Sur la théorie des idéaux des algèbres de fonctions holomorphes avec poids

Introduction. Le but de ce travail est de comparer et de résumer les articles de L. Hörmander [3] , de J.J. Kelleher-B.A. Taylor [4] et de H. Skoda [5] sur la théorie L^2 des idéaux d'algèbres de fonctions holomorphes.

Dans la première partie, nous exposons le procédé homologique de Hörmander utilisant le complexe de Koszul. Nous nous sommes efforcés de décrire toutes les formes qui interviennent dans le calcul de façon intrinsèque.

Dans la deuxième partie, nous présentons la méthode directe de H. Skoda , qui reprend dans leurs fondements les techniques L^2 de Hörmander, et qui permet d'obtenir des résultats optimaux ; mais au lieu d'utiliser comme dans Skoda [5] (§2, p. 551) les délicates inégalités L^2 pour l'opérateur sin un ouvert pseudo-convexe borné de classe C^∞ (voir Hörmander [1] p. 104, Th. 2.1.4 et p. 100, Prop. 2.1.1) intervenir des poids multiples, et obtenons finalement les mêmes résultats au prix de passages à la limite supplémentaires.

A) Le procédé homologique de Hörmander ([3] et [4])

1. Préliminaires d'algèbre extérieure

Soit $^c(CP) l'algbreextrieuredeCPsurC(pentier > 1).)CP$

naturelles, que nous rappelons ci-dessous. Si a = (Xn, X2,... xp) ECP , b = lyn, 427. - Yp) ■ CP nous posons (alb) = ti si CP admet la base orthonormée (ei)asisp a i = (0,...,1,0,...0) le 1 étant en i - ème position 'i D'autre part le produit scalaire hermitien sur A(CP) est défini sur les éléments décomposables par : carna, 1... Nasl barbe 1... Abe) = 0 si oss, tsp, set. = det (ail bi) si ossetsp (avec ai ; b; E OP) Pesons EI = Eig$^E i,^. ..1 Eing 2$

I = (in, iz, ... is) 1siniz,... is <p

---

p2

admet la base orthonormée

I décrivant l'ensemble des multi-indices croissants i 15in <i,<...<és < p ;

■■ ■■ ■■ ■■■■■ ■■■ ■Aero ■■ , ■■■■ ■■ ■■ ■ (■) ■ ■ ■D

noté d , par : ladolc) = (blanc)

pour tous t > s

as'b est de degré t-s' (si tas atb = o) Calculons en particulier alb, adb lorsque

a = a: Ei b= E by @z (le E' indiquant que la sommation se fait sur les

Il = S

-

alors alb - Efs az bi bil

adb = BI' aibz Ei I a lei de leg) = (I | Eij) pour tout multis indice J on voit que Ei tEI = 0 si 1■ I

Ei EiJ = EJ

T

=S

br

en

IJI=S-1

et de nis" (CP) nail

Il vient alors adb - fic ai bij Es Lemme 1 : Pour tous a, b,... bs E CP, bEAS (CO), CE ASP (CP),

bd (b) c) = 0 si s impair fi) btcc dd) = (-1)55' (61c) dd (iii) ad(by 1... Abs) = Ž Gojka (albk) ban... Abi 1... Abs. fiv) ad (61 c) = ladb)$^c + 61)9bMladc)Demonstration$: $(i)rsulteimmdiatementdecequeD1 = 0(ii)quignrale(i)estgalementtrsfacilevrifier.fl)soitC, 1...Acs$ $a(CP)$;

on a par définition :

k=1

---

p3

(ad (bin... Abs) IC, 1... 1cs) = (b, 1... A bs lanc, 1... 105) i = det (bilcz)usijss avec c = ■ colen

det (G: 1cj) = Fokey (bila) det (bilcz) ztes = (. Enk(alow) bar... nbk... A bs Icg1.... Acs) *.*ex

l T Designons par E' " F les espaces : E' - Home (c‧c) = $dualdeenE" - Home(CM, c) =$ $anti-dualdeenF-Home(, C) = E'zE \subset E'E'sontmunisdesstructureshermitiennesdualesdecellede$ $espacedeNF - e - ram + 12)engenderenmetenmaandelingsectorPosonsenfinesot =$ $lipcp, n) =^F$ ®$cMe(CP)lei, nu = levere(p, n) = nienaF$®$c1(CP)(resp.erleines$■$ensupprimantlesi$ $(un)(alb)$,

eso est lui-même somme orthogonale des lieur mit F2 = r. Les lois A et d sur Acco) et 1 su AF.

