Séminaire P. LELONG, P. DOLBEAULT, H. SKODA
(Analyse) 24e année, 1983/84
Lecture Notes in Math. **1198**, Springer, pages 98–104

Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre $\mathbb{C}^2$ au-dessus du disque ou du plan

par Jean-Pierre Demailly

Université de Grenoble I, Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associé au C.N.R.S. n° 188
BP 74, F-38402 Saint-Martin d'Hères, France

Nous construisons un exemple simple d'espace fibré holomorphe à fibre $\mathbb{C}^2$ au-dessus du disque ou du plan, dont les automorphismes de transition sont de type exponentiel. Nous montrons en fait que toutes les fonctions holomorphes ou plurisousharmoniques de ce fibré proviennent de fonctions sur la base.

We construct a simple example of a non-Stein holomorphic fiber bundle over the disk or the plane, with fiber $\mathbb{C}^2$ and with structural automorphisms of exponential type. We show in fact that all holomorphic or plurisubharmonic functions on the bundle arise from functions on the base.

0. Introduction.

L'objet de cette note est de donner un exemple aussi simple que possible d'un fibré holomorphe non de Stein à fibre $\mathbb{C}^2$ ayant pour base le disque ou le plan, et dont les automorphismes de transition sont de type exponentiel.

C'est H. Skoda ([6], 1977) qui a donné le premier exemple d'un fibré non de Stein à base et à fibre de Stein, répondant ainsi par la négative à un problème soulevé par J.-P. Serre [5] en 1953. Nous avons par la suite amélioré la construction de H. Skoda pour obtenir un contre-exemple dont la base était simplement connexe [1], [2], mais la démonstration restait obscure du fait de la profusion d'artifices techniques plus ou moins inutiles. Nous espérons avoir ici beaucoup clarifié cet exemple.

Le principe de la construction repose sur une inégalité due à P. Lelong [4], qui impose des restrictions sévères à la croissance des fonctions plurisousharmoniques (psh en abrégé) le long des fibres, cf. lemme 1.1. Cette inégalité entraîne une forte distorsion de la croissance suivant les différentes fibres pour un choix adéquat des automorphismes de transition. Grâce à un calcul d'enveloppe pseudoconvexe utilisant le principe du disque, on en déduit alors que les fonctions psh du fibré sont constantes sur les fibres, cf. théorème 4.6. Dans notre exemple le fibré est de plus topologiquement trivial.

1. Inégalité de convexité de P. Lelong.

Soit Ω une variété analytique complexe complexe de dimension p et V une fonction psh sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$. Étant donné un ouvert $\omega \Subset \Omega$ relativement compact, on pose

$$M(V, \omega, r) = \sup_{\omega \times D(r)} V,$$

où $D(r)$ désigne le polydisque de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{C}^n$. D'après P. Lelong [4], $M(V, \omega, r)$ est fonction convexe croissante de $\log r$; en outre cette fonction est non constante si V est non constante sur au moins une fibre $\{x\} \times \mathbb{C}^n$, $x \in \Omega$.

Nous redémontrons ici l'inégalité de P. Lelong dans le cas particulier où les ouverts considérés dans la base sont des polydisques concentriques de $\mathbb{C}^n$ (l'inégalité générale se déduit d'ailleurs facilement de ce cas particulier).

Lemme 1.1. – *Soit V une fonction psh $\geqslant 0$ sur $\Omega \times \mathbb{C}^n$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}^p$, et $D(\alpha) \Subset D(\beta) \Subset D(\gamma) \Subset \Omega$. Alors pour tout $r > 0$ on a l'inégalité*

$$M(v, D(\alpha), r) \leqslant M(V, D(\beta), r^\sigma) + M(V, D(\gamma), 1)$$

où $\sigma = \log(\gamma/\alpha)/\log(\gamma/\beta) > 1$.

