Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d"-cohomologie
Annales de l'Institut Fourier, tome **35**, n$^\circ$4 (1985), p. 189–229.

CHAMPS MAGNÉTIQUES ET INÉGALITÉS DE MORSE POUR LA d"-COHOMOLOGIE

par Jean-Pierre DEMAILLY

0. Introduction.

Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte de dimension n, F un fibré vectoriel holomorphe de rang r et E un fibré holomorphe en droites hermitien de classe $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de X. Soit $D = D' + D''$ la connexion canonique de E et $c(E) = D^2 = D'D'' + D''D'$ la forme de courbure de cette connexion. Désignons par $X(q)$, $0 \leqslant q \leqslant n$, l'ouvert des points de X d'indice q, i.e. l'ouvert des points $x \in X$ en lesquels la forme de courbure $ic(E)(x)$ a exactement q valeurs propres < 0 et $(n-q)$ valeurs propres > 0. On pose également

$$X(\leqslant q) = X(0) \cup X(1) \cup \ldots \cup X(q).$$

Nous démontrons alors les inégalités de Morse suivantes, qui bornent la dimension des espaces de cohomologie $H^q(X, E^k \otimes F)$ en fonction d'invariants intégraux de la courbure de E.

Theorème 0.1. – *Lorsque k tend vers $+\infty$ on a pour tout $q = 0, 1, \ldots, n$ les inégalités asymptotiques suivantes.*

(a) *Inégalités de Morse* :

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \leqslant r\frac{k^n}{n!}\int_{X(q)} (-1)^q \Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n + o(k^n).$$

(b) *Inégalités de Morse fortes* :

$$\sum_{j=0}^{q} (-1)^{q-j} \dim H^j(X, E^k \otimes F) \leqslant r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\leqslant q)} (-1)^q \Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n + o(k^n).$$

Mots-clés : Inégalités de Morse – d"-cohomologie – Fibré linéaire hermitien – Forme de courbure – Champ magnétique – Opérateur de Schrödinger – Identité de Bochner-Kodaira-Nakano – Espace de Moišezon.

(c) *Formule de Riemann-Roch asymptotique* :

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim H^q(X, E^k \otimes F) = r\frac{k^n}{n!}\int_X \Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n + o(k^n).$$

Les estimations 0.1 (a), (b) sont nouvelles à notre connaissance, même dans le cas des variétés projectives. L'égalité asymptotique 0.1 (c) , quand à elle, est une version affaiblie du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, qui est lui-même un cas particulier du thé orème de l'indice d'Atiyah- Singer [1]. Ce dernier théorème permet en effet d'exprimer la caractéristique d'Euler-Poincaré

$$\chi(X, E^k \otimes F) = \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim H^q(X, E^k \otimes F)$$

sous la forme

$$\chi(X, E^k \otimes F) = r\frac{k^n}{n!}c_1(E)^n + P_{n-1}(k)\ ; \tag{0.2}$$

$P_{n-1}(k) \in \mathbb{Q}[k]$ désigne ici un polynôme de degré $\leqslant n-1$ et $c_1(E) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ est la première classe de Chern de E, représentée en cohomologie de De Rham par la $(1,1)$-forme fermée $\frac{i}{2\pi}c(E)$ (cf. par exemple [16]). On observera que la constante numérique de l'inégalité 0.1 (a) est optimale, comme le montre l'exemple du fibré produit tensoriel total $E = \mathcal{O}(1)^{n-q} \boxtimes \mathcal{O}(-1)^q$ au-dessus de $X = (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^n$. Pour ce fibré, on a en effet $X(q) = X$ et

$$\dim H^q(X, E^k) = (k+1)^{n-q}(k-1)^q, k \geqslant 1,$$
$$\int_X \Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n = (-1)^q n!\,.$$

L'existence d'une majoration du type 0.1(a) était conjecturée par Y. T. Siu, qui a successivement démontré le cas particulier où $ic(E)$ est > 0 dans le complémentaire d'un ensemble de mesure nulle [16], puis le cas où $ic(E)$ est $\geqslant 0$ sur X [17]. Nous avons d'ailleurs emprunté à Siu une partie des techniques utilisécs ici, notamment aux §3 et §5. La preuve du théorème 0.1 repose sur la méthode analytique introduite récemment par E. Witten [18], [19]. Cette méthode permet (entre autres) de redémontrer les inégalités de Morse classiques $b_q \leqslant m_q$ sur une variété différentiable compacte M, où b_q désigne le q-ième nombre de Betti et m_q le nombre de points critiques d'indice q d'une fonction de Morse quelconque sur M. Dans notre situation, le rôle de la fonction de Morse est tenu par le choix de la métrique hermitienne sur E. On munit d'autre part X et F de métriques hermitiennes arbitraires, qui interviendront seulement dans les termes $o(k^n)$ des estimations finales. É tant donné un réel $\lambda \geqslant 0$, on considère le sous-complexe $\mathcal{H}^\bullet_k(\lambda)$ du complexe de Dolbeault $\mathcal{C}^\infty_{0,\bullet}(X, E^k \otimes F)$ des $(0,q)$-formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X à valeurs dans $E^k \otimes F$, engendré par les fonctions propres du Laplacien antiholomorphe Δ'' dont les valeurs propres sont $\leqslant k\lambda$. Les groupes de cohomologie du complexe $\mathcal{H}^\bullet_k(\lambda)$ sont alors isomorphes aux groupes $H^q(X, E^k \otimes F)$ (proposition 4.1), de sorte qu'il suffit de savoir borner la dimension des espaces $\mathcal{H}^q_k(\lambda)$. Pour cela, on utilise essentiellement deux outils. Le premier outil consiste en une formule de type Weitzenböck

$$\frac{2}{k}\int_X \langle \Delta'' u, u\rangle = \int_X \frac{1}{k}|\nabla_k u + Su|^2 - \langle Vu, u\rangle + \frac{1}{k}\langle \Theta u, u\rangle \tag{0.3}$$

démontrée au §3, et dérivée de l'identité de Bochner- Kodaira-Nakano non kählérienne [6]. ∇_k désigne ici la connexion hermitienne naturelle sur le fibré $\Lambda^{0,q}T^\star X \otimes E^k \otimes F$, V est un potentiel linéaire d' ordre 0 lié à la courbure du fibré E, enfin S et Θ sont des opérateurs d'ordre 0 provenant de la torsion de la métrique hermitienne sur X et de la courbure de F. L'étude du spectre de Δ'' se trouve donc ramenée à l'étude du spectre de l'opérateur autoadjoint $\nabla_k^\star\nabla_k$ associé à la connexion réelle ∇_k. Le deuxième outil fondamental consiste précisément en un théorème spectral très général relatif aux opérateurs du type $\nabla^\star\nabla$. Soit (M, g) une variété riemannienne $\mathcal{C}^\infty$ de dimension réelle n, E un fibré en droites complexes au- dessus de X, muni d'une connexion hermitienne ∇. Si ∇_k désigne la connexion induite par ∇ sur E^k, on étudie alors le spectre de la forme quadratique

$$Q_k(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{k}|\nabla_k u|^2 - V|u|^2\Big)d\sigma, \qquad u \in L^2(\Omega, E^k) \tag{0.4}$$

pour le problème de Dirichlet, où Ω est un ouvert relativement compact dans M, et où V est un potentiel scalaire continu sur M. D'un point de vue physique, ceci revient à étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger $\frac{1}{k}(\nabla_k^\star\nabla_k - kV)$ associé au champ électrique kV et au champ magnétique kB, où $B = -i\nabla^2$ n'est autre que la 2-forme de courbure de la connexion ∇. C'est dans la présence de ce champ magnétique que réside notre contribution principale par rapport à la méthode de E. Witten [18], [19] (dans le cas de la cohomologie de De Rham le champ magnétique est toujours nul puisque $d^2 = 0$).

En tout point $x \in X$, soit $2s = 2s(x) \leqslant n$ le rang de $B(x)$ et $B_1(x) \geqslant \ldots \geqslant B_s(x) > 0$ les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme antisymétrique associé. On définit une fonction $\nu_{B(x)}(\lambda)$ du couple $(x, \lambda) \in M \times \mathbb{R}$, continue à gauche en λ, en posant

$$v_B(\lambda) = \frac{2^{s-n}\pi^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} - s + 1)} B_1 \ldots B_s \sum_{(p_1,\ldots,p_s)\in\mathbb{N}^s} \big[\lambda - \sum (2p_j + 1)B_j\big]_+^{\frac{n}{2}-s} \tag{0.5}$$

avec la convention $0^0 = 0$. Enfin, si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ désignent les valeurs propres de Q_k (comptées avec multiplicité), on considère la fonction de dénombrement $N_k(\lambda) = \mathrm{card}\{j\,;\ \lambda_j \leqslant \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème 0.6. – *Si $\partial\Omega$ est de mesure nulle, il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ tel que*

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-\frac{n}{2}} N_k(\lambda) = \int_\Omega \nu_B(V + \lambda)\, d\sigma$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$.

Pour démontrer le théorème 0.6, on commence par étudier le cas simple où $M = \mathbb{R}^n$ avec un champ magnétique constant B et avec $V = 0$. Lorsque Ω est un cube, on sait alors expliciter les fonctions propres par une transformation de Fourier partielle qui ramène le problème à celui classique de l'oscillateur harmonique en une variable. L'idée de ce calcul nous a été fortement inspirée par les articles [3], [4] de Y. Colin de Verdière. L'extension du résultat au cas d'un champ magnétique quelconque reprend une idée de [16], consistant à utiliser un pavage de Ω par des cubes assez petits. Notre méthode est néanmoins très différente de celle de Siu, puisque nous travaillons directement sur les formes harmoniques alors que Siu se ramenait aux cochaînes holomorphes via l'isomorphisme de Dolbeault. On gagne ainsi beaucoup en précision sur les estimations cherchées. Le côté des cubes doit être ici choisi d'un ordre de grandeur intermédiaire entre $k^{-\frac{1}{2}}$ et $k^{-\frac{1}{4}}$, par exemple $k^{-\frac{1}{3}}$: $k^{-\frac{1}{2}}$ est en effet la longueur d'onde des premiè res fonctions propres, de sorte que l'action du champ magnétique B n'est pas perceptible à une échelle inférieure ; au-dessus de $k^{-\frac{1}{4}}$, l'oscillation de B est au contraire trop forte. On utilise finalement le principe du minimax pour comparer les valeurs propres sur Ω aux valeurs propres sur les cubes. Dans la méthode ante'rieure de [16] (telle qu'elle est reprise dans [7]), la taille des cubes était choisie égale à $k^{-\frac{1}{2}}$; on peut voir aisément que ce choix était critique pour permettre de borner les effets du champ magnétique indépendamment de k, mais la détermination exacte du spectre devenait alors impossible. Le dernier paragraphe est consacré à l'étude de caractérisations géométriques des espaces de Moišezon [13]. Rappelons qu'un espace analytique compact irréductible X est appelé espace de Moišezon si le corps $K(X)$ des fonctions méromorphes sur X est de degré de transcendance $= n = \dim_{\mathbb{C}} X$. La conjecture de Grauert-Riemenschneider [10] affirme que X est de Moišezon si et seulement si il existe un faisceau quasi-positif $\mathcal{E}$ de rang 1 sans torsion au-dessus de X. Par désingularisation, on se ramène au cas où X est lisse et où $\mathcal{E}$ est le faisceau localement libre des sections d'un fibré en droites E strictement positif sur un ouvert dense de X. Y.T. Siu [17] a résolu récemment la conjecture et l'a renforcée en supposant seulement $ic(E)$ semi-positive et > 0 en au moins un point. L'utilisation du théorème 0.1 (b) permet de trouver des conditions géométriques plus faibles encore, qui n'exigent pas la semi-positivité ponctuelle de $ic(E)$, mais seulement la positivité d'une oertaine intégrale de courbure. Pour $q = 1$, l'inégalité 0.1 (b) implique en effet une minoration du nombre de sections holomorphes de E^k, à savoir:

$$\dim H^0(X, E^k) \geqslant \frac{k^n}{n!} \int_{X(\leqslant 1)} \left(\frac{i}{2\pi} c(E)\right)^n - o(k^n). \tag{0.7}$$

On peut montrer d'autre part, en utilisant un raisonnement classique de Siegel [15] mis en forme par [16] que $\dim H^0(X, E^k) \leqslant \text{cte} \cdot k^{n-1}$ si X n'est pas de Moišezon (cf. théorème 5.1). De là il résulte le

Théorème 0.8. – *Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte connexe de dimension n. Pour que X soit de Moišezon, il suffit que X possède un fibré holomorphe en droites hermitien vérifiant l'une des hypothèses* (a), (b), (c) *ci- dessous.*

(a) $\int_{X(\leqslant 1)} (ic(E))^n > 0$.

(b) $c_1(E)^n > 0$, *et la forme de courbure $ic(E)$ ne possède aucun point d'indice pair $\neq 0$.*

(c) *$ic(E)$ est semi-positive en tout point de X et définie positive en au moins un point de X.*

Ce travail a fait l'objet d'une note [8] du même titre, publiée aux Comptes Rendus. Le présent article est une version améliorée d'un mémoire antérieur [7], qui était plus proche des techniques initiales de Siu, et qui démontrait seulement l'inégalité 0.1 (a) à la constante numérique près; de ce fait, les estimations 0.1 (b) et (c) restaient inaccessibles.

L'auteur remercie vivement MM. Gérard Besson, Alain Dufresnoy, Sylvestre Gallot et tout particulièrement Yves Colin de Verdière, pour de stimulantes conversations qui ont beaucoup contribué à la mise en forme définitive des idées de ce travail, notamment dans le §1.

