} \omega^n,$$

а также

$$\Bigl(\prod_j \lambda_j\Bigr)^{1/(nr)} \leqslant \Bigl(\frac{1}{nr}\Bigr) \sum_j \lambda_j$$

по неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим. Поскольку

$$\sum_j \lambda_j = \operatorname{tr}_\omega\bigl(\operatorname{tr}_{E^*}((2\pi)^{-1} \cdot {}^T\Theta_{E,h})\bigr) = \operatorname{tr}_\omega \omega = n,$$

мы заключаем, что

$$\int_X \det\nolimits_{T_X \otimes E^*}((2\pi)^{-1} \cdot {}^T\Theta_{E,h})^{1/r} \leqslant \int_X \Bigl(\frac{1}{nr} \sum_j \lambda_j\Bigr)^n \omega^n = r^{-n} \int_X \omega^n = r^{-n} c_1(E)^n.$$

Утверждение доказано.

Замечания 3.2. (a) В случае разложимых $E = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant r} E_j$ и $h = \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant r} h_j$ с метриками h_j, нормализованными так, чтобы иметь пропорциональные формы объема $((2\pi)^{-1}\Theta_{E_j,h_j})^n = \beta_j \omega^n$ с подходящими константами $\beta_j > 0$, мы получаем $\beta_j = c_1(E_j)^n / c_1(E)^n$, и неравенство выглядит как

$$\Bigl(\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} c_1(E_j)^n\Bigr)^{1/r} \leqslant r^{-n} c_1(E)^n.$$

Оно является равенством, если $E_1 = \cdots = E_r$, поэтому утверждение 3.1 оптимально в том смысле, что константу r^{-n} нельзя уменьшить. Кажется естественным предположить, что для $E = \bigoplus_{1\leqslant j\leqslant r} E_j$, разлагающегося на различные обильные множители,

$$\mathrm{MAVol}(E) = \Big(\prod_{1\leqslant j\leqslant r} c_1(E_j)^n\Big)^{1/r},$$

т.е. супремум достигается для разложимых метрик $h = \bigoplus h_j$. В случае, когда E является неразложимым расширением $0 \to A \to E \to A \to 0$, где A – обильное линейное расслоение (это возможно, если $H^1(X, \mathscr{O}_X) \neq 0$, например, на абелевом многообразии), мы с уверенностью предполагаем, что $\mathrm{MAVol}(E) = c_1(A)^n$, но супремум не достигается в гладкой метрике, поскольку E полустабильно, но не полистабильно.

(b) Было бы интересно описать “экстремальные метрики” h, в которых достигается супремум в (3.1), когда они существуют. Вычисления в § 2 показывают, что они удовлетворяют некоторому уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\int_X (\det\theta)^{1/r}\cdot \mathrm{tr}_{T_X\otimes E^*}\big(\theta^{-1}\cdot {}^T(i\,\partial_{h^*\otimes h}\overline{\partial}u)\big) = 0 \quad \forall\, u\in C^\infty(X, \mathrm{Herm}(E)),$$

где θ – $(n\times r)$-матрица, представляющая ${}^T\Theta_{E,h}$. После выполнения двух интегрирований по частям, которые освобождают u от какого бы то ни было дифференцирования, мы получаем нелинейную дифференциальную систему порядка 4, которой h должно удовлетворять. Из замечания 3.2, (a) можно сделать предположение, что эта система не всегда разрешима, но добавление подходящих “фрикционных членов” меньшего порядка может сделать ее разрешимой всегда. Это могло бы дать лучшую альтернативу более наивной дифференциальной системе порядка 2, которую мы предложили в § 2, чтобы исследовать гипотезу Гриффитса.

(c) Можно было бы задаться вопросом: что является инфимумом

$$\inf_h \int_X \det{}_{T_X\otimes E^*}((2\pi)^{-1}\cdot {}^T\Theta_{E,h})^{1/r},$$

когда $r > 1$? В случае разложимого $(E,h) = \bigoplus(E_j, h_j)$ мы можем нормализовать Θ_{E_j,h_j}, чтобы они удовлетворяли равенствам $\Theta^n_{E_j,h_j} = f_j\omega^n$ при $\int_X f_j\omega^n = c_1(E_j)^n$, $f_j > 0$. Тогда

$$\int_X \det{}_{T_X\otimes E^*}((2\pi)^{-1}\cdot {}^T\Theta_{E,h})^{1/r} = \int_X (f_1\cdots f_r)^{1/r}\omega^n,$$

и этот интеграл становится сколь угодно малым, если взять f_j большими на непересекающихся открытых множествах и очень маленькими вне этих множеств. Этот пример приводит нас к предположению, что всегда имеет место

$$\inf_h \int_X \det{}_{T_X\otimes E^*}((2\pi)^{-1}\cdot {}^T\Theta_{E,h})^{1/r} = 0$$

для $r > 1$. “Фрикционные члены”, используемые в наших дифференциальных системах, следует выбирать так, чтобы объем не был слишком малым.

Список литературы

[1] B. Berndtsson, "Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations", *Ann. of Math.* (2), **169**:2 (2009), 531–560.

[2] F. Campana, H. Flenner, "A characterization of ample vector bundles on a curve", *Math. Ann.*, **287**:4 (1990), 571–575.

[3] J.-P. Demailly, H. Skoda, "Relations entre les notions de positivités de P. A. Griffiths et de S. Nakano pour les fibrés vectoriels", *Séminaire Pierre Lelong–Henri Skoda* (*Analyse*). *Années* 1978/79, Lecture Notes in Math., **822**, Springer, Berlin, 1980, 304–309.

[4] S. K. Donaldson, "Anti self-dual Yang–Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles", *Proc. London Math. Soc.* (3), **50**:1 (1985), 1–26.

[5] P. A. Griffiths, "Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles", *Global analysis*, Papers in honor of K. Kodaira, Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1969, 181–251.

[6] K. Kodaira, "On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)", *Ann. of Math.* (2), **60** (1954), 28–48.

[7] C. Mourougane, S. Takayama, "Hodge metrics and positivity of direct images", *J. Reine Angew. Math.*, **2007**:606 (2007), 167–178.

[8] S. Nakano, "On complex analytic vector bundles", *J. Math. Soc. Japan*, **7** (1955), 1–12.

[9] M. S. Narasimhan, C. S. Seshadri, "Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface", *Ann. of Math.* (2), **82**:3 (1965), 540–567.

[10] P. Naumann, *An approach to Griffiths conjecture*, arXiv: 1710.10034.

[11] V. P. Pingali, "A vector bundle version of the Monge–Ampère equation", *Adv. Math.*, **360** (2020), 106921, 40 pp.

[12] V. P. Pingali, "A note on Demailly's approach towards a conjecture of Griffiths", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2021 (to appear).

[13] K. Uhlenbeck, S. T. Yau, "On the existence of Hermitian–Yang–Mills connections in stable vector bundles", *Comm. Pure Appl. Math.*, **39**:S, suppl. (1986), 257–293.

[14] H. Umemura, "Some results in the theory of vector bundles", *Nagoya Math. J.*, **52** (1973), 97–128.

[15] Shing-Tung Yau, "On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equation. I", *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**:3 (1978), 339–411.

Жан-Пьер Демайи
(J.-P. Demailly)
UMR 5582 du C.N.R.S., Université Grenoble Alpes,
Institut Fourier, Gières, France
E-mail:
jean-pierre.demailly@univ-grenoble-alpes.fr

Поступила в редакцию
24.02.2020 и 13.07.2020