De façon précise on considère

---

p4

4cu o a, o b) H (ua)(vøb) = (udv) 8 (alb) let é x é se (u@a, Nøb) > (upa) (vab) = (u 10) (alb) (attention c'est bien ulo et non utro !)

Lemme 1' : Pour tous fe eo , gelio, he learn, k e le mie (i) gt (gth) = 0 si simpair (ii) gdh dk) = (-1) 95' (g1 h) dk (it) ft (g ^{h}) = $(ft3)1h + 61)8 + regulfth)2.Lethormeprincipal$

Se

ensemble de fonctions plurisousharmoniques sur . Nous supposerons que si fa 42 ■ 0 alors 40+ cp2 ■ 0 et sup cu 42) E'D . Fixons d'abord nos notations Définition 1 : (i)

Ap.= A(52)$designeral'anneaudesfonctionsanalytiqussur12°tellesqu'ilexisteuneconstanteC =$■ $0cef)etunefonctionde1if(zilscexp(6(2))poutoutzesf)W = WO(12)estl'ensembledesfonctionsmesu$

Telesa qu il persiste mundo de letras tient pe ♡ : $Sz13(z)/2exp(-4(z))d1(z) < tooadsignantlamesure$

Hypothèse 1 ; (i) les polynômes appartiennent à Ab (ii) AD = ■$WD; f = 0 = WHnA(12)fiii)sif$■$Adalorsof/ozkEAD15ksn.$

---

p5

On vérifie aisément que les conditions suivantes sont suffisantes (voir °$[3]P.944", lemmes2etsuganesH$ $ZE12et1z - Sl < K, exp64(z)) \to E1et4(E) = 4(z) + K2.$

Si ti est une forme de bidegré (ra, 12). à valeurs dans 18 (CP) et dont les (ch-à-d un élément de D'(12) Rc livre (pin)) on calcule of Gf composante à composanté : plus précisément si k = uga ai. u est une forme de bridegré (arz) a een vecte constant de As (CP) alors Of = dua , 3f = õu®a. Lemme 2 : Soient og: 2 slim une forme cool - > esse une forme dont les coefficients sont des distribution's alow Eu) Gigah) = 9g1h + congi õh (i) (gth) = ■g th + Gong J7h Demonstration : il suffit de vérifier i) et Gü) lorsque : g■ cena sa tha Vel O a et b 'stant des vecteurs constants de $1(CP), 18'(CP).()Do$■$cu10) =$ $Juan+(1)ulo; etlelemme2resteinchangsil'onremplace$■$paraoupard.soitLisaL(52)l'espacedesforme$ +■■■■)■■■■■■■■■■■■en■■■■■$mesurablesWilonpin)dontappartiennenttouteslescoordonnesL'op$ $Ls- > Latinestfermetdomainedense$

---

p6

(nar définition fe Dem■ si gf ■ Litom .) Soient maintenant 91,92,... ge p fonctions non toutes nulles de Ad ; on leur associe g = (g1, 82,...gp) : 12 –> CA ·$.(Pn)$

une condition suffisante pour qu'un élément h E Ad appartienne à l'idéal Jg) de Ad engendré par go....gp . La demonstration utilise le complexe de Koszul de g, défini comme suit Si h ■ Lt? on pose po h = gth E LA Explicitement g h = f, gi hil 8 EI | lorsque h = hg 8 Eg hy 107 F IJT= 5+1 D'après le lemme 1 (i) on a P2 = 0 et en vertu du lemme 2 (ii) ■ Pa = (car les gi sont holomorphes .) on a donc le double complexe suivant Il=S 200 le al on > Le Ooty Bucor 1 5+1 Ins Aco T Dans le lemme 5 et dans la proposition 1, nous aurons besoin que Igl ne s'annule pas dans s . Commeo ce n'est généralement pas le cas, choisissons une fonction gé non identiquement nulle , et introduisons how S2 gogin (0) . w est pseudo-convexe et d'après Hörmander [2] p. 94, Th 4,4,2 : Lemme 3 : Soit une forme de bidegré.(q, r+1) dans c , à coefficients localement de carré intégrable , telle qué 5 f = 0 et 4 une fonction plurisousharmonique telle que': So ifle ey dd < too Alors il existe une forme h de bidegré (q, r) telle que Jh - f et Sw Thie-4 (1+12/2)2 d) < î So ifi e Y dd