1. Spectre de l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique constant.

Soit (M, g) une variété riemannienne de classe $\mathcal{C}^\infty$, de dimension réelle n, et $E \to M$ un fibré en droites complexes au-dessus de M, muni d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$. Notons $\mathcal{C}^\infty_q(M, E)$l'espace des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Lambda^q T^*M \otimes E$, et $(?|?)$ l'accouplement sesquilinéaire canonique

$$\mathcal{C}^\infty_q(M, E) \times \mathcal{C}^\infty_q(M, E) \to \mathcal{C}^\infty_{p+q}(M, \mathbb{C}).$$

On suppose donnée une connexion hermitienne D sur E, c'est-à-dire un opérateur différentiel d'ordre un

$$D : \mathcal{C}^\infty_q(M, E) \to \mathcal{C}^\infty_{q+1}(M, E), \qquad 0 \leqslant q < n,$$

vérifiant les identités

$$D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^m f \wedge Du, \tag{1.1}$$

$$d(u|v) = (Du|v) + (-1)^p (u|Dv), \tag{1.2}$$

pour toutes sections $f \in \mathcal{C}^\infty_m(M, \mathbb{C})$, $u \in \mathcal{C}^\infty_p(M, E)$, $v \in \mathcal{C}^\infty_q(M, E)$. Considérons une trivialisation isométrique $\theta : E_{|W} \to W \times \mathbb{C}$ de E au-dessus d'un ouvert $W \subset M$. Les connexions hermitiennes de $E_{|W}$ sont alors toutes données par la formule suivante :

$$Du = du + iA \wedge u,$$

où $u \in \mathcal{C}^\infty_q(W, E) \simeq \mathcal{C}^\infty_q(W, \mathbb{C})$ et où $A \in \mathcal{C}^\infty_1(W, \mathbb{R})$ est une 1-forme *réelle* arbitraire. Le *champ magnétique* (ou forme de courbure) associé à la connexion D est la 2-forme réelle fermée $B = dA$ telle que

$$D^2 u = iB \wedge u$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty_q(M, E)$. B ne dépend donc que de la connexion D, mais pas de la trivialisation θ choisie. Un changement de phase $u = ve^{i\varphi}$ dans θ conduit à remplacer A par $A + d\varphi$. Le choix d'une trivialisation de E et de la 1-forme A correspondante s'interprète physiquement comme le choix d'un potentiel vecteur particulier du champ magnétique B.

Désignons par $|u|$ la norme ponctuelle d'un élément $u \in \Lambda^q T^*M \otimes E$ pour la métrique produit tensoriel des métriques de M et E. Si Ω est un ouvert de M, on note $L^2(\Omega, E)$

(resp. $L^2_q(\Omega, E)$) l'espace L^2 des sections de E (resp. de $\Lambda^q T^*M \otimes E$) au-dessus de Ω, muni de la norme

$$\|u\|^2_\Omega = \int_\Omega |u|^2 d\sigma,$$

où $d\sigma$ est la densité de volume riemannien sur M.

Soit D_k la connexion induite par D sur la puissance tensorielle k-ième E^k, et V un potentiel scalaire sur M, i.e. une fonction réelle continue. Étant donné un ouvert relativement compact $\Omega \subset M$, nous nous proposons de déterminer asymptotiquement lorsque k tend vers $+\infty$ le spectre de la forme quadratique

$$Q_{\Omega,k}(u) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{k}|D_k u|^2 - V|u|^2\Big) d\sigma \tag{1.3}$$

où $u \in L^2(\Omega, E^k)$, avec condition de Dirichlet $u_{|\partial\Omega} = 0$. Le domaine de $Q_{\Omega,k}$ est donc l'espace de Sobolev $W^1_0(\Omega, E^k)$ = adhérence de 1'espace $\mathcal{D}(\Omega, E^k)$ des sections C^∞ de E^k à support compact dans Ω dans l'espace $W^1(M, E^k)$. D'un point de vue physique, ceci revient à étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger $\frac{1}{k}(D^*_k D_k - kV)$ associé au champ magnétique kB et au champ électrique kV, lorsque k tend vers $+\infty$. Nous renvoyons le lecteur à l'article classique [2] pour une étude générale du spectre de l'opérateur de Schrödinger, et aux travaux [3], [4], [5], [9], [12] pour l'étude de problèmes asymptotiques voisins du précédent.

Définition 1.4. – *On désignera par $N_{\Omega,k}(\lambda)$ le nombre de valeurs propres $\leqslant \lambda$ de la forme quadratique $Q_{\Omega,k}$.*

Nous allons d'abord étudier un cas simple qui servira de modèle pour le cas général au §2. On se place dans la situation suivante : $M = \mathbb{R}^n$ avec la métrique constante $g = \sum_{j=1}^n dx_j^2$, Ω est le cube de côté r :

$$\Omega = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n\ ;\ |x_j| < \frac{r}{2},\ 1 \leqslant j \leqslant n\Big\},$$

$V = 0$, et enfin le champ magnétique B est constant, égal à la 2-forme alterée de rang $2s$ donnée par

$$B = \sum_{j=1}^s B_j\, dx_j \wedge dx_{j+s},$$

avec $B_1 \geqslant B_2 \geqslant \cdots \geqslant B_s > 0$, $s \leqslant \frac{n}{2}$. On peut alors choisir une trivialisation de E dont le potentiel vecteur associé est

$$A = \sum_{j=1}^s B_j x_j\, dx_{j+s}.$$

La connexion de E^k s'écrit donc

$$D_k u = du + ikA \wedge u,$$

et la forme quadratique $Q_{\Omega,k}$ est donnée par

$$Q_{\Omega,k}(u) = \frac{1}{k}\int_\Omega \Big[\sum_{1\leqslant j\leqslant s} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_{j+s}} + ikB_j x_j u\Big|^2\Big) + \sum_{j>2s}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2\Big] d\mu$$

où $d\mu$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Si on effectue l'homothétie $X_j = \sqrt{k}\,x_j$, on est ramené à étudier les valeurs propres de la forme quadratique

$$\int_{\sqrt{k}\Omega} \Big[\sum_{1\leqslant j\leqslant s} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial X_j}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial X_{j+s}} + iB_j X_j u\Big|^2\Big) + \sum_{j>2s}\Big|\frac{\partial u}{\partial X_j}\Big|^2\Big] d\mu$$

sur les cubes $\sqrt{k}\Omega$ de côté $\sqrt{k}\,r$. Au champ B, nous associons la fonction de la variable réelle λ définie par

$$\text{(1.5)} \qquad \nu_B(\lambda) = \frac{2^{s-n}\pi^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}-s+1)} B_1\ldots B_s \sum_{(p_1,\ldots,p_s)\in\mathbb{N}^S} [\lambda - \sum(2p_j+1)B_j]_+^{\frac{n}{2}-s}$$

où l'on pose par convention $\lambda_+^0 = 0$ si $\lambda \leqslant 0$ et $\lambda_+^0 = 1$ si $\lambda > 0$. La fonction ν_B est donc croissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$; on observera que ν_B est en fait continue si $s < \frac{n}{2}$. Le spectre de $Q_{\Omega,k}$ est alors décrit asymptotiquement par le théorème suivant, dont l'idée nous a été suggérée par Y. Colin de Verdière [4].

Théorème 1.6. – *Soit R un réel > 0,*

$$P(R) = \Big\{x\in\mathbb{R}^n\ ;\ |x_j| < \frac{R}{2}\Big\}$$

le pavé de côté R, Q_R la forme quadratique

$$Q_R(u) = \int_{P(R)} \Big[\sum_{1\leqslant j\leqslant s} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_{j+s}} + iB_j x_j u\Big|^2\Big) + \sum_{j>2s}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^2\Big] d\mu,$$

et $N_R(\lambda)$ le nombre de valeurs propres $\leqslant \lambda$ de Q_R pour le problème de Dirichlet. Alors pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{R\to+\infty} R^{-n} N_R(\lambda) = \nu_B(\lambda).$$

Lorsque $s = \frac{n}{2}$, ν_B est une fonction en escalier. Les valeurs propres de Q_R se regroupent donc par paquets autour des valeurs $\sum(2p_j+1)B_j$, avec multiplicité approximative $(2\pi)^{-s}B_1\ldots B_s R^n$. Ceci peut s'interpre'ter physiquement comme un phénomène de quantification des états propres. En revenant au problème initial relatif à la forme quadratique $Q_{\Omega,k}$, nous obtenons le

Corollaire 1.7. – $\lim_{k\to+\infty} k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) = r^n \nu_B(\lambda).$ □

Démonstration du théorème 1.6. – On cherche d'abord à majorer $N_R(\lambda)$. Dans ce but, étant donné $u \in W_0^1(P(R))$, on exprime u sous forme de série de Fourier partielle par rapport aux variables $x_{s+1}, \dots, x_n$:

$$u(x) = R^{-\frac{1}{2}(n-s)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^{n-s}} u_\ell(x') \exp\Big(\frac{2\pi i}{R} \ell \cdot x''\Big)$$

où $u_\ell \in W_0^1(\mathbb{R}^s \cap P(R))$, avec les notations

$$x' = (x_1, \dots, x_s), \quad x'' = (x_{s+1}, \dots, x_n),$$
$$\ell \cdot x'' = \ell_1 x_{s+1} + \dots + \ell_{n-s} x_n.$$

L'hypothèse $u \in W_0^1(P(R))$ entraîne que la série

$$\sum |\ell|^2 |u_\ell(x')|^2$$

est dans $L^2(\mathbb{R}^s)$. Posons $\ell' = (\ell_1, \dots, \ell_s)$, $\ell'' = (\ell_{s+1}, \dots, \ell_{n-s})$. La norme $\|u\|_{P(R)}$ et la forme quadratique Q_R sont données par

$$\|u\|^2_{P(R)} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^{n-s}} \int_{\mathbb{R}^s} |u_\ell(x')|^2 \, d\mu(x'),$$

$$Q_R(u) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^{n-s}} \int_{\mathbb{R}^s} \Bigg[\sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \bigg(\Big|\frac{\partial u_\ell}{\partial x_j}\Big|^2 + \Big(\frac{2\pi}{R}\ell_j + B_j x_j\Big)^2 |u_\ell|^2 \bigg) + \frac{4\pi^2}{R^2} |\ell''|^2 |u_\ell|^2 \Bigg] d\mu(x').$$

On obtient par conséquent un problème de Dirichlet à «variables séparées» sur le cube $\mathbb{R}^s \cap P(R)$. En posant $t = x_j + \frac{2\pi \ell_j}{R B_j}$, on est ramené à étudier le spectre de la forme quadratique d'une variable

$$q(f) = \int_R \bigg(\Big|\frac{df}{dt}\Big|^2 + B_j^2 t^2 |f|^2 \bigg) dt,$$

avec $f \in W_0^1\big(\,]-\frac{R}{2}\frac{R}{2}[\, + \frac{2\pi \ell_j}{R B_j}\big)$. On retombe donc sur le problème classique de l'oscillateur harmonique (cf. par exemple [14], Vol. I, p. 142). Sur $\mathbb{R}$, i.e. sans condition de support pour f, la suite des valeurs propres de q est la suite $(2m+1)B_j$, $m \in \mathbb{N}$, et les fonctions propres associées sont données par $\Phi_m(\sqrt{B_j}\, t)$ où Φ_0, $\Phi_1, \dots$ sont les fonctions d'Hermite :

$$\Phi_m(t) = e^{t^2/2} \frac{d^m}{dt^m}(e^{-t^2}).$$

Pour tout $p_j \in \mathbb{N}$, notons $\Psi_{p_j,\ell_j}(x_j)$ la p_j-ième fonction propre de la forme quadratique

$$q(f) = \int_R \bigg(\Big|\frac{df}{dx_j}\Big|^2 + \Big(\frac{2\pi}{R}\ell_j + B_j x_j\Big)^2 |f|^2 \bigg) dx_j \tag{1.8}$$

pour $f \in W_0^1(\,]-\frac{R}{2}\frac{R}{2}[\,)$, et λ_{p_j,ℓ_j} la valeur propre correspondante. On peut alors décomposer chaque fonction u_ℓ en série de fonctions propres, ce qui conduit à écrire u sous la forme

$$u(x) = R^{-\frac{1}{2}(n-s)} \sum_{(p,\ell) \in \mathbb{N}^s \times \mathbb{Z}^{n-s}} u_{p,\ell} \Psi_{p,\ell'}(x') \exp\Big(\frac{2\pi i}{R} \ell \cdot x''\Big) \tag{1.9}$$

avec

$$u_{p,\ell} \in \mathbb{C}, \qquad \Psi_{p,\ell'}(x') = \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} \Psi_{p_j,\ell_j}(x_j).$$

On prendra garde au fait que $\Psi_{p,\ell'}(x') \exp(\frac{2\pi i}{R}\ell \cdot x'')$ n'est pas une vraie fonction propre pour le problème de Dirichlet, car le terme exponentiel prend des valeurs non nulles aux points du bord $x_j = \pm\frac{R}{2}$, $j > s$. Par conséquent, les coefficients $(u_{p,\ell})$ ne sont pas arbitraires si $u \in W_0^1(P(R))$; ils doivent vérifier les conditions d'annulation au bord :

$$\sum_{t_j \in \mathbb{Z}} (-1)^{\ell_j} u_{p,\ell} = 0 \tag{1.10}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n-s$ et tous les indices autres que ℓ_j fixés :

$$p \in \mathbb{N}^s, \quad \ell_1, \ldots, \ell_{j-1},\ \ell_{j+1}, \ldots, \ell_{n-s} \in \mathbb{Z}.$$

Avec l'écriture (1.9), la norme L^2 et la forme quadratique Q_R s'expriment sous la forme

$$\|u\|_{P(R)}^2 = \sum |u_{p,\ell}|^2, \qquad Q_R(u) = \sum \Big(\lambda_{p,\ell'} + \frac{4\pi^2}{R^2}|\ell''|^2\Big)|u_{p,\ell}|^2,$$

où $\lambda_{p,\ell'} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \lambda_{p_j,\ell_j}$. Le principe du minimax 1.20 (b) rappelé plus loin montre que

$$N_R(\lambda) \leqslant \operatorname{card}\Big\{(p,\ell) \in \mathbb{N}^s \times \mathbb{Z}^{n-s}\ ;\ \lambda_{p,\ell'} + \frac{4\pi^2}{R^2}|\ell''|^2 \leqslant \lambda\Big\}. \tag{1.11}$$

Il suffit donc d'obtenir une minoration adéquate de λ_{p_j,ℓ_j}.