Démonstration. En effet, d'après P. Lelong [4], la fonction $M(V, D(\rho), r)$ est fonction convexe du couple $(\log \rho, \log r)$. On a donc

$$\begin{aligned} M(V, D(\beta), r) &\leqslant \frac{1}{\sigma} M(V, D(\alpha), r^\sigma) + \Big(1 - \frac{1}{\sigma}\Big) M(V, D(\gamma), 1) \\ &\leqslant M(V, D(\alpha), r^\sigma) + M(V, D(\gamma), 1) \end{aligned}$$

si l'on choisit σ tel que

$$\log \beta = \frac{1}{\sigma} \log \alpha + \Big(1 - \frac{1}{\sigma}\Big) \log \gamma. \qquad \square$$

2. Construction du fibré X.

La base du fibré sera un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ contenant le disque $D(0, 3)$. On pose alors

$$\begin{aligned} &\Omega_1 = \Omega \setminus \{-1\}, \qquad \Omega_2 = \Omega \setminus \{1\}, \\ &\Omega_0 = \Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega \setminus \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

On définit un fibré X à fibre $\mathbb{C}^2$ au-dessus de Ω en recollant les deux cartes trivialisantes $\Omega_1 \times \mathbb{C}^2$ et $\Omega_2 \times \mathbb{C}^2$ au moyen de l'automorphisme de transition

$$\tau_{12} : \Omega_0 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \Omega_0 \times \mathbb{C}^2$$

défini par la formule $\tau_{12} = \tau_{01}^{-1} \circ \tau_{02}$ avec

$$\begin{cases} \tau_{01}(x\,;\, z_1, z_2) = \big(x\,;\, z_1\,,\, z_2\, \exp(z_1 u(x))\big) \\ \tau_{02}(x\,;\, z_1, z_2) = \big(x\,;\, z_1\, \exp(z_2 u(x))\,,\, z_2\big) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $x \in \Omega_0$, $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $u(x) = \exp(1/(x^2-1))$. La carte $\Omega_0 \times \mathbb{C}^2$ et les automorphismes τ_{01}, τ_{02} correspondants ont été introduits ici à seule fin de simplifier l'écriture de τ_{12}, bien qu'ils soient en principe superflus pour définir le fibré X.

Une fonction psh V sur X est donc représentée par un triplet $(V_j)_{j=0,1,2}$ de fonctions psh sur $\Omega_j \times \mathbb{C}^2$ liées par les relatlons de transition

$$V_k = V_j \circ \tau_{jk}, \qquad 0 \leqslant j, k \leqslant 2. \tag{2.2}$$

Remarque 2.3. – Il est aisé de voir que le fibré X est trivial au sens C^∞-différentiable, relativement au groupe structural des automorphismes analytiques de la fibre. Soit en effet f_1, f_2, des fonctions C^∞ à support compact dans des voisinages disjoints de 1 et -1 respectivement, égales à 1 sur des voisinages plus petits. On obtient alors une trivialisation globale $\gamma : X \to \Omega \times \mathbb{C}^2$ en recollant les morphismes $\gamma_j : \Omega_j \times \mathbb{C}^2 \to \Omega_j \times \mathbb{C}^2$ de classe C^∞ définis par

$$\begin{cases} \gamma_0(x\,;\, z_1, z_2) = \big(x\,;\, z_1 \exp(-z_2 f_2(x) u(x))\,,\, z_2 \exp(-z_1 f_1(x) u(x))\big) \\ \gamma_1(x\,;\, z_1, z_2) = \big(x\,;\, z_1\,,\, z_2 \exp(z_1(1 - f_1(x)) u(x))\big) \\ \gamma_2(x\,;\, z_1, z_2) = \big(x\,;\, z_1 \exp(z_2(1 - f_2(x)) u(x))\,,\, z_2\big). \end{cases} \tag{2.4}$$

Le lecteur vérifiera que ces morphismes satisfont bien les relations de transition voulues $\gamma_j \circ \tau_{jk} = \gamma_k$.

3. Restrictions sur la croissance des fonctions psh.

On note $\Delta = D(0,1)$ le disque unité dans $\mathbb{C}$, $\omega = D(0, \frac{1}{2}) \Subset \Omega_0$, et on considère les automorphismes du disque définis par

$$h_a(x) = \frac{x + a}{1 + \overline{a} x}, \qquad a \in \Delta.$$

Les inégalités suivantes montrent que la croissance des fonctions psh le long des fibres de X est soumise à des restrictions très fortes.