---

p7

D'après l'hypothèse 1 () le lemme 3 entraîne aussitô E Lemme 4 : Pour toute forme § Ę Lith, telle que Of = 0 dans w il existe une forme h E'*Lfs solution de l'équation õh = k sun w . (Noter Oque sia est de mesure nulle) Lemme 5 : Soient r,s>0 > 1 des entiers, et soit E L telle que la f = 0 et 1g1- ■ Liis ; (i) alors il existe he Lust telle que Path = f et h 1911- ■ L? (ii) si de plus of = 0 dans a ,

(Thle est la restriction de la distribution Jh àw) Démonstration : (i) on prend h = 18 This ifligit donc h 1917-be ■ L* et h E L*** De plus g h = gt Gate 18) = gianf Jan (g+ß) (lemme 1" (ii)) soit po h = ß puisque gtğ - 1912 (lemme 1 (ii)) Det gf = Po f = 0 par hypothèse fie) si gflw = 0 alors 5h = 5 (52) 18 sur w Clemme 2 (i)) 3 1g= 5gğ = gt og '912 = iği4 ((g = ■) $^{■}g-^{(}gtag)) = 18114gtg1og(lemme1(iii))donc17(92) < 191-$ $2lag!etlohiol < lfl191-2lag!Grcel'hypothse1(dii)onaIhlow.1972-■LemaProposition1$:█ $soitELtellequeof = 0surw, Pg8 = 0, etsupposonsfightEListpourk > Inf(2(n_n) +$ $1, 2(p-s)\exists 1).AlorsilexistehELS1avecTh = 0surwetPoh = Dmonstration : lersultatestclairlorsque$ $nous > p$

---

p8

Lorsque S = p. la condition P R = O équivaut à gi k = 0 pour tout i = 1, ... p , ce qui entraîne' f = 0 sur 1 et il suffit de prendre h = 'o .. on peut alors supposer ram, s<p , k> 1 ef raisonner So

. s S+ 1 r+1 Plc S+2

eut trouver + trouver at Lr+1 r+ 1 - 0 Aur w Grâce au lemme 5, il existe h' ■ $t1telquePah'-favec$■$hia, Ig12-le'ELath.IlvientPhile = ofiw = 0etTh10 = 0k-2 >$ $Inf(2(m-p-1)+1, 2(p-5-1)-1)Mendehaurrenceontheedgeon Lelemme4nousfournithELS2avecJ$ $h"suwSih = h'-PgRh"nousenconcluonsqueh-5h-PgGh" = Jh'-fh" = 0surwetpgh =$█ $Poh' = f, cequ'ilfallaitdmontrer.Enparticulier, pourres = 0onobtient : Thorme1 :$ $sig., gpsontpfonctionsholomorphesdeAdetsikestLinefonctionholomorphetelleque : lift <$█ $cIglkexp(p)ouCestuneconstante > 0, 4$■ k > Ink (2n+1, 2p-1) Igl = (Igal? + 1922 + ... + 19 p12) Ž , alors il existe des fonctions has... hop de Ap telles que f = gihi Démonstration : nous disposons en fait par la proposition 1 I de fonction's hun hp holomorphes sur w , f = gihi Mais h... he se prolongent en des fonctions holomorphes sur 12 tout entier grâce au lemme suivant : Lemme 6 : soit X une hypersurface de sa définie par une équation u(z) = 0 ut A(32), UFO, et h une fonction E Beac (12) holomorphe sur X . Alors h se prolonge en une fonction holomorphe sur 2 (voir Skoda [5] p. 560 lemme 2) Dans le même esprit , on peut démontrer un critère local

---

p9

dont voici l'énoncé (nous renvoyons le lecteur à Kelleher et Taylor [4] p. 228, Th. 2.70 Proposition 2 : Seit ■$AdetDu, Dedeuxpartiescompac6)DuCB, fi)Sep18121812e4dd <$ $tcopource$ convenable de a les T (telles que 51 me i f = X gi hi sur De et SD is thIP 1912(2-1) dd < + oo k - Inf (2n+1, 2p-1) Alors appartient à l'idéal Ilg) engendré par gu gegange A .3