Lemme 1.12. – *On a l'inégalité*

$$\lambda_{p_j,\ell_j} \geqslant \max\bigg((2p_j+1)B_j\ ,\ \frac{4\pi^2}{R^2}\Big[\Big(\frac{p_j+1}{2}\Big)^2 + \Big(|\ell_j| - \frac{B_j R^2}{4\pi}\Big)_+^2\Big]\bigg),$$

et celle-ci est stricte si $\ell_j \neq 0$ ou si $\Phi_{p_j}(R\sqrt{B_j}/2) \neq 0$.

La minoration $\lambda_{p_j,\ell_j} \geqslant (2p_j+1)B_j$ résulte en effet du minimax et du fait que les valeurs propres de $q(f)$ sur $\mathbb{R}$ valent $(2p_j+1)B_j$. Pour obtenir l'autre inégalité, on minore (1.8) par la forme quadratique

$$\widehat{q}(f) = \int_{x_j|<R/2} \bigg(\Big|\frac{df}{dx_j}\Big|^2 + \Big(\frac{2\pi}{R}|\ell_j| - B_j\frac{R}{2}\Big)_+^2 |f|^2\bigg) dx_j.$$

Les fonctions propres de $\widehat{q}$ sont les fonctions

$$\sin\frac{\pi}{R}(p_j+1)\Big(x_j + \frac{R}{2}\Big), \qquad p_j \in \mathbb{N}\ ;$$

λ_{p_j,t_j} est donc minorée par la valeur propre correspondante :

$$\frac{4\pi^2}{R^2}\Big[\Big(\frac{p_j+1}{2}\Big)^2 + \Big(|t_j| - \frac{B_j R^2}{4\pi}\Big)_+^2\Big].$$

Les inégalités sont strictes parce que d'une part $q(f) > \widehat{q}(f)$ pour tout $f \neq 0$, et d'autre part $\Phi_{p_j}(\sqrt{B_j}t)$ ne peut être fonction propre de q sur $]-R/2, R/2[+2\pi\ell_j/RB_j$ que si

$$\Phi_{p_j}\big(\pm R\sqrt{B_j}/2 + 2\pi t_j/R\sqrt{B_j}\big) = 0.$$

Comme les zéros de Φ_{p_j} sont algébriques et que π est transcendant, ceci n'est possible que si

$$\ell_j = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_{p_j}(R\sqrt{B_J}/2) = 0. \qquad \square$$

Lemme 1.13. – *Soit $\tau_n(\rho)$ le nombre de points de $\mathbb{Z}^n$ situés dans la boule fermée $\overline{B}(0,\rho) \subset \mathbb{R}^n$. Alors*

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\Big(\rho - \frac{\sqrt{n}}{2}\Big)_+^n \leqslant \tau_n(\rho) \leqslant \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\Big(\rho + \frac{\sqrt{n}}{2}\Big)^n.$$

En effet, la réunion des cubes de côté 1 centrés aux points $x \in \mathbb{Z}^n$ tels que $|x| \leqslant \rho$ est contenue dans la boule $\overline{B}(0, \rho + \frac{\sqrt{n}}{2})$, et contient la boule $\overline{B}(0, \rho - \frac{\sqrt{n}}{2})$ si $\rho \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$, car $\frac{\sqrt{n}}{2}$ est la demi-diagonale du cube ; l'entier $\tau_n(\rho)$ est donc encadré par le volume des boules $\overline{B}(0, \rho \pm \frac{\sqrt{n}}{2})$. $\square$

Nous majorons maintenant $\limsup R^{-n}N_R(\lambda)$ en utilisant (1.11) et les lemmes 1.12, 1.13. Pour $p \in \mathbb{N}^s$ fixé, l'inégalité $\lambda_{p,\ell'} + \frac{4\pi^2}{R^2}|\ell''|^2 \leqslant \lambda$ implique

$$|\ell''| \leqslant \frac{R}{2\pi}\Big(\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\Big)_+^{\frac{1}{2}}, \tag{1.14}$$

et l'inégalité est stricte pour $R > R_0(p)$ assez grand. Lorsque $s < n/2$ le nombre de multi-indices $\ell'' \in \mathbb{Z}^{n-2s}$ correspondants est donc au plus

$$\begin{aligned} &\frac{\pi^{\frac{n}{2}-s}}{\Gamma(\frac{n}{2}-s+1)}\left[\frac{R}{2\pi}\Big(\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\Big)_+^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{n}}{2}\right]^{n-2s} \\ &\qquad \underset{R\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2s-n}\pi^{s-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}-s+1)}R^{n-2s}\Big(\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\Big)_+^{\frac{n}{2}-s}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Lorsque $s = \frac{n}{2}$, ce nombre doit être compté comme valant 1 si $\lambda - \sum(2p_j+1)B_j > 0$ et 0 sinon, ce qui est bien conforme à la convention que nous avons adoptée pour la notation λ_+^0. L'inégalité $\lambda_{p,\ell'} \leqslant \lambda$ implique d'autre part

$$|\ell_j| \leqslant \frac{R}{2\pi}\sqrt{\lambda_+} + \frac{B_jR^2}{4\pi}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s, \tag{1.16}$$

ce qui correspond asymptotiquement à un nombre de multi-indices $\ell' = (\ell_1, \ldots, \ell_s) \in \mathbb{Z}^s$ équivalent à

$$\prod_{j=1}^{s}\frac{B_jR^2}{2\pi} = 2^{-s}\pi^{-s}B_1\ldots B_sR^{2s}. \tag{1.17}$$

La majoration $\limsup R^{-n} N_R(\lambda) \leqslant \nu_B(\lambda)$ s'obtient alors en effectuant le produit de (1.15) par (1.17), et en sommant pour tout $p \in \mathbb{N}^s$ (la somme est finie). □

Pour des questions de convergence qui interviendront au §2, nous aurons besoin également de connaître une majoration de $N_R(\lambda)$ indépendante du champ magnétique B. Une telle estimation uniforme est fournie par la proposition suivante.

Proposition 1.18. – $N_R(\lambda) \leqslant (R\sqrt{\lambda_+} + 1)^n$.

Démonstration. – On majore pour chaque indice j le nombre d'entiers p_j et ℓ_j tels que l'inégalité

$$\lambda_{p,\ell'} + \frac{4\pi^2}{R^2}|\ell''|^2 \leqslant \lambda$$

ait lieu. Le lemme 1.12 implique

$$\operatorname{card}\{p_j\} \leqslant \max(p_j+1) \leqslant \min\Big(\frac{\lambda_+}{B_j}\,,\ \frac{R}{\pi}\sqrt{\lambda_+}\Big), \qquad 1 \leqslant j \leqslant s,$$

tandis que (1.16) entraîne

$$\operatorname{card}\{l_i\} \leqslant \frac{R}{\pi}\sqrt{\lambda_+} + \frac{B_j R^2}{2\pi} + 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

On en déduit par conséquent pour $1 \leqslant j \leqslant s$:

$$\operatorname{card}\{(p_j, l_j)\} \leqslant \Big(\frac{R}{\pi}\sqrt{\lambda_+}\Big)^2 + \frac{\lambda_+}{B_j}\cdot\frac{B_j R^2}{2\pi} + \frac{R}{\pi}\sqrt{\lambda_+}\cdot 1 \leqslant \big(R\sqrt{\lambda_+}+1\big)^2$$

Pour $s < j \leqslant n-s$, l'inégalité (1.14) donne d'autre part

$$|\ell_j| < \frac{R}{2\pi}\sqrt{\lambda_+},$$

d'où $\operatorname{card}\{l_j\} \leqslant \frac{R}{\pi}\sqrt{\lambda_+} + 1$. La proposition 1.18 s'ensuit. □

Fin de la démonstration du théorème 1.6 (minoration de $N_R(\lambda)$).

Pour minorer $N_R(\lambda)$, il suffit d'après 1.20 (a) de construire un espace vectoriel de dimension finie sur lequel $Q_R(u) \leqslant \lambda\|u\|^2_{P(R)}$. On considère pour cela l'espace vectoriel $\mathcal{F}_\lambda$ des combinaisons linéaires de «fonctions propres» du type (1.9), assujetties aux conditions d'annulation au bord (1.10), et sommées sur les indices $(p,\ell) \in \mathbb{N}^s \times \mathbb{Z}^{n-s}$ tels que

$$\lambda_{p,\ell'} + \frac{4\pi^2}{R^2}|\ell''|^2 \leqslant \lambda.$$

D'après le raisonnement de la proposition 1.18, le nombre de conditions (1.10) à réaliser est majoré par

$$\sum_{j=1}^{s}\Big[\operatorname{card}\{p_j\} \times \prod_{1\leqslant i\leqslant s,\, i\neq j}\operatorname{card}\{(p_i,\ell_i)\} \times \prod_{s<i\leqslant n-s}\operatorname{card}\{\ell_i\}\Big]$$
$$+ \sum_{s<j\leqslant n-s}\Big[\prod_{1\leqslant i\leqslant s}\operatorname{card}\{(p_i,\ell_i)\} \times \prod_{s<i\neq j}\operatorname{card}\{\ell_i\}\Big] \leqslant n(R\sqrt{\lambda_+}+1)^{n-1}.$$

L'entier $N_R(\lambda)$ est donc majoré par

$$\dim \mathcal{F}_\lambda \geqslant \operatorname{card}\Big\{(p,\ell) \in \mathbb{N}^s \times \mathbb{Z}^{n-s}\,;\ \lambda_{p,\ell'} + \frac{4\pi^2}{R^2}|\ell''|^2 \leqslant \lambda\Big\} - O(R^{n-1}).$$

En combinant la minoration du lemme 1.13 avec le lemme ci-dessous, l'inégalité $\liminf R^{-n}N_R(\lambda) \geqslant \nu_B(\lambda)$ résulte alors de calculs analogues à ceux que nous avons explicités pour obtenir la majoration de $N_R(\lambda)$.

Lemme 1.19. – *Soit $p \in \mathbb{N}^s$ un multi-indice fixé. Alors il existe une constante $C = C(p,B) \geqslant 0$ telle que*

$$\lambda_{p,\ell'} \leqslant \Big(1 + \frac{C}{R}\Big)\sum_{j=1}^{s}(2p_j+1)B_j$$

lorsque $|\ell_j| \leqslant \frac{B_jR^2}{4\pi}(1 - R^{-\frac{1}{2}})$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

Démonstration. – On utilise à nouveau le minimax et le fait que les fonctions d'Hermite $\Phi_p(\sqrt{B_j}t)$ sont une bonne approximation des fonctions propres de q sur tout intervalle assez grand de centre 0. Lorsque $|\ell_j| \leqslant \frac{B_jR^2}{4\pi}(1 - R^{-\frac{1}{2}})$ et $x_j \in\,]-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}[$, la variable $t = x_j + \frac{2\pi\ell_j}{B_jR}$ qui apparaît dans (1.8) décrit en effet un intervalle contenant $]-\frac{\sqrt{R}}{2}, \frac{\sqrt{R}}{2}[$. On a donc $\lambda_{p_j,\ell_j} \leqslant \widetilde{\lambda}_{p_j}$ où $(\widetilde{\lambda}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est la suite des valeurs propres de la forme quadratique

$$\widetilde{q}(f) = \int \Big[\Big|\frac{df}{dt}\Big|^2 + (B_jt)^2|f|^2\Big]dt, \qquad f \in W_0^1\Big(\Big] - \frac{\sqrt{R}}{2}, \frac{\sqrt{R}}{2}\Big[\Big).$$

Soit χ_R une fonction plateau à support dans $\big[-\frac{\sqrt{R}}{2}, \frac{\sqrt{R}}{2}\big]$, égale à 1 sur $\big[-\frac{\sqrt{R}}{4}, \frac{\sqrt{R}}{4}\big]$, dont la dérivée est majorée par $5/\sqrt{R}$. Pour toute combinaison linéaire

$$f = \sum_{m \leqslant p_j} c_m\Phi_m(\sqrt{B_j}t),$$

la décroissance exponentielle des fonctions Φ_m à l'infini implique pour R assez grand l'inégalité

$$\|f\| \leqslant \Big(1 + C_1\exp\Big(-\frac{R}{C_1}\Big)\Big)\|\chi_Rf\|$$

où $C_1 = C_1(p_j, B_j) > 0$. On en déduit par conséquent:

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}(\chi_Rf) &\leqslant \widetilde{q}(f) + \int_{|t|>\sqrt{R}/4}\Big(\frac{10}{\sqrt{R}}\Big|f\frac{df}{dt}\Big| + \frac{25}{R}|f|^2\Big)\,dt\\
&\leqslant \widetilde{q}(f) + \int_{|t|>\sqrt{R}/4}\Big(\frac{1}{R}\Big|\frac{df}{dt}\Big|^2 + 25\Big(1+\frac{1}{R}\Big)|f|^2\Big)\,dt\\
&\leqslant \Big(1+\frac{C_2}{R}\Big)\widetilde{q}(f) \leqslant \Big(1+\frac{C_2}{R}\Big)(2p_j+1)B_j\,\|f\|^2\\
&\leqslant \Big(1+\frac{C}{R}\Big)(2p_j+1)B_j\,\|\chi_Rf\|^2
\end{aligned}$$

Ceci donne bien $\lambda_{p_j,\ell_j} \leqslant \widetilde{\lambda}_{p_j} \leqslant \big(1+\frac{C}{R}\big)(2p_j+1)B_j$. □

Pour faciliter la tâche du lecteur, nous énonçons maintenant le principe du minimax sous la forme où il nous a servi.