Proposition 3.1. – *Soit V une fonction psh sur X. Alors il existe une constante $C = C(V) > 0$ telle que pour tous $j = 1, 2$ et $r > 1$ on ait*

$$M(V_j, \omega, r) \leqslant M\big(V_0, \omega, \exp\big((\log r)^3\big)\big) + C.$$

Démonstration. Comme l'application $(x\,;\, z_1, z_2) \mapsto (-x\,;\, z_2, z_1)$ définie sur $\Omega_0 \times \mathbb{C}^2$ s'étend en un automorphisme de X qui échange les cartes $\Omega_1 \times \mathbb{C}^2$ et $\Omega_2 \times \mathbb{C}^2$, il suffit de raisonner pour $j = 1$. Quitte à remplacer V par $V = \max(V, 0)$, on peut également supposer $V \geqslant 0$. Considérons un réel $a \in [0, 1]$ qui sera fixé ultérieurement. L'idée consiste à observer que V est "presque" égale à V_0 sur $h_a(\omega) \times D(r)$ si a est assez proche de 1, parce que la fonction $u(x)$ est très petite sur $h_a(\omega)$. Le lemme 1.1 permet alors de relier la croissance des fonctions V_0 et V_1 sur ω à leur croissance sur $h_a(\omega)$, et donc de comparer V_0 et V_1 sur ω.

L'ouvert $h_a(\omega)$ est le disque déterminé par les points diamétralement opposés $h_a(\pm\frac{1}{2})$, ayant respectivement pour centre le point x_a et pour rayon le réel α tels que

$$x_a = \frac{3a}{4-a^2} \in \,]0,1[, \qquad \alpha = \frac{2(1-a^2)}{4-a^2} \in \Big]0, \frac{1}{2}\Big[.$$

Considérons les deux disques concentriques $D(x_a,\beta) \Subset D(x_a,\gamma)$, eux-mêmes concentriques au disque $h_a(\omega) = D(x_a,\alpha)$, de rayons respectifs $\beta = 1/2 + x_a$, $\gamma = 3/4 + x_a$. On a clairement

$$\log\gamma/\beta > \log(7/4)/(3/2) = \log 7/6 > 1/7,$$
$$\omega \subset D(x_a,\beta), \qquad D(x_a,\gamma) \Subset \Omega_1.$$

D'après le lemme 1.1, il vient donc

$$M(V_1,\omega,r) \leqslant M(V_1,D(x_a,\beta),r) \leqslant M(V_1,h_a(\omega),r^\sigma) + M(V_1,D(1,\tfrac{7}{4}),1) \tag{3.2}$$

avec

$$\sigma = \frac{\log\gamma/\alpha}{\log\gamma/\beta} \leqslant 7\,\log 4/(1-a). \tag{3.3}$$

L'image de $h_a(\omega)$ par l'homographie $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est le disque défini par les points diamétralement opposés $1/(h_a(\pm\frac{1}{2})-1)$, d'où

$$\sup_{x\in h_a(\omega)} \operatorname{Re}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{h_a(-\frac{1}{2})-1} = \frac{1}{3(a-1)},$$
$$\sup_{x\in h_a(\omega)} \log|u(x)| = \sup\frac{1}{2}\Big(\operatorname{Re}\frac{1}{x-1} - \operatorname{Re}\frac{1}{x+1}\Big) < \frac{1}{6(a-1)}.$$

Le choix de a tel que

$$\frac{1}{1-a} = 48\,\log r\cdot\log\log r \tag{3.4}$$

donne pour r assez grand $\sigma \leqslant 8\log\log r$, d'où :

$$\sup_{x\in h_a(\omega)} |u(x)| \leqslant r^{-8\log\log r} \leqslant r^{-\sigma}.$$