Définition 2 : si x est une fonction >0 sur 12, nous motons Ix) lidéal des Ofe Ad telles qu'il existe une constaté c>o et une fonction @ E 'o Tf1 < Cy exp (p) Le théorème 1 entraîne immédiatement le résultat suivant : Corollaire 1 : J(191)* c I(g) pour tout le> Inf (20+1, 2p-1) dans'. Ad , et 3g) = At si et seulement si 191 > C exp(-4) avec c>o et ope Corollaire 2 : Corollaire 2: vedere Fligi) e alte principe si Ilg) ou Illal) est principal dans Ad Demonstration : . si Ilg) est engendré par he AB avec gi = rih, alors Igl< 18! Thl , de sorte que pou tout fe J (191) on a l< Clyi exp(41) < c' exp (epa) où C, C sont des constantes > 0 8,40 ■ 0 *

si h engendre fligi), on a gi = rih 1sisp , Yi E Ap Mais This c lgl exp(40) puisque he flig!) donc 17! > > Con exp(-4) et les restes fela) - J (191)

---

p10

10 - 4. Cas des fonctions entières d'ordre fini . Définition 3 : nous dirons que le système 9 = (gu...ge) de s'il existe une fonction' pe o telle que Seix a Log Ig? exp(-4) al < + ou A est le laplacien sur cn et X l'ensemble des zéros communs aux gi .. Nous supposerons désormais que g est perfectible. Pour calculer A Log 1912 utilisons Igle = g+g oz, Log igla - 191-2 g ange ■ziz Ozle Log Igle = 1g112 29 beton - 1914 (22+5)$^($$g + q$) = 1914$dagen$(1955)^t$en$ − $^($$g$ = 9)) = 151 − 4$ogsagt$(g122) = 1g1 − 4($gnby$)(g109) = 1314$lgnage$1$Lesgalitsquinesontpasdirectementvidentesrsultentdulemme1id$)$ou$($sic$)".$OnadoncALo$
$team$■$ZLOKog$ = 4181141$gnagi$?$FRappelonsnousmaintenantquedanslelemme5s'crit$:█
3() = 131∗$gtgragd'en$159) = 1g1−6$IgnagiSigestperfectibleonadoncigi$3.)$L.Ilsuffitalorsderexamin$
$Soientrisnok$ > 1$desentiers, etsoitf$■$Itellequepourunecertainefonction PElaformefigrkexp$(−6)$s$
= 0 et 36 = 0 sur w , il existe he LS1 telle que : Por eß , h 1919-* ■ Lista et Ihlow 1917-R E LART Proposition 3 : Soit 8■ Lisa telle que paß = 0 et 3f = 0 sun w, S+1 S +1 - ■■■ ■ ■■■■ ■■ ■■■■ ■ ■■■■■ (■■ Xp avec QE t > sup (1, Inf (2[n-r), 2(p-s)2)) | Alors il existe he Lost? avec Jh - 0 sur w et po h = fi

---

p11

Démonstration : il suffit de considérer le cas où ran et s<p Si ran ou s = p-1 alors k = 1, et la poposition 1

Supposons donc run et scp-1, ce qui implique k> 2. Grâce au lemme 5', il existe he Lost a telle que Poh' = $etIhw$1911 − $kELIT$; $IlvientP, Jh'$ = 5$etke$ − 1 > Ink(2(n − r − 1) +
1, 2(p−5−1)−1)$D'aprslaproposition$1, $onDoamnesenMonogaticeomomenpeuttrouverlELofotentell$
+2$avecTh$" = R"$surw, eth$ = h−$Poharpondlaquestion.Enparticulierpourres$ = 0, $etaprsutilisation$
$sigoosegpsontpBydeApetsiBorlesteMestLinefonctionDholomorphetelleque1f$1∗$Ciglexp(6)suicest$
0$Gunefonctionde$0etk > Sup(1Inf(2n, 2p−2))$alorsEJ$(G).$Corollaire$3 : $sigondogpsentperfectibles$
2)$onaJ$(191)∗$cJlg$)$pouk$ > Inf(2n, 2p−2).$Onpeutdmontrer$($Skoda$[s]p.573$Lemme$3)$quetout.systeme$
$lapysumengegamegpldepefermectionsentiresodpidrefiniestperfectible$■$pour'noncprcis, ckaussiB$)
1$Lecorollaire$3$fournitalors$: $Corollaire$3' : $sigoonsgpsontperfectiblesalorsJ$($ign$)$cIg$).$KelleheretT$
f(g)$pouvaitsurvenir.EnfaitilestfaciledevoirqueJ$(1$gb$)$ten$ = J(g)∗2$kmquivautg$(191) =█
J(g) = Ab($voirB$)$sectiono$3.2$corollairefiv$))$lecorollaire$3'$nepeuttreamliorcommelemontrentles$█