Proposition 1.20 (principe du minimax, cf. [14], Vol. IV, p. 76 et 78). **–** *Soit Q une forme quadratique à domaine dense $D(Q)$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose que Q est bornée inférieurement, i.e. $Q(f) \geqslant -C\|f\|^2$ si $f \in D(Q)$, que $D(Q)$ est complet pour la norme $\|f\|_Q = [Q(f)+(C+1)\|f\|^2]^{\frac{1}{2}}$, et enfin que l'injection $(D(Q), \|\ \|_Q) \hookrightarrow (\mathcal{H}, \|\ \|)$ est compacte. Alors Q a un spectre discret $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots$, et on a les égalités :*

(a) $\lambda_p = \min\limits_{F\subset D(Q)} \max\limits_{f\in F,\,\|f\|=1} Q(f),$

où F décrit l'ensemble des sous-espaces de dimension p de $D(Q)$;

(b) $\lambda_{p+1} = \max\limits_{F\subset D(Q)} \min\limits_{f\in F,\,\|f\|=1} Q(f),$

où F décrit l'ensemble des sous-espaces $\|\ \|_Q$-fermés de codimension p de $D(Q)$.

2. Distribution asymptotique du spectre (cas d'un champ variable).

Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre général décrit au début du §1. Notre objectif est d'étudier le spectre de la forme quadratique $Q_{\Omega,k}$ (cf. (1.3)) dans le cas d'un champ magnétique B et d'un champ électrique V quelconques. Pour tout point $a \in M$, soit

$$B(a) = \sum_{j=1}^{s} B_j(a)\,dx_j \wedge dx_{j+s} \tag{2.1}$$

l'écriture réduite de $B(a)$ dans une base orthonormée convenable $(dx_1, \dots, dx_n)$ de T_a^*M, où $2s = 2s(a) \leqslant n$ est le rang de $B(a)$, et où $B_1(a) \geqslant B_2(a) \geqslant \dots \geqslant B_s(a) > 0$ sont les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme antisymétrique associé. L'égalité de définition 1.5 permet de regarder $\nu_B(\lambda)$ comme une fonction du couple $(a,\lambda) \in M \times \mathbb{R}$. Nous aurons besoin également de considérer la fonction $\overline{\nu}_B(\lambda)$, continue à droite en λ, définie par :

$$\overline{\nu}_B(\lambda) = \lim_{0<\varepsilon\to 0} \nu_B(\lambda+\varepsilon). \tag{2.2}$$

Nous démontrons alors la généralisation suivante du corollaire 1.7.

Théorème 2.3. – *Lorsque k tend vers $+\infty$, le nombre $N_{\Omega,k}(\lambda)$ de valeurs propres $\leqslant \lambda$ de $Q_{\Omega,k}$ vérifie l'encadrement asymptotique*

$$\int_\Omega \nu_B(V+\lambda)\,d\sigma \leqslant \liminf k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) \leqslant \limsup k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) \leqslant \int_\Omega \overline{\nu}_B(V+\lambda)\,d\sigma.$$

La fonction $\lambda \mapsto \int_\Omega \nu_B(V+\lambda)\,d\sigma$ est croissante et continue à gauche ; elle n'a donc au plus qu'un ensemble $\mathcal{D}$ dénombrable de points de discontinuité. L'ensemble $\mathcal{D}$ est d'ailleurs vide si n est impair, car $\nu_B(\lambda)$ est alors continue. De là, on déduit aussitôt le

Corollaire 2.4. – *On suppose que $\partial\Omega$ est de mesure nulle. Alors*

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) = \int_\Omega \nu_B(V+\lambda)\,d\sigma$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{D}$, et la mesure de densité spectrale $k^{-\frac{n}{2}} \frac{d}{d\lambda} N_{\Omega,k}(\lambda)$ converge faiblement sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{d}{d\lambda}\int_\Omega \nu_B(V+\lambda)\,d\sigma$. Si n est impair, la mesure limite est diffuse. $\square$

Le lemme suivant montre que les intégrales du théorème 2.3 ont bien un sens.

Lemme 2.5.

(a) *On a les inégalités*

$$\nu_B(\lambda) \leqslant \overline{\nu}_B(\lambda) \leqslant \lambda_+^{n/2}.$$

(b) *$\nu_B(V)$ (resp. $\overline{\nu}_B(V)$) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur M.*

(c) *En tout point $x \in M$ où $s(x) < \frac{n}{2}$ on a $\nu_B(V)(x) = \overline{\nu}_B(V)(x)$ et $\nu_B(V), \overline{\nu}_B(V)$ sont continues en x.*

(d) *Si n est impair, $\nu_B(V) = \overline{\nu}_B(V)$ est continue sur M.*

Démonstration. – (a) On a toujours $\big(\lambda - \sum(2p_j+1)B_j\big)_+^{\frac{n}{2}-s} \leqslant \lambda_+^{\frac{n}{2}-s}$, et le nombre d'entiers p_j tels que $\lambda - (2p_j+1)B_j$ soit $\geqslant 0$ est majoré par $\frac{\lambda_+}{B_j}$. Comme la quantité numérique figurant dans (1.5) est majorée par 1, l'inégalité (a) s'ensuit.

(b, c) Le rang $s = s(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement sur M, et les valeurs propres $B_1, B_2, \ldots,$ prolongées par $B_j(x) = 0$ pour $j > s(x)$, sont continues sur M. Comme la fonction $t \mapsto t_+^0$ (resp. $t \mapsto (t+0)_+^0$) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement), la semi-continuité de $\nu_B(V)$ et $\overline{\nu}_B(V)$ pose un problème uniquement aux points $a \in M$ au voisinage desquels $s(x)$ n'est pas localement constant. En un tel point $a \in M$, on a nécessairement $s(a) < \frac{n}{2}$, donc $\nu_B(V)(a) = \overline{\nu}_B(V)(a)$; on va alors montrer que $\nu_B(V)$ et $\overline{\nu}_B(V)$ sont continues en a. La continuité des B_j donne $\lim_{x\to a} B_j(x) = 0$ pour $j > s(a)$. Si les entiers $p_1, \ldots, p_{s(a)}$ sont fixés, la sommation figurant dans (1.5) peut s'interpréter comme une somme de Riemann d'une intégrale sur $\mathbb{R}^{s(x)-s(a)}$, et on a donc l'équivalent :

$$\begin{aligned}
&\sum_{(p_j;\ s(a)<j\leqslant s(x))} \Big(V(x) - \sum(2p_j+1)B_j(x)\Big)_+^{\frac{n}{2}-s(x)} \\
&\qquad \sim \int_{t\in\mathbb{R}^{s(x)-s(a)}} \Big[V(a) - \sum_{j=1}^{s(a)}(2p_j+1)B_j(a) - \sum_{j=s(a)+1}^{s(x)} 2t_jB_j(x)\Big]_+^{\frac{n}{2}-s(x)} dt \\
&\qquad = \frac{2^{s(a)-s(x)}\Big(V(a) - \sum(2p_j+1)B_j(a)\Big)_+^{\frac{n}{2}-s(a)}}{(\frac{n}{2}-s(x)+1)\cdots(\frac{n}{2}-s(a))B_{s(a)+1}(x)\cdots B_{s(x)}(x)}\ .
\end{aligned}$$

On obtient bien par conséquent :

$$\lim_{x\to a} \nu_B(V)(x) = \nu_B(V)(a) = \lim_{x\to a} \overline{\nu}_B(V)(x).$$

(d) Est un cas particulier de (c). □

La démonstration du théorème 2.3 repose essentiellement sur deux ingrédients : tout d'abord un principe de localisation asymptotique des fonctions propres, qui s'obtient par application directe du minimax (proposition 2.6) ; d'autre part, la connaissance explicite du spectre de l'opérateur de Schrödinger associé à un champ magnétique constant (cf. §1). Le principe de localisation permet en effet de se ramener au cas d'un champ constant en utilisant un pavage de Ω par des cubes assez petits.

Proposition 2.6. – (a) *Si* $\Omega_1, \cdots, \Omega_N \subset \Omega$ *sont des ouverts* 2 *à* 2 *disjoints, alors*

$$N_{\Omega,k}(\lambda) \geqslant \sum_{j=1}^{N} N_{\Omega_j,k}(\lambda).$$

(b) *Soit* $(\Omega'_j)_{1\leqslant j\leqslant \mathbb{N}}$ *un recouvrement ouvert de* $\overline{\Omega}$ *et* $(\psi_j)_{1\leqslant j\leqslant \mathbb{N}}$ *un système de fonctions* $\psi_f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *à support dans* Ω'_j*, telles que* $\sum \psi_j^2 = 1$ *sur* $\overline{\Omega}$*. On pose*

$$C(\psi) = \sup_{\Omega} \sum_{j=1}^{N} |d\psi_j|^2.$$

Alors

$$N_{\Omega,k}(\lambda) \leqslant \sum_{j=1}^{N} N_{\Omega'_j,k}\Big(\lambda + \frac{1}{k} C(\psi)\Big).$$

Démonstration. – (a) Soit $\mathcal{F}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par la collection de toutes les fonctions propres des formes quadratiques $Q_{\Omega_j,k}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, correspondant à des valeurs propres $\leqslant \lambda$. $\mathcal{F}$ est de dimension

$$\dim \mathcal{F} = \sum_{j=1}^{N} N_{\Omega_j,k}(\lambda)$$

et pour tout $u \in \mathcal{F}$, on a

$$Q_{\Omega,k}(u) = \sum_{j=1}^{N} Q_{\Omega_j,k}(u) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \lambda \|u\|^2_{\Omega'_j} = \lambda \|u\|^2_{\Omega}.$$

Le principe du minimax montre donc que les valeurs propres de $Q_{\Omega,k}$ d'indice $\leqslant \dim \mathcal{F}$ sont $\leqslant \lambda$, d'où l'inégalité (a).

(b) Pour tout $u \in W_0^1(\Omega, E^k)$ il vient

$$\sum_j |D_k(\psi_j u)|^2 = \sum_j \big|\psi_j D_k u + (d\psi_j) u\big|^2 = |D_k u|^2 + \sum_j |d\psi_j|^2 |u|^2$$

car $2\sum\psi_j d\psi_j = d(\sum\psi_j^2) = 0$. On obtient donc

$$\sum_{j=1}^N Q_{\Omega'_j,k}(\psi_j u) = Q_{\Omega,k}(u) + \int_\Omega \frac{1}{k}\sum_{j=1}^N |d\psi_j|^2|u|^2\,d\sigma \leqslant Q_{\Omega,k}(u) + \frac{1}{k}C(\psi)\|u\|^2_\Omega.$$

Si chaque fonction $\psi_j u \in W_0^1(\Omega_j, E^k)$ est orthogonale aux fonctions propres de $Q_{\Omega_j,k}$ de valeurs propres $\leqslant \lambda + \frac{1}{k}C(\psi)$, on en déduit successivement

$$Q_{\Omega_j,k}(\psi_j u) > \Big(\lambda + \frac{1}{k}C(\psi)\Big)\|\psi_j u\|^2_{\Omega_j}, \quad \text{si } \psi_j u \neq 0,$$
$$Q_{\Omega,k}(u) > \lambda\|u\|^2_\Omega, \quad \text{si } u \neq 0.$$

Le principe du minimax 1.20 (b) entraîne alors que $N_{\Omega,k}(\lambda)$ est majoré par le nombre d'équations linéaires imposées à u, soit au plus

$$\sum_{j=1}^N N_{\Omega_j,k}\Big(\lambda + \frac{1}{k}C(\psi)\Big). \qquad \square$$

Soit $W_1, \dots, W_N$ un recouvrement de Ω par des ouverts de carte de la variété M. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver des ouverts $\Omega_i \subset \Omega'_j$, relativement compacts dans W_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, tels que

$$\Omega \supset \bigcup \Omega_j \ \text{(disjointe)}, \quad \text{et } \mathrm{Vol}(\Omega) = \sum \mathrm{Vol}(\Omega_j), \tag{2.7}$$
$$\overline{\Omega} \subset \bigcup \Omega'_j, \qquad \text{et } \sum \mathrm{Vol}(\overline{\Omega}'_j) \leqslant \mathrm{Vol}(\overline{\Omega}) + \varepsilon. \tag{2.8}$$

La proposition 2.6 ramène alors la preuve du théorème 2.3 au cas des ouverts Ω_j et Ω'_j (on observera pour cela que la fonction $\nu_B(V+\lambda)$ est bornée et que la constante $C(\psi)$ est indépendante de k).

En définitive, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$, avec une métrique riemannienne g quelconque. Comme $M = \mathbb{R}^n$ est contractile, le fibré E est alors trivial ; soit A un potentiel vecteur de la connexion D et $B = dA$ le champ magnétique correspondant. Nous démontrons d'abord la version locale suivante du théorème 2.3.

Proposition 2.9. – *Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point fixé, et P_k une suite de pavés cubiques ouverts tels que $P_k \ni a$. On note r_k la longueur du côté de P_k, et on suppose que*

$$r_k \leqslant 1, \qquad \lim k^{\frac12} r_k = +\infty, \qquad \lim k^{\frac14} r_k = 0.$$

Alors quand k tend vers $+\infty$, on a

$$\liminf \frac{k^{-\frac{n}{2}}}{\mathrm{Vol}(P_k)} N_{P_k,k}(\lambda) \geqslant \nu_{B(a)}(V(a)+\lambda),$$
$$\limsup \frac{k^{-\frac{n}{2}}}{\mathrm{Vol}(P_k)} N_{P_k,k}(\lambda) \leqslant \overline{\nu}_{B(a)}(V(a)+\lambda),$$

et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, $N_{P_k,k}(\lambda)$ admet la majoration

$$N_{P_k,k}(\lambda) \leqslant C_K\Big(1 + r_k\sqrt{k\big(\lambda_+ + \max_K V_+\big)}\Big)^n$$

uniforme par rapport à a, dès lors que $P_k \subset K$.