L'égalité de définition (2.1) montre alors que

$$\tau_{01}(\{x\}\times D(r^\sigma)) \subset \{x\}\times D(e\,r^\sigma), \qquad \forall x\in h_a(\omega),$$

d'où

$$M(V_1,h_a(\omega),r^\sigma) \leqslant M(V_0,h_a(\omega),e\,r^\sigma). \tag{3.5}$$

Appliquons maintenant le lemme 1.1 à la fonction V_0 et aux disques concentriques

$$D(0,\tfrac{1}{2}) = \omega, \qquad D(0,h_a(\tfrac{1}{2})) \supset h_a(\omega), \qquad D(0,1) = \Delta.$$

Il vient

$$M(V_0,h_a(\omega),r) \leqslant M(V_0,D(0,h_a(\tfrac{1}{2}),r) \leqslant M(V_0,\omega,r^\tau) + M(V_0,\Delta,1) \tag{3.6}$$

avec

$$\tau = \frac{\log 2}{\log 1/h_a(\frac{1}{2})} < \frac{\log 2}{1-h_a(\frac{1}{2})} < \frac{3\log 2}{1-a}.$$

La constante $M(V_0,\Delta,1)$ est finie, car $u(x)$ est bornée (par 1) sur Δ, et on peut écrire

$$M(V_0,\Delta,1) = \max\Big(\sup_{\tau_{10}(\Delta_+\times D(1))} V_1\,,\ \sup_{\tau_{20}(\Delta_-\times D(1))} V_2\Big)$$

avec $\Delta_+ = \Delta\cap\{\mathrm{Re}\,x\geqslant 0\}\Subset\Omega_1$, $\quad\Delta_- = \Delta\cap\{\mathrm{Re}\,x\leqslant 0\}\Subset\Omega_2$. On obtient finalement pour r assez grand

$$\sigma\leqslant 8\,\log\log r, \qquad \tau\leqslant 144\,\log 2\cdot\log r\cdot\log\log r,$$

et en combinant (3.2), (3.5) et (3.6) il vient

$$\begin{aligned} M(V,\omega,r) &\leqslant M(V_0,\omega,e^\tau r^{\sigma\tau}) + C\\ &\leqslant M\big(V_0,\omega,\exp\big(800\,(\log r\ \log\log r)^2\big)\big) + C. \end{aligned}$$ □

4. Distorsion induite par les automorphismes de transition.

On observe maintenant que par définition des fonctions V_j. on a

$$\max_{j=1,\,2} M(V_j,\omega,r) = \sup_{x\in\omega}\ \sup_{z\in K(x,r)} V_0(x,z) \tag{4.1}$$

où $K(x,r) = \tau_{01}(\{x\}\times\overline{D(r)})\cup\tau_{02}(\{x\}\times\overline{D(r)})$. Puisque V_0 est psh, on a l'égalité

$$\sup_{z\in K(x,r)} V_0(x,z) = \sup_{z\in\widehat{K}(x,r)} V_0(x,z) \tag{4.2}$$

où $\widehat{K}(x,r)$ désigne l'enveloppe holomorphe convexe de $K(x,r)$. Pour conclure, on va maintenant estimer la taille de $\widehat{K}(x,r)$ en utilisant le principe du disque (cf. par exemple L. Hörmander [3], th. 2.4.3). Ce "principe" entraîne que pour tous $0<\alpha\leqslant\beta$ on a

$$\Big(\overline{D(\alpha)}\times\overline{D(\beta)}\cup\overline{D(\beta)}\times\overline{D(\alpha)}\Big)^{\widehat{}} = \big\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,;\ |z_1|\leqslant\beta,\ |z_2|\leqslant\beta,\ |z_1z_2|\leqslant\alpha\beta\big\}.$$