---

p12

résultats suivants de Kelleher et Taylor ([4] chap III) que Nous prenons désormais = 14; 1 > 0$aver$(z) - Iz1

(i) f a une nacine yua nacine q. ème dans Ceci) E quème dans Ap filt) Blea Ign,ge) Définition 4 : une suite zkk21 de nombres complexes tendant suite bl> 1 de nombres complexes telle que Ibel < c eslzk) où c>o et op ■ 0 , il existe f■ Ap telle que f(zk) = bx pour tout k> 1, Proposition 5 : il existe go ■ Ap telle que f (gn,..gp) = g(igi) pour toutes fonctions 921**.gp E A C'est le cas chaque fois que gn a tous ses zéros simples, et que l'ensemble des zéros de'go est d'interpolation pour As (par exemple gilz) = sin 2.) Proposition 6 : il existe 91,92 E AD telles que J 91, 92) = Ilig) - Ilg192) m' Etant pas principal dans °*ADProposition*7 : *SorventogangeEAPm′ayantpasdezroslleseque*J913*gp*)°*ADAlorsi*
1*gpl*?)(*i*)*I*(*gm*....9*p*+1)*A* (en particulier Ap n'est pas moethérien) corollare t imestami gode in het en este maximal dáms At ■ Ad n'ont pas de séros communs, communs et telle Teen point at C tel que J = J = fe Ap ; fra) = 0

---

p13

(voir [5]). B) Méthode directe de H. Skoda 1. Préliminaires d'analyse fonctionnelle Seen H H et T: He -> H2 un opérateur non borné, fermé et à domaine dense Dom T On sait que l'adjoint T* de T est dense et fermé Let on a le résultat bien connu suivant (Hörmander °2]*p*.78*lemme*4.1.1.)*Lemme*1 : *siEestunsous*−*espacefermdeHzcontenanteimageImTdeT, a*
FsietseulementsiilexisteuneconstantectellequepourtoutEnDomT∗onait, avecdesllxllz <█
*C*1*T*∗*xllDeilexisteuEHetelqueTuzo*′*, u*■*ImT*∗*, etllullosCllolla.Onconsidremaintenantlasituations*
thLH > *HHeTHiHiontlemmesensquemcdemment*; *H*′*estunespacedeHilbertetLunoprateurlinaire*
HcontinuenacedeHilbertentequeMcdemy

Proposition 1 is F est un sous-espace fermé de H. contenant I L(Kert) on a Likert) = F si et seulement

ll well < c ll *x + T* w lle pour tout xe H et tout u ■ Dom T* Pour tout x ■ F il existe alors xn■ Kert tel que Lxx = x et llocll < c 'llae || 2. Estimations Ľ 2.1. Estimations pour l'opérateur ■ Etant donnés un ouvert pseudo-convexe 12 con et des fonctions C (= a Hh In H, S > Hg

---

p14

si He = p.9-1 (12,4) Ospen 1<9<n (resp. Hy = Leq (12,482) Hz = .9+(2,4)) désigne l'espace des formes de bidegré (p.9-1) | (resp. (p, q) et (p,q+')) de carré intégrable pour le poras : e-on di Cresp. ez d e 43 dd)

on pose liflice = Se ifi? é un dos pour fe q4182,ch) ; Ilfllcez et af ll$_3$*sontdfinisdefaonanalogue.EnfinT*
DompourlanormeifIse + ||*T* ∗ *fills* + *Sf*" *lessionachoisiunesuitenyECOO*(12)*Osmy*1
telle que my = 1 sur tout compact des pour passez grand , p o pe C212) telle que l anul? = Ž 122 cep pour tout y et enfin pu = 43 - 2p , 42 = 48-p . (Pour plus de détails sur tout ceci, voir Hörmander [2] chapitre 4 ;) A la différence de Skoda [5] nous n'utilisons pas pour d! Hörmander [1] (p. 104 th, 2.1,4 et p. 100, prop. 2.1.1) relatives à = = 0 et à un domaine 2' borné à frontière coo", mais celles plus récentes de [2] p. 83-84 . Afin d'obtenir les mêmes constantes optimales que dans [5] nous reprenons en détail les calculs relatifs aux formes de type. (9.1) ; désormais p= 0 9= 10 Soit f = Ž kle dzle E Dom T* et u ■ D(12) c Dom T Ju - (Tulfo = So zulf) e 42 dx = so Eider Ecke E1 42 dl = -52 u els al (w, - ein Ozu Bile e