Démonstration. – On va se ramener au théorème 1.6 en effectuant une homothétie de rapport $\sqrt{k}$ sur P_k (c'est pourquoi nous avons dû supposer $\lim k^{\frac{1}{2}} r_k = +\infty$). Le lemme suivant mesure combien le champ magnétique B dévie du champ constant $B(a)$ sur chaque P_k.

Lemme 2.10. – *Sur chaque pavé $\overline{P}_k$, on peut choisir un potentiel $\widetilde{A}_k$ du champ constant $B(a)$ tel que pour tout $x \in \overline{P}_k$ on ait*

$$|A_k(x) - A(x)| \leqslant C_1 r_k^2,$$

où C_1 est une constante $\geqslant 0$ indépendante de k (et indépendante de a si a décrit un compact $K \subset \mathbb{R}^n$).

La régularité $\mathcal{C}^\infty$ de B entraîne en effet une majoration

$$|B(a) - B(x)| \leqslant C_2 r_k, \qquad x \in \overline{P}_k.$$

Soit A'_k un potentiel du champ $B(a) - B(x)$ sur le cube $\overline{P}_k$, calculé au moyen de la formule d'homotopie usuelle pour les ouverts étoilés. On a alors

$$|A'_k(x)| \leqslant C_3 r_k^2,$$

et il suffit de poser $\widetilde{A}_k = A + A'_k$. □

Notons $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées standard de $\mathbb{R}^n$. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ un système de coordonnées linéaires en $x_1, \ldots, x_n$ tel que $(dy_1, \ldots, dy_n)$ soit une base orthonormée au point a pour la métrique g, et tel que dans cette base $B(a)$ s'écrive sous la forme diagonale (2.1) :

$$B(a) = \sum_{j=1}^{s} B_j(a)\, dy_j \wedge dy_{j+s}.$$

Soit $\widetilde{g}$ la métrique constante

$$\widetilde{g} \equiv g(a) = \sum_{j=1}^{n} dy_j^2.$$

Désignons par $D_k = d + ikA \wedge ?$, $D_k = d + ikA_k \wedge ?$ les connexions sur $E^k_{|P_k}$ associées aux potentiels A, $\widetilde{A}_k$, et par $Q_k = Q_{P_k,k}$, $\widetilde{Q}_k$ les formes quadratiques associées respectivement aux connexions D_k, $\widetilde{D}_k$, aux métriques g, $\widetilde{g}$, et aux potentiels scalaires V, $\widetilde{V} \equiv V(a)$ (formule (1.3)).

Lemme 2.11. — *Il existe une suite ε_k tendant vers 0 (dépendant des r_k, mais indépendante de a si a décrit un compact $K \subset \mathbb{R}^n$) telle que si $\|\ \|_g$ et $\|\ \|_{\tilde g}$ désignent les normes L^2 globales associées aux métriques g et $\widetilde{g}$, on ait*

$$(1-\varepsilon_k)\|u\|_{\tilde g}^2 \leqslant \|u\|_g^2 \leqslant (1+\varepsilon_k)\|u\|_{\tilde g}^2,$$
$$(1-\varepsilon_k)\widetilde{Q}_k(u) - \varepsilon_k\|u\|_{\tilde g}^2 \leqslant Q_k(u) \leqslant (1+\varepsilon_k)\widetilde{Q}_k(u) + \varepsilon_k\|u\|_{\tilde g}^2$$

pour tout $u \in W_0^1(P_k)$.

Sur P_k, on a en effet un encadrement :

$$(1-C_4r_k)\,\widetilde{g} \leqslant g \leqslant (1+C_4r_k)\,\widetilde{g},$$

et ceci donne la première inégalité double dans 2.11. Avec la notation $A'_k = A_k - A$, on en déduit

$$\begin{aligned} Q_k(u) &= \int_{P_k} \Big(\frac{1}{k}|\widetilde{D}_k u - ikA'_k \wedge u|_g^2 - V|u|^2\Big)\, d\sigma \\ &\leqslant (1+C_5r_k)\int_{P_k} \Big(\frac{1}{k}|\widetilde{D}_k u - ikA'_k \wedge u|_{\tilde g}^2 - V(a)|u|^2\Big)\, d\widetilde{\sigma} + \eta_k\|u\|_{\tilde g}^2 \end{aligned}$$

avec $\eta_k = \sup_{P_k}|V - V(a)| + C_6r_k$, quantité qui tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. En utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant (1+\alpha)(a^2+\alpha^{-1}b^2)$, le lemme 2.10 implique d'autre part

$$|\widetilde{D}_k u - ikA'_k \wedge u|_{\tilde g}^2 \leqslant (1+\alpha)\Big[\,|\widetilde{D}_k u|_{\tilde g}^2 + \alpha^{-1}C_1^2k^2r_k^4|u|^2\Big].$$

Choisissons $\alpha = \alpha_k = C_1\sqrt{k}r_k^2$. La suite α_k tend vers 0 d'après l'hypothèse $\lim k^{\frac14}r_k = 0$, et il vient

$$\frac{1}{k}|\widetilde{D}_k u - ikA'_k \wedge u|_{\tilde g}^2 \leqslant (1+\alpha_k)\Big[\frac{1}{k}|D_k u|_{\tilde g}^2 + \alpha_k|u|^2\Big].$$

La majoration de Q_k s'ensuit. La minoration s'obtient de même grâce à l'inégalité $(a+b)^2 \geqslant (1-\alpha)(a^2-\alpha^{-1}b^2)$. □

Le lemme 2.11 ramène la preuve de la proposition 2.9 au cas où la mé trique g et le champ magnétique B sont constants :

$$g = \sum_{j=1}^n dy_j^2, \qquad B = \sum_{j=1}^n B_j\, dy_j \wedge dy_{j+s}.$$

On peut supposer de plus $V \equiv 0$ en effectuant la translation $\lambda \mapsto \lambda + V(a)$. La seule difficulté qui subsiste pour appliquer directement le théorème 1.6 vient du fait que les cubes P_k deviennent en général des parallélépipèdes obliques dans les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$; les angles entre les différentes arêtes de chaque P_k et les rapports de leurs longueurs restent toutefois encadrés par des constantes > 0. Pour résoudre cette difficulté, il suffit de paver chaque parallélépipède P_k par des cubes $P_{k,\alpha}$ dont les arêtes sont parallèles aux axes des coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$. Choisissons $\varepsilon \in \,]0,1[$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, soient $(P_{k,\alpha})$, $(P'_{k,\alpha})$ les cubes ouverts de côtés respectifs εr_k, $\varepsilon(1+\varepsilon)r_k$, et de centre commun

$\varepsilon r_k \alpha$. On se bornera à considérer les cubes $P_{k,\alpha}$ contenus dans P_k et les cubes $P'_{k,\alpha}$ rencontrant P_k. On a alors

$$P_k \supset \bigcup_\alpha P_{k,\alpha} \quad \text{(disjointe)}, \quad \text{et} \quad \frac{\sum_\alpha \mathrm{Vol}(P_{k,\alpha})}{\mathrm{Vol}(P_k)} \geqslant 1 - C_7\varepsilon, \tag{2.12}$$

$$P_k \subset \bigcup_\alpha P'_{k,\alpha}, \quad \text{et} \quad \frac{\sum_\alpha \mathrm{Vol}(P'_{k,\alpha})}{\mathrm{Vol}(P_k)} \leqslant 1 + C_7\varepsilon, \tag{2.13}$$

où C_7 est une constante indépendante de k (et aussi de a, si a décrit un compact). Le nombre de cubes $P_{k,\alpha}$, $P'_{k,\alpha}$ qui figurent dans (2.12) ou (2.13) est majoré par $C_8\varepsilon^{-n}$. Comme les cubes $P'_{k,\alpha}$ se recouvrent deux à deux sur une longueur $\varepsilon^2 r_k$ lorsqu'ils sont contigus, on peut construire une partition de l'unité $\sum \psi^2_{k,\alpha} = 1$ sur P_k, avec $\mathrm{Supp}\,\psi_{k,\alpha} \subset P'_{k,\alpha}$ et

$$\sup_{P_k} \sum_\alpha |d\psi_{k,\alpha}|^2 = C(\psi_k) \leqslant C_9(\varepsilon^2 r_k)^{-2}.$$

L'hypothèse $\lim k^{\frac{1}{2}} r_k = +\infty$ entraîne bien $\lim \frac{1}{k} C(\psi_k) = 0$, ce qui permet d'appliquer 2.6 (b). Sur les cubes $P_{k\alpha}$, $P'_{k,\alpha}$ nous sommes maintenant dans la situation du théorème 1.6 : apres homothétie de rapport $\sqrt{k}$, le côté du cube homothétique $\sqrt{k}\,P_{k,\alpha}$ vaut $R_k = \varepsilon r_k \sqrt{k}$ et tend bien vers $+\infty$ par hypothèse. La majoration uniforme de $N_{P_k,k}(\lambda)$ résulte de la proposition 1.18 et du fait que toutes nos constantes $C_1, \ldots, C_9$ étaient uniformes. La proposition 2.9 est démontrée. □

Demonstration du théorème 2.3. – D'après la remarque précédant la proposition 2.9, nous pouvons supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. L'idée du raisonnement est de combiner les propositions 2.6 et 2.9 en utilisant un pavage de Ω par des cubes de côté $r_k = k^{-\frac{1}{3}}$. La mise en ceuvre effective réclame néanmoins un peu de soin à cause des difficultés liées à la non-uniformité éventuelle des $\limsup$ et $\liminf$.

Désignons par $\Pi_{k,\alpha}$, $\Pi'_{k,\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, les cubes ouverts de côtés respectifs

$$k^{-\frac{1}{3}}, \qquad k^{-\frac{1}{3}}(1 + k^{-\frac{1}{8}}) = k^{-\frac{1}{3}} + k^{-\frac{11}{24}}$$

et de centre commun $k^{-\frac{1}{3}}\alpha$. Soit $I(k)$ (resp. $I'(k)$) l'ensemble des indices $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\Pi_{k.\alpha} \subset \Omega$ (resp. $\overline{\Pi}'_{k,\alpha} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$). Comme dans le raisonnement de la proposition 2.9, il existe une partition de l'unité $\sum_{\alpha \in I'(k)} \psi^2_{k,\alpha} = 1$ sur Ω, avec $\mathrm{Supp}\,\psi_{k,\alpha} \subset \Pi'_{k,\alpha}$ et

$$C(\psi_k) = \sup_\Omega \sum_{\alpha \in I'(k)} |d\psi_{k,\alpha}|^2 \leqslant C_{10} k^{\frac{11}{12}},$$

d'où $\lim \frac{1}{k} C(\psi_k) = 0$. On pose

$$\Omega_k = \bigcup_{\alpha \in I(k)} \Pi_{k,\alpha}, \qquad \Omega'_k = \bigcup_{\alpha \in I'(k)} \Pi'_{k,\alpha}$$

et on considère pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$\begin{aligned} f_k &= k^{-\frac{n}{2}} \sum_{\alpha \in I(k)} N_{\Pi_{k,\alpha},k}(\lambda) \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Pi_{k,\alpha})} \mathbb{1}_{\Pi_{k,\alpha}}, \\ f'_k &= k^{-\frac{n}{2}} \sum_{\alpha \in I'(k)} N_{\Pi'_{k,\alpha},k}\Big(\lambda + \frac{1}{k} C(\psi_k)\Big) \frac{1}{\mathrm{Vol}(\Pi_{k,\alpha})} \mathbb{1}_{\Pi_{k,\alpha}} \end{aligned}$$

où $\mathbb{1}_{\Pi_{k,\alpha}}$ désigne la fonction caractéristique de $\Pi_{k,\alpha}$. La proposition 2.6 implique l'encadrement

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\sigma \leqslant k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f'_k \, d\sigma. \tag{2.14}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un point fixé n'appartenant pas à l'ensemble négligeable

$$Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N},\, \alpha \in \mathbb{Z}^n} \partial \Pi_{k,\alpha}.$$

Il existe alors une suite d'indices $\alpha(k) \in \mathbb{Z}^n$ unique telle que $x \in \Pi_{k,\alpha(k)}$. La proposition 2.9 appliquée à la suite des cubes $P_k = \Pi_{k,\alpha(k)}$ (resp. $P'_k = \Pi'_{k,\alpha(k)}$) avec $\mathrm{Vol}(P_k) \sim \mathrm{Vol}\, P'_k$ montre que les suites ponctuelles

$$f_k(x) = \frac{k^{-\frac{n}{2}}}{\mathrm{Vol}(P_k)} N_{P_k,k}(\lambda) \mathbb{1}_{\Omega_k}(x), \qquad f'_k(x) = \frac{k^{-\frac{n}{2}}}{\mathrm{Vol}(P_k)} N_{P'_k,k}(\lambda) \mathbb{1}_{\Omega'_k}(x),$$

sont telles que

$$\begin{cases} \liminf f_k(x) \ \geqslant \nu_{B(x)}(V(x) + \lambda)\, \mathbb{1}_{\Omega}(x) \\ \limsup f'_k(x) \leqslant \overline{\nu}_{B(x)}(V(x) + \lambda)\, \mathbb{1}_{\overline{\Omega}}(x). \end{cases} \tag{2.15}$$

La majoration uniforme de la proposition 2.9 entraîne d'autre part l'existence de constantes C_{11}, C_{12} indépendantes de k, x et λ telles que

$$f_k(x) \leqslant f'_k(x) \leqslant C_{11}\big(1 + \sqrt{\lambda_+ + C_{12}}\,\big)^n.$$

Le théorème 2.3 résulte alors de (2.14), (2.15) et du lemme de Fatou. □

En vue des applications à la géométrie complexe, nous aurons besoin d'une légère généralisation du théorème 2.3. On se donne un fibré hermitien F de rang r et de classe $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de M, muni d'une connexion hermitienne ∇, et des sections continues S du fibré $\Lambda^1_R T^* X \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, F)$ et V du fibré $\mathrm{Herm}(F)$ des endomorphismes hermitiens de F. Soit ∇_k la connexion hermitienne sur $E^k \otimes F$ induite par les connexions D et ∇. Pour abréger les notations, on désignera encore par S et V les endomorphismes $\mathrm{Id}_{E^k} \otimes S$ et $\mathrm{Id}_{E^k} \otimes V$ opérant sur $E^k \otimes F$. Étant donné un ouvert Ω relativement compact dans M, on considère la forme quadratique

$$Q_{\Omega,k}(u) = \int_{\Omega} \Big(\frac{1}{k} |\nabla_k u + Su|^2 - \langle Vu, u \rangle\Big)\, d\sigma,$$

où $u \in W_0^1(\Omega, E^k \otimes F)$. Soient $V_1(x) \leqslant V_2(x) \leqslant \cdots \leqslant V_r(x)$ les valeurs propres de $V(x)$ en tout point $x \in M$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2.16. – *La fonction de dénombrement $N_{\Omega,k}(\lambda)$ des valeurs propres de $Q_{\Omega,k}$ admet pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les estimations asymptotiques*

$$\liminf_{k\to+\infty} \ k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) \geqslant \sum_{j=1}^{r} \int_\Omega \nu_B(V_j+\lambda)\,d\sigma,$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \ k^{-\frac{n}{2}} N_{\Omega,k}(\lambda) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \int_\Omega \overline{\nu}_B(V_j+\lambda)\,d\sigma,$$

où B est le champ magnétique associé à la connexion D sur E.

Démonstration. – Le principe de localisation 2.6 est encore valable dans la présente situation. Il suffit donc de démontrer les inégalités 2.16 lorsque Ω est assez petit. Soit $a \in M$ un point fixé et $(e_1,\ldots,e_r)$ un repère orthonormé $\mathcal{C}^\infty$ de F au-dessus d'un voisinage W de a, tel que $(e_1(a),\ldots,e_r(a))$ soit une base propre pour $V(a)$. Écrivons u sous la forme

$$u = \sum_{j=1}^{r} u_j \otimes e_j$$

où u_j est une section de E^k. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $W'_\varepsilon \subset W$ de a sur lequel

$$\sum_{j=1}^{r}(V_j(a)-\varepsilon)|u_j|^2 \leqslant \langle Vu,u\rangle \leqslant \sum_{j=1}^{r}(V_j(a)+\varepsilon)|u_j|^2$$

On a d'autre part

$$\nabla_k u = \sum_{j=1}^{r} D_k u_j \otimes e_j + u_j \otimes \nabla e_j,$$

et le terme $u_j \otimes \nabla e_j$ peut être absorbé dans Su (ce qui nous ramène en fait au cas où la connexion ∇ est plate). L'encadrement

$$(1-k^{-\frac12})|\nabla_k u|^2 + (1-k^{\frac12})|Su|^2 \leqslant |\nabla_k u + Su|^2 \leqslant (1+k^{-\frac12})|\nabla_k u|^2 + (1+k^{\frac12})|Su|^2$$

montre que le terme Su ne modifie $Q_{\Omega,k}$ que par un facteur multiplicatif $1 \pm \varepsilon$ et par un facteur additif $\pm\varepsilon\|u\|^2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage W_ε de a et un entier $k_0(\varepsilon)$ tels que

$$(1-\varepsilon)\widetilde{Q}_{\Omega.k}(u) - \varepsilon\|u\|^2 \leqslant Q_{\Omega,k}(u) \leqslant (1+\varepsilon)\widetilde{Q}_{\Omega,k}(u) + \varepsilon\|u\|^2$$

dès que $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ et $\Omega \subset W_\varepsilon$, où $\widetilde{Q}_{\Omega,k}$ désigne la forme quadratique

$$\widetilde{Q}_{\Omega.k}(u) = \sum_{j=1}^{r} \int_\Omega \Big(\frac{1}{k}|D_k u_j|^2 - V_j(a)|u_j|^2\Big)\,d\sigma.$$

Comme $\widetilde{Q}_{\Omega,k}$ est une somme directe de r formes quadratiques, le spectre de $\widetilde{Q}_{\Omega.k}$ est la réunion (comptée avec multiplicités) des spectres de chacun des termes de la somme. Le théorème 2.16 s'ensuit. □

3. Identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne.

L'objet des paragraphes qui suivent est de tirer les conséquences du théorème de répartition spectrale 2.16 pour l'étude de la d''-cohomologie des fibrés vectoriels holomorphes hermitiens. Dans ce but, nous aurons besoin de relier le laplacien antiholomorphe Δ'' à l'ope'rateur de Schrödinger d'une connexion réelle adéquate. Ceci se fait au moyen d'une formule particulière de type Weitzenböck, connue en géométrie complexe sous le nom d'identité de Bochner-Kodaira-Nakano.

Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension n et F un fibré vectoriel holomorphe hermitien de rang r au-dessus de X. On sait qu'il existe une unique connexion hermitienne $D = D' + D''$ sur F dont la composante D'' de type $(0,1)$ coincide avec l'opérateur $\overline{\partial}$ du fibré (une telle connexion est dite holomorphe). Soit $c(F) = D^2 = D'D'' + D''D'$ la forme de courbure de F. Munissons X d'une me'trique hermitienne arbitraire ω de type $(1,1)$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'espace $\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X,F)$ des sections de classe $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes F$ se trouve alors muni d'une structure préhilbertienne naturelle. On note $\delta = \delta' + \delta''$ l'adjoint formel de D considéré comme opérateur différentiel sur $\mathcal{C}^\infty(X,F)$, et Λ l'adjoint de l'opérateur $L : u \mapsto \omega \wedge u$.

Nous utiliserons l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano sous la forme générale démontrée dans [6], bien qu'on puisse en fait se contenter, comme le fait Y.T. Siu [16], [17], de la formule moins précise donnée par P. Griffiths. Si A, B sont des opérateurs différentiels sur $\mathcal{C}^\infty(X,F)$, on définit leur anti-commutateur $[A,B]$ par la formule

$$[A,B] = AB - (-1)^{ab}BA$$

où a, b sont les degrés respectifs de A et B. Les opérateurs de Laplace-Beltrami Δ' et Δ'' sont alors donnés classiquement par

$$\Delta' = [D', \delta'] = D'\delta' + \delta' D', \qquad \Delta'' = [D'', \delta'']$$

À la forme de torsion $d'\omega$, nous associons l'opérateur de multiplication extérieure $u \mapsto d'\omega \wedge u$ sur $\mathcal{C}^\infty(X,F)$, de type $(2,1)$, noté simplement $d'\omega$, et l'opérateur τ de type $(1,0)$ défini par $\tau = [\Lambda, d'\omega]$. Nous posons enfin

$$D'_\tau = D' + \tau, \qquad \delta'_\tau = (D'_\tau)^* = \delta' + \tau^*, \qquad \Delta'_\tau = [D'_\tau, \delta'_\tau].$$

On a alors l'identité suivante, pour une démonstration de laquelle le lecteur se reportera à [6].

Proposition 3.1. – *On a* $\Delta'' = \Delta'_\tau + [ic(F), \Lambda] + T_\omega$ *où* T_ω *est l'opérateur d'ordre* 0 *et de type* $(0,0)$ *défini par*

$$T_\omega = \Big[\Lambda, \Big[\Lambda, \frac{i}{2} d'd''\omega\Big]\Big] - [d'\omega, (d'\omega)^*].$$

D'après la théorie de Hodge-De Rham, le groupe de cohomologie $H^q(X,F)$ s'identifie à l'espace des $(0,q)$-formes Δ''-harmoniques à valeurs dans F. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty_{p.q}(X,F)$. La proposition 3.1 nous donne l'égalité

$$(3.2)\quad \int_X |D''u|^2+|\delta''u|^2 = \int_X \langle\Delta''u,u\rangle = \int_X |D'_\tau u|^2+|\delta'_\tau u|^2+\langle[ic(F),\Lambda]u,u\rangle+\langle T_\omega u,u\rangle,$$

où les intégrales sont calculées relativement à l'élément de volume $d\sigma = \frac{\omega^n}{n!}$. En particulier, si u est de bidegré $(0,q)$, on a $\delta'_\tau u = 0$ par raison de bidegré, d'où

$$(3.3)\qquad \int_X \langle\Delta''u,u\rangle = \int_X |D'_\tau u|^2 + \langle[ic(F),\Lambda]u,u\rangle + \langle T_\omega u,u\rangle.$$

On peut également considérer u comme une (n,q)-forme à valeurs dans le fibré

$$\widetilde{F} := F \otimes \Lambda^n TX\ ;$$

on notera $\widetilde{D} = \widetilde{D}'+\widetilde{D}''$ la connexion hermitienne holomorphe de $\widetilde{F}$ et $\widetilde{u}$ l'image canonique de u dans $\mathcal{C}^\infty_{n,q}(X,F)$.

Lemme 3.4. – *On a des diagrammes commutatifs*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty_{0.q}(X,F) & \xrightarrow{D''} & \mathcal{C}^\infty_{0,q+1}(X,F) \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ \mathcal{C}^\infty_{n,q}(X,\widetilde{F}) & \xrightarrow{\widetilde{D}''} & \mathcal{C}^\infty_{n,q+1}(X,\widetilde{F}), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X,F) & \xrightarrow{\Delta''} & \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X,F) \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ \mathcal{C}^\infty_{n,q}(X,\widetilde{F}) & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}''} & \mathcal{C}^\infty_{n,q}(X,\widetilde{F}), \end{array}$$

où les flèches verticales sont les isométries $u \mapsto \widetilde{u}$.

Démonstration. – La commutativité du diagramme de gauche résulte du fait que $\Lambda^n TX$ est un fibré holomorphe (on prendra garde au fait que le résultat correspondant pour D' et $\widetilde{D}'$ est faux). On a donc un diagramme commutatif analogue pour les adjoints δ'', $\widetilde{\delta}''$ et pour Δ'', $\widetilde{\Delta}''$. □

Le lemme 3.4 et l'identité (3.2) nous donnent

$$(3.5)\qquad \int_X \langle\Delta''u,u\rangle = \int_X \langle\widetilde{\Delta}''\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle = \int_X |\widetilde{\delta}'_\tau \widetilde{u}|^2 + \langle[ic(\widetilde{F}),\Lambda]\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle + \langle T_\omega \widetilde{u},\widetilde{u}\,\rangle.$$

Nous allons maintenant transformer légèrement l'écriture de (3.3) et (3.5). La connexion hermitienne holomorphe du fibré $\Lambda^q T^*X$ induit sur le fibré conjugué $\Lambda^{0,q}T^*X$ une connexion dont la composante de type $(1,0)$ coincide avec l'opérateur d'. On en déduit alors une connexion hermitienne naturelle ∇ sur le fibré produit tensoriel $\Lambda^{0,q}T^*X \otimes F$ (on observera que ce fibré vectoriel n'est pas holomorphe en général si $q \neq 0$). Soient ∇' et ∇'' les composantes de ∇ de type $(1,0)$ et $(0,1)$.

Proposition 3.6. – *On a*

$$\nabla' = D' : \mathcal{C}^\infty(\Lambda^{0,q}T^*X \otimes F) \to \mathcal{C}^\infty_{1,0}(\Lambda^{0,q}T^*X \otimes F),$$

et il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^{0.q}T^*X \otimes F) & \stackrel{\nabla''}{\longrightarrow} & \mathcal{C}^\infty_{0,1}(X, \Lambda^{0.q}T^*X \otimes F) \\
\sim \downarrow & & \downarrow \Psi \\
\mathcal{C}^\infty_{n,q}(X, \widetilde{F}) & \stackrel{\widetilde{\delta}''}{\longrightarrow} & \mathcal{C}^\infty_{n-1,q}(X, \widetilde{F}),
\end{array}$$

où les flèches verticales sont des isométries, celle de gauche étant donnée par $u \mapsto \widetilde{u}$.

Démonstration. – L'égalité $\nabla' = D'$ provient du fait que la composante de type $(1,0)$ de la connexion de $\Lambda^{0,q}T^*X$ coincide avec d'. Pour le diagramme, on commence par définir la flèche verticale Ψ. Soit

$$\{?|?\} : (\Lambda^{p_1,q_1}T^*X \otimes \widetilde{F}) \times (\Lambda^{p_2,q_2}T^*X \otimes \widetilde{F}) \longrightarrow \Lambda^{p_1+q_2,q_1+p_2}T^*X$$

l'accouplement sesquilinéaire canonique induit par la métrique sur les fibres de F, et

$$* : \Lambda^{p,q}T^*X \otimes \widetilde{F} \longrightarrow \Lambda^{n-q,n-p}T^*X \otimes \widetilde{F}$$

l'opérateur de Hodge-De Rham-Poincaré défini par

$$\{v| * w\} = \langle v, w\rangle \, d\sigma, \qquad v,\ w \in \Lambda^{p,q}T^*X \otimes \widetilde{F}.$$

On en déduit par composition une isométrie

$$\Psi_0 : \Lambda^{0,1}T^*X \otimes F \xrightarrow{\sim} \Lambda^{n,1}T^*X \otimes \widetilde{F} \xrightarrow{*} \Lambda^{n-1,0}T^*X \otimes \widetilde{F}$$

et la flèche Ψ s'obtient par définition en tensorisant $-i^{-n^2}\Psi_0$ par $\Lambda^{0,q}T^*X$. Pour démontrer la commutativité, on suppose d'abord $q = 0$. Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(F)$. On a classiquement

$$\widetilde{\delta}'\widetilde{u} = - * \widetilde{D}'' * \widetilde{u},$$

et comme $\widetilde{u} \in \mathcal{C}^\infty_{n,0}(X, F)$, il vient $*\widetilde{u} = i^{-n^2}\widetilde{u}$, d'où

$$\widetilde{\delta}'\widetilde{u} = -i^{-n^2} * D''\widetilde{u} = -i^{-n^2} * \sim D''u = -i^{-n^2}\Psi_0(D''u) = \Psi(\nabla''u).$$

Dans le cas où q est quelconque, il suffit de trivialiser $\Lambda^{0,q}T^*X$ au voisinage d'un point x arbitraire, en choisissant un repère orthonormé $(e_1, \ldots, e_N)$ de ce fibré, tel que $\nabla e_1(x) = \cdots = \nabla e_N(x) = 0$. □

On considère maintenant les morphismes de fibrés

$$S' : \Lambda^{0,q}T^*X \otimes F \to \Lambda^{1,0}T^*X \otimes \Lambda^{0,q}T^*X \otimes F$$
$$S'' : \Lambda^{0,q}T^*X \otimes F \to \Lambda^{0,1}T^*X \otimes \Lambda^{0,q}T^*X \otimes F$$

où $S' = \tau = [\Lambda, d'\omega]$, et où S'' est le relevé par les isométries $\sim$ et Ψ du morphisme

$$\tau^* = [(d'\omega)^*, L] : \Lambda^{n,q}T^*X \otimes \widetilde{F} \to \Lambda^{n-1.q}T^*X \otimes \widetilde{F}.$$

D'après la proposition 3.6, on a

$$|D'_\tau u| = |\nabla' u + S' u|, \qquad |\widetilde{\delta}'_\tau \widetilde{u}| = |\nabla'' u + S'' u|.$$

Si on pose $S = S' \oplus S''$, les identités (3.3) et (3.5) impliquent par addition

$$\begin{aligned} 2\int_X \langle \Delta'' u, u\rangle = \int_x |\nabla u + Su|^2 + \int_X \langle [ic(F), \Lambda]u, u\rangle \\ + \int_X \langle [ic(\widetilde{F}), \Lambda]\widetilde{u}, \widetilde{u}\rangle + \langle T_\omega u, u\rangle + \langle T_\omega \widetilde{u}, \widetilde{u}\rangle \end{aligned} \tag{3.7}$$

pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X, F)$.

Soit maintenant E un fibré holomorphe hermitien de rang 1 au-dessus de X. Pour tout entier k, on note D_k et ∇_k les connexions hermitiennes naturelles sur les fibrés $F_k = E^k \otimes F$ et $\Lambda^{0,q} T^\star X \otimes F_k$, et on pose $\Delta''_k = [D''_k, \delta''_k]$. La courbure de F_k (resp. $\widetilde{F}_k$) est donnée par

$$c(F_k) = c(F) + kc(E) \otimes \mathrm{Id}_F, \quad \text{resp.} \quad c(\widetilde{F}_k) = c(\widetilde{F}) + kc(E) \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{F}}. \tag{3.8}$$

Rappelons, bien que ce soit inutile pour la suite, que

$$c(\widetilde{F}) = c(F) + c(\Lambda^n TX) \otimes \mathrm{Id}_F = c(F) + \mathrm{Ricci}(\omega) \otimes \mathrm{Id}_F\,.$$

Nous aurons donc besoin d'évaluer les termes $[ic(E), \Lambda]$. Pour tout point $x \in X$, soient $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_n(x)$ les valeurs propres de $ic(E)(x)$ relativement à la métrique hermitienne ω sur X. Il existe donc un système de coordonnées locales $(z_1, \ldots, z_n)$ centré en x tel que $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ soit une base orthonormée de $T_X X$, et tel que

$$\omega(x) = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\overline{z}_j,$$

$$ic(E)(x) = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \alpha_j(x)\, dz_j \wedge d\overline{z}_j.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère orthonormé de la fibre $E^k_x \otimes F_x$. Pour $v \in \Lambda^{p.q} T^\star X \otimes F_k$, on peut écrire

$$v = \sum_{|I|=p, |J|=q,\, \ell} v_{I,J,\ell}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J \otimes e_\ell, \qquad |v|^2 = 2^{p+q} \sum_{I,J,\ell} |v_{I,J,\ell}|^2$$

Un calcul élémentaire, explicité par exemple dans [6], donne la formule

$$\langle [ic(E), \Lambda]v, v\rangle = 2^{p+q} \sum_{I,J,\ell} (\alpha_I + \alpha_J - \sum_{j=1}^n \alpha_j)|v_{I,J,\ell}|^2 \tag{3.9}$$

avec $\alpha_I = \sum_{j\in I} \alpha_j$. Soit $u \in \Lambda^{0,q} T^\star X \otimes F_k$. Posons

$$u = \sum_{J,\ell} u_{J,\ell}\, d\overline{z}_J \otimes e_\ell.$$

D'après (3.9), il vient

$$\langle [ic(E),\Lambda]u,u\rangle = 2^q \sum_{J,\ell} -\alpha_{\complement J}|u_{J,\ell}|^2,$$
$$\langle [ic(E\rangle,\Lambda]\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle = 2^q \sum_{J,\ell} \alpha_J |u_{J,\ell}|^2.$$

Soit V l'endomorphisme hermitien de $\Lambda^{0,q}T^*X\otimes F_k$ défini par

$$\langle Vu,u\rangle = -\langle [ic(E),\Lambda]u,u\rangle - \langle [ic(E),\Lambda]\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle = 2^q \sum_{J,\ell}(\alpha_{\complement J}-\alpha_J)|u_{J,\ell}|^2. \tag{3.10}$$

Les valeurs propres de V sont donc les coefficients $\alpha_{\complement J}-\alpha_J$, comptés avec multiplicité $r=\mathrm{rang}(F)$. Soit enfin Θ l'endomorphisme hermitien défini par

$$\langle \Theta u,u\rangle = \langle [ic(F),\Lambda]u,u\rangle + \langle [ic(\widetilde{F}),\Lambda]\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle + \langle T_\omega u,u\rangle + \langle T_\omega\widetilde{u},\widetilde{u}\rangle. \tag{3.11}$$

Les identités (3.7-11) impliquent alors

$$\frac{2}{k}\int_X \langle \Delta''_k u,u\rangle = \int_X \frac{1}{k}|\nabla_k u + Su|^2 - \langle Vu,u\rangle + \frac{1}{k}\langle \Theta u,u\rangle \tag{3.12}$$

où les opérateurs S, V, Θ n'agissent que sur la composante $\Lambda^{0,q}T^*X\otimes F$ de $\Lambda^{0,q}T^*X\otimes F_k$. On va donc pouvoir utiliser le théorème 2.16 pour déterminer la distribution spectrale asymptotique de Δ''_k, car le terme $\frac{1}{k}\langle\Theta u,u\rangle$ tend vers 0 en norme.

Soit $h^q_k(\lambda)$ le nombre de valeurs propres $\leqslant k\lambda$ de Δ''_k opérant sur $\mathcal{C}^\infty_{0,q}(E^k\otimes F)$. Le champ magnétique B est ici donné par

$$B = -ic(E) = -\sum_{j=1}^n \alpha_j\, dx_j\wedge dy_j, \qquad z_j = x_j + iy_j. \tag{3.13}$$

Compte-tenu que $\dim_{\mathbb{R}} X = 2n$, le théorème 2.16 se transcrit comme suit.

Théorème 3.14. – *Il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{D}$ tel que pour tout $q=0,1,\ldots,n$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}\smallsetminus\mathcal{D}$ on ait*

$$h^q_k(\lambda) = rk^n \sum_{|J|=q}\int_X \nu_B(2\lambda+\alpha_{\complement J}-\alpha_J)\,d\sigma + o(k^n)$$

lorsque k tend vers $+\infty$.

4. Complexe de Witten et inégalités de Morse.

E. Witten[18], [19] a introduit récemment une nouvelle méthode analytique pour démontrer les inégalités de Morse en cohomologie de de Rham. Nous adaptons ici sa méthode pour l'étude de la d''-cohomologie. La principale différence réside dans le fait que le champ magnétique est toujours nul dans le cas de la cohomologie de de Rham (on a en effet $d^2 = 0$!), et c'est le champ électrique qui intervient seul dans ce cas.

Avec les notations du §3, soit $\mathcal{H}^q_k(\lambda) \subset \mathcal{C}^\infty_{0,q}(X, E^k \otimes F)$ la somme directe des sous-espaces propres de Δ''_k attachés aux valeurs propres $\leqslant k\lambda$. $\mathcal{H}^q_k(\lambda)$ est donc un espace vectoriel de dimension finie

$$h^q_k(\lambda) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^q_k(\lambda).$$

La théorie de Hodge donne un isomorphisme

$$H^q(X, E^k \otimes F) \simeq \mathcal{H}^q_k(0).$$

On posera pour abréger

$$h^q_k = \dim H^q(X, E^k \otimes F) = h^q_k(0).$$

Proposition 4.1. – $\mathcal{H}^\bullet_k(\lambda)$ *est un sous-complexe du complexe de Dolbeault*

$$D''_k : \mathcal{C}^\infty_{0,\bullet}(X, E^k \otimes F).$$

De plus, l'inclusion $\mathcal{H}^\bullet_k(\lambda) \subset \mathcal{C}^\infty_{0,\bullet}(X, E^k \otimes F)$ *et la projection orthogonale*

$$P_\lambda : \mathcal{C}^\infty_{0,\bullet}(X, E^k \otimes F) \to \mathcal{H}^\bullet_k(\lambda)$$

induisent en cohomologie des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Démonstration. – Le fait que $\mathcal{H}^\bullet_k(\lambda)$ soit un sous-complexe de $\mathcal{C}^\infty_{0,\bullet}(X, E^k \otimes F)$ provient de la propriété de commutation des opérateurs D''_k et Δ''_k. Soit maintenant

$$G = \int_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} dP_1$$

l'opérateur de Green du laplacien Δ''_k. Comme $[P_\lambda, \Delta''_k] = 0$, on a les relations $[G, \Delta''_k] = 0$ et

$$\Delta''_k G + P_0 = \mathrm{Id}\,.$$

De plus, $[P_\lambda, D''_k] = [G, D''_k] = 0$. On en déduit donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} - P_\lambda &= \Delta''_k G(\mathrm{Id} - P_\lambda) + P_0(\mathrm{Id} - P_\lambda) = \Delta''_k G(\mathrm{Id} - P_\lambda) \\ &= D''_k\big(\delta''_k G(\mathrm{Id} - P_\lambda)\big) + \big(\delta''_k G(\mathrm{Id} - P_\lambda)\big) D''_k, \end{aligned}$$

de sorte que l'opérateur $\delta''_k G(Id - P_\lambda)$ est une homotopie entre Id et P_λ. □

On utilise maintenant un lemme classique simple d'algèbre homologique.

Lemme 4.2. – *Soit*

$$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \longrightarrow 0$$

un complexe d'espaces vectoriels de dimensions finies c^0, c^1, …, c^n sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $h^q = \dim_{\mathbb{K}} H^q(C^\bullet)$. Alors, on a les inégalités suivantes:

(a) *Inégalités de Morse : $h^q \leqslant c^q$, $0 \leqslant q \leqslant n$.*

(b) *Égalité des caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi(H^\bullet(C^\bullet)) = \chi(C^\bullet)$:*

$$h^0 - h^1 + \cdots + (-1)^n h^n = c^0 - c^1 + \cdots + (-1)^n c^n.$$

(c) *Inégalités de Morse fortes : pour tout q, $0 \leqslant q \leqslant n$,*

$$h^q - h^{q-1} + \cdots + (-1)^q h^0 \leqslant c^q - c^{q-1} + \cdots + (-1)^q c^0.$$

Démonstration. – Si $Z^q = \operatorname{Ker} d^q$ et $B^q = \operatorname{Im} d^{q-1}$ ont pour dimensions z^q et b^q, l'égalité (b) résulte en effet des formules

$$c^q = z^q + b^{q+1}, \qquad h^q = z^q - b^q,$$

tandis que (c) résulte de (b) appliqué au complexe

$$0 \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^{q-1} \to Z^q \to 0. \qquad \square$$

Si F est un fibré vectoriel holomorphe sur X, on définit sa caractéristique d'Euler-Poincaré par

$$\chi(X, F) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \dim H^q(X, F).$$

En combinant la proposition 4.1 et le lemme 4.2, nous obtenons pour tout $\lambda \geqslant 0$ et tout q, $0 \leqslant q \leqslant n$, l'inégalité

$$h_k^q - h_k^{q-1} + \cdots + (-1)^q h_k^0 \leqslant h_k^q(\lambda) - h_k^{q-1}(\lambda) + \cdots + (-1)^q h_k^0(\lambda).$$

Évaluons maintenant $h_k^q(\lambda)$ au moyen du théorème 3.14 et faisons tendre $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{D}$ vers 0 par valeurs > 0. Il s'ensuit :

Corollaire 4.3. – *On a les inégalités asymptotiques*

(a) $h_k^q \leqslant k^n I^q + o(k^n)$,

(b) $\chi(X, E^k \otimes F) = k^n(I^0 - I^1 + \cdots + (-1)^n I^n) + o(k^n)$,

(c) $h_k^q - h_k^{q-1} + \cdots + (-1)^q h_k^0 \leqslant k^n(I^q - I^{q-1} + \cdots + (-1)^q I^0) + o(k^n)$,

où I^q désigne l'intégrale de courbure

$$I^q = r \sum_{|J|=q} \int_X \overline{\nu}_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J) d\sigma.$$

D'après (3.13), les modules des valeurs propres du champ magnétique B sont les $|\alpha_j|$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Pour tout point $x \in X$, rangeons ces valeurs propres en sorte que

$$|\alpha_1 \geqslant |\alpha_2| \geqslant \cdots \geqslant |\alpha_s| > 0 = |\alpha_{s+1}| = \cdots = |\alpha_n|, \qquad s = s(x).$$

La formule (1.5) donne

$$\overline{\nu}_B(a_{\complement J} - \alpha_J) = \frac{2^{s-2n}\pi^{-n}}{\Gamma(n-s+1)}|\alpha_1 \ldots \alpha_s| \sum_{(p_1,\ldots,p_s)} \Big\{\alpha_{\complement J} - \alpha_J - \sum(2p_j+1)|\alpha_j|\Big\}_+^{n-s}$$

avec la notation $\{\lambda\}_+^0 = 0$ si $\lambda < 0$ et $\{\lambda\}_+^0 = 1$ si $\lambda \geqslant 0$. Comme la quantité

$$\alpha_{\complement J} - \alpha_J - \sum(2p_j+1)|\alpha_j|$$

est toujours $\leqslant 0$, $\overline{\nu}_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J)$ ne peut être non nul que si $s = n$. Dans ce dernier cas $\alpha_{\complement J} - \alpha_J - \sum(2p_j+1)|\alpha_j| = 0$ si et seulement si $p_1 = \cdots = p_n = 0$ et $\alpha_j < 0$ pour $j \in J$, $\alpha_j > 0$ pour $j \in \complement J$. Ceci entraîne que la forme $ic(E)$ est non dégénérée d'indice q. Pour $x \in X(q)$ (cf. notations de l'introduction) et $|J| = q$, on a donc

$$\overline{\nu}_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J) = (2\pi)^{-n}|\alpha_1 \ldots \alpha_n| > 0$$

si J est le multi-indice $J(x) = \{j\,;\ \alpha_j(x) < 0\}$ et $\overline{\nu}_B(\alpha_{\complement J} - \alpha_J) = 0$ si $J \neq J(x)$. Il s'ensuit

$$I^q = r\int_{X(q)} (2\pi)^{-n}(-1)^q \alpha_1 \ldots \alpha_n \, d\sigma = \frac{r}{n!}\int_{X(q)} (-1)^q\Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n.$$

Le théorème fondamental 0.1 n'est alors qu'une reformulation du corollaire 4.3. Le raisonnement ci-dessus montre que les formes harmoniques de $H^q(X, E^k \otimes F)$ se concentrent asymptotiquement sur $X(q)$, et qu'en chaque point de $X(q)$ leur direction tend à s'aligner sur le q-sous-espace de TX correspondant à la partie négative de $ic(E)$. De plus, seule la valeur propre d'énergie minimale $p_1 = \cdots = p_n = 0$ de l'oscillateur harmonique intervient pour ces formes. Pour $q = 1$, l'inégalité de Morse forte 4.3 (c) s'écrit

$$h_k^1 - h_k^0 \leqslant k^n(I^1 - I^0) + o(k^n),$$

d'où en particulier une minoration asymptotique du nombre de sections holomorphes du fibré $E^k \otimes F$.

Théorème 4.4. – *On a*

$$\dim H^0(X, E^k \otimes F) \geqslant r\frac{k^n}{n!}\int_{X(\leqslant 1)} \Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n - o(k^n).$$

Plus généralement, l'addition des inégalités 4.3 (c) pour les indices $q+1$ et $q-2$ entraîne

$$h_k^{q+1} - h_k^q + h_k^{q-1} \leqslant k^n(I^{q+1} - I^q + I^{q-1}) + o(k^n),$$

d'où la minoration

$$\dim H^q(X, E^k \otimes F) \geqslant r\frac{k^n}{n!}\sum_{j=0,\pm 1}(-1)^q\int_{X(q+j)}\Big(\frac{i}{2\pi}c(E)\Big)^n - o(k^n). \tag{4.5}$$

5. Caractérisation des variétés de Moišezon.

Soit X une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte connexe de dimension n. On appelle dimension algébrique de X, notée $a(X)$, le degré de transcendance sur $\mathbb{C}$ du corps $K(X)$ des fonctions méromorphes sur X. D'après un théorème bien connu de Siegel [15], la dimension algébrique de X vérifie toujours l'inégalité $0 \leqslant a(X) \leqslant n$. Lorsque $a(X) = n$, on dit que X est un espace de Moišezon. Comme on va le voir, la dimension algébrique de X impose asymptotiquement de fortes contraintes sur la dimension des espaces de sections d'un fibré vectoriel holomorphe.

Théorème 5.1. – *Soit a la dimension algébrique de X, F un fibré vectoriel holomorphe de rang r et E un fibré linéaire sur X. Alors, il existe une constante $C_E \geqslant 0$ ne dépendant que de E telle que*

$$\dim H^0(X, E^k \otimes F) \leqslant C_E r k^a + o(k^a).$$

Démonstration. – Nous reprenons pour l'essentiel les arguments de Y.T. Siu [16]. Soit $\{W_\ell\}$ un recouvrement de X par des ouverts de coordonnées $W_\ell \subset \mathbb{C}^n$, et $B_j = B(a_j, R_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, une famille de boules relativement compactes dans les ouverts W_ℓ, telles que les boules concentriques $B'_j = B(a_j, \frac{1}{7}R_j)$ recouvrent X. Munissons E, F de métriques hermitiennes, et soit $\exp(-\varphi_j)$ le poids représentant la métrique de E dans une trivialisation de E au voisinage de $\overline{B}_j$.

Soit alors $s \in H^0(X, E^k \otimes F)$ une section holomorphe qui s'annule à l'ordre p en un point $x_j \in B'_j$. Les inclusions

$$B'_j \subset B(x_j, \frac{2}{7}R_j) \subset B(x_j, \frac{6}{7}R_j) \subset B_j$$

et le lemme de Schwarz appliqué aux deux boules intermédiaires entraînent l'inégalité

$$\sup_{B'_j}|s| \leqslant \exp(Ak + C_F)3^{-p}\sup_{B_j}|s|, \tag{5.2}$$

où $A = \max_{1\leqslant j\leqslant m}\operatorname{diam}\varphi_j(B_j)$ ne dépend que de E, et où C_F est une constante $\geqslant 0$ qui dépend de la métrique de F.

Soit $\rho \leqslant r = \operatorname{rang}(F)$ le maximum pour $x \in X$ de la dimension du sous-espace de la fibre F_x engendré par les vecteurs $s(x)$ lorsque s décrit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H^0(X, E^k \otimes F)$. Si $\rho = 0$, alors $H^0(X, E^k \otimes F) = 0$ pour tout k. Distinguons maintenant deux cas suivant que $\rho = 1$ ou $\rho > 1$.

(a) *Supposons $\rho = 1$.*

Soit $h_k = \dim H^0(X, E^k \otimes F)$, supposée > 0. Sous l'hypothèse $\rho = 1$, les sections globales de $E^k \otimes F$ définissent une application holomorphe

$$\Phi_k : X \smallsetminus Z_k \to \mathbb{P}^{h_k-1}(\mathbb{C})$$

où $Z_k \subset X$ est le sous-ensemble analytique de leurs zéros communs. Soit d le rang maximum de la différentielle Φ'_k sur $X \smallsetminus Z_k$. On a nécessairement $d \leqslant a$, sinon le corps des fractions rationnelles de $\mathbb{P}^{h_k-1}(\mathbb{C})$ induirait un corps de fonctions méromorphes sur X de degré de transcendance $\geqslant d > a$, ce qui est absurde. Choisissons pour tout $j = 1, \ldots, m$ un point $x_j \in B'_j \smallsetminus Z_k$ tel que Φ'_k soit de rang maximum $= d$ en x_j, et soit $s_0 \in H^0(X, E^k \otimes F)$ une section qui ne s'annule en aucun point x_j. Pour tout $s \in H^0(X, E^k \otimes F)$, le quotient s/s_0 est bien défini en tant que fonction méromorphe sur X, et de plus s/s_0 est une fonction holomorphe au voisinage de x_j, constante le long des fibres de Φ_k. Comme Φ_k est une subimmersion au voisinage de chaque point x_j, on peut choisir une sous-variété M_j de dimension d passant par x_j et transverse à la fibre $\Phi_k^{-1}(\Phi_k(x_j))$. La section s s'annulera à l'ordre p en chaque point x_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, si et seulement si les dérivées partielles d'ordre $< p$ de s/s_0 le long de M_j s'annulent en x_j. Ceci correspond au total à l'annulation de

$$m\binom{p+d-1}{d}$$

dérivées. Si nous choisissons $p = [Ak + C_F] + 1$, alors l'inégalité (5.2) entraîne

$$\sup_X |s| \leqslant \left(\frac{e}{3}\right)^p \sup_X |s|,$$

d'où $s = 0$. Comme $d \leqslant a$, nous obtenons par conséquent

$$\dim H^0(X, E^k \otimes F) \leqslant m\binom{p+a-1}{a} \leqslant C_E k^a + o(k^a)$$

avec $C_E = mA^a/a!$.

(b) *Supposons* $\rho > 1$.

Il existe alors des sections $s_t \in H^0(X, E^{k_t} \otimes F)$, $1 \leqslant t \leqslant \rho$, et un point $x_0 \in X$ tels que les vecteurs $s_1(x_0), \ldots, s_\rho(x_0)$ soient linéairement indépendants. Par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute section $s \in H^0(X, E^k \otimes F)$, la droite $\mathbb{C} \cdot s(x)$ est contenue dans le sous-espace engendré par $(s_1(x), \ldots, s_\rho(x))$, sauf peut-être au-dessus du sous-ensemble analytique $\{x \in X; s_1 \wedge \ldots \wedge s_\rho(x)\} = 0$. On a donc un morphisme injectif

$$H^0(X, E^k \otimes F) \to \bigoplus_{1 \leqslant t \leqslant \rho} H^0(X, E^{k+k_{\hat{t}}} \otimes \Lambda^\rho F)$$

où $k_{\hat{t}} = (k_1 + \cdots + k_\rho) - k_t$, dont la composante d'indice t est donnée par le morphisme $s \to s_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{s_t} \wedge \cdots \wedge s_\rho \wedge s$. L'image de $H^0(X, E^k \otimes F)$ sur chaque composante est formée de sections colinéaires en presque tout point à $s_1 \wedge \cdots \wedge s_\rho$. On se retrouve donc dans une situation analogue à celle du (a), où F est remplacé par $E^{k_{\hat{t}}} \otimes \Lambda^\rho F$; par suite :

$$\dim H^0(X, E^k \otimes F) \leqslant C_E \rho k^a + o(k^a), \qquad \rho \leqslant r. \qquad \square$$

Choisissons en particulier pour F le fibré trivial $X \times \mathbb{C}$. En comparant les théorèmes 4.4 et 5.1, nous obtenons la caractérisation géométrique suivante des variétés de Moišezon.

Théorème 5.2. – *Pour qu'une variété $\mathbb{C}$-analytique compacte connexe X de dimension n soit de Moišezon, il suffit qu'il existe un fibré en droites holomorphe hermitien E au-dessus de X tel que*

$$\int_{X(\leqslant 1)} (ic(E))^n > 0. \qquad \square$$

Ce théorème entraîne à son tour le théorème 0.8 puisque 0.8 (c) $\Rightarrow$ 0.8(b) $\Rightarrow$ 0.8(a). On améliore ainsi les résultats de Y.T. Siu [17], [18], et on retrouve donc en particulier une nouvelle démonstration de la conjecture de Grauert-Riemenschneider [10].

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators III*, Ann. of Math., **87** (1978), 546–604.

[2] J. Avron, I. Herbst and B. Simon, *Schrödinger operators with magnetic fields I* ; Duke Math. J., **45** (1978), 847–883.

[3] Y. Colin de Verdière, *Calcul du spectre de certaines nilvariétés compactes de dimension* 3 ; Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie, Grenoble-Chambéry, 1983-84 (exposé n°5).

[4] Y. Colin de Verdière, *Minorations de sommes de valeurs propres et conjecture de Polya* ; Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie, Grenoble-Chambéry, 1984-85.

[5] Y. Colin de Verdière, *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques* ; Commun. Math. Phys. **105** (1986), 327–335.

[6] J.-P. Demailly, *Sur l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano en géométrie hermitienne* ; Séminaire P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Analyse), 1983-84, Lecture Notes in Math. n°1198, Springer-Verlag, 88–97.

[7] J.-P. Demailly, *Une preuve simple de la conjecture de Grauert-Riemenschneider* ; Séminaire P. Lelong, P. Dolbeault-H. Skoda (Analyse), 1984-1985, Lecture Notes in Math. n°1295, 24–47.

[8] J.-P. Demailly, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie* ; Note aux C.R.A.S., Paris, 13 mai 1985.

[9] A. Dufresnoy, *Comportement asymptotique de la distribution des valeurs propres de l'équation de Schrödinger associée à certains champs magnétiques sur un cylindre* ; Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie, Grenoble-Chambéry 1983-84 (exposé n°4).

[10] H. Grauert und O. Riemenschneider, *Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen Raüme* ; Invent. Math., **11** (1970), 263–292.

[11] P. Griffiths, *The extension problem in complex analysis II: embedding with positive normal bundle* ; Amer. J. of Math., **88** (1966), 366–446.

[12] F. Michau, *Comportement asymptotique de la distribution des valeurs propres de l' opérateur de Schrödinger en présence d'un champ électrique et d'un champ magnétique* ; Thèse de 3e Cycle, Univ. de Grenoble I (1982).

[13] B. Moišezon, *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions* ; Amer. Math. Soc. Transl., **63** (1967), 51–177.

[14] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical Physics, vol. I-II-III-IV* ; New York, Academic Press, 1978.

[15] C. L. Siegel, *Meromorphe Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten* ; Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. K., (1955), n°4, 71–77.

[16] Y.T. Siu, *A vanishing theorem for semipositive line bundles over non-Kähler manifolds* ; J. Diff. Geom., **19** (1984), 431–452.

[17] Y.T. Siu, *Some recent results in complex manifold theory related to vanishing theorems for the semi-positive case* ; Arbeitstagung Bonn, Proceddings of the meeting held by the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, June 15-22, 1984, Lecture Notes in Math. n°1111, 169–192.

[18] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory* ; J. Diff. Geom., **17** (1982), 661–692.

[19] E. Witten, *Holomorphic Morse inequalities* ; Teubner-Texte zur Math., band 70, Algebraic and Differential Topology, Ed. G. M. Rassias (1984), 318–333.

Manuscrit reçu le 30 mai 1985.

Jean-Pierre Demailly
Université de Grenoble I, Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques, B.P. 74
38402 St-Martin d'Hères Cedex