Lemme 4.3. – *Pour r assez grand $\widehat{K}(x,r)$ contient le polydisque $D(\hat r)$ de rayon*

$$\hat r = \exp(r/32).$$

Démonstration. On a $\inf_{x\in\omega}|u(x)| = u(\frac{1}{2}) = \exp(-4/3)$. Étant donné $x \in \omega$, notons θ l'argument de $u(x)$. Sur le disque

$$\bigl\{|z_1 - \tfrac{r}{2}\,e^{-i\theta}| < \tfrac{r}{4}\bigr\} \subset \{|z_1 < r\}$$

on a trivialement $\mathrm{Re}(z_1 e^{i\theta}) \geqslant \frac{r}{4}$, donc on obtient

$$|\exp(z_1 u(x))| \geqslant \exp\bigl(\tfrac{r}{4}\exp(-4/3)\bigr) \geqslant \exp\bigl(\tfrac{r}{16}\bigr)$$

et en conséquence

$$\tau_{01}(\{x\}\times D(r)) \supset \{x\}\times \bigl\{|z_1 - \tfrac{r}{2}\,e^{-i\theta}| < \tfrac{r}{4}\,,\ |z_2| < r\ \exp(\tfrac{r}{16})\bigr\}.$$

Par suite $\tau_{0j}(\{x\}\times D(r))$ contient le bidisque de centre $\zeta = (\frac{r}{2}e^{-i\theta}, \frac{r}{2}e^{-i\theta})$ et de birayon

$$(r_1, r_2) = \bigl(\tfrac{r}{4}\,,\ r\ \exp(\tfrac{r}{16}) - \tfrac{r}{2}\bigr) \quad \text{si } j = 1 \qquad \bigl[\text{resp. } (r_2, r_1) \text{ si } j = 2\bigr].$$

D'après le principe du disque, $\widehat{K}(x, r)$ contient alors le bidisque de centre ζ et de rayon moyenne géométrique $\sqrt{r_1 r_2}$. Il en résulte que $\widehat{K}(x, r) \supset D(\hat{r})$ avec

$$\hat{r} = \sqrt{r_1 r_2} - \tfrac{r}{2} = \tfrac{r}{2}\Bigl(\sqrt{\exp(\tfrac{r}{16}) - \tfrac{1}{2}} - 1\Bigr),$$

donc $\hat{r} > \exp(r/32)$ si r est assez grand. □

La proposition 3.1, le lemme 4.3 et les égalités (4.1), (4.2) donnent

$$M\bigl(V_0, \omega, \exp(\tfrac{r}{32})\bigr) \leqslant M\bigl(V_0, \omega, \exp\bigl((\log r)^3\bigr)\bigr) + C. \tag{4.4}$$

Si V est non constante sur au moins une fibre de X, la fonction $M(V_0, \omega, r)$ est, pour r assez grand, strictement croissante convexe en la variable $\log r$, ce qui entraîne

$$M\bigl(V_0, \omega, \exp(\tfrac{r}{32})\bigr) - M\bigl(V_0, \omega, \exp\bigl((\log r)^3\bigr)\bigr) \geqslant c\bigl(\tfrac{r}{32} - (\log r)^3\bigr) \tag{4.5}$$

avec $c > 0$. Le membre de gauche de (4.5) tend donc vers $+\infty$ quand r tend vers $+\infty$, ce qui contredit (4.4). Nous en déduisons par conséquent le résultat suivant.

Théorème 4.6. – *Toute fonction psh V (resp. toute fonction holomorphe F) sur X est constante sur les fibres. En particulier, X n'est pas de Stein.*

Bibliographie

[1] J.-P. Demailly – *Différents exemples de fibrés holomorphes non de Stein* ; Séminaire P. Lelong, H. Skoda (Analyse), 1976/1977, Lecture Notes in Math. n° 694, Springer-Verlag, 15–41.

[2] J.-P. Demailly – *Un exemple de fibré holomorphe non de Stein à fibre* $\mathbb{C}^2$ *ayant pour base le disque ou le plan* ; Inventiones Math. **48** (1978) 293–302.

[3] L. Hörmander – *An introduction to complex analysis in several variables* ; Second edition, North Holland Publishing Company, 1973.

[4] P. Lelong – *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières* (*n variables*) ; Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1968, Séminaire de Mathématiques Supérieures, été 1967, n° 28.

[5] J.-P. Serre – *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein* ; Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953.

[6] H. Skoda – *Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein* ; Inventiones Math. **43** (1977) 97–107.

(juin 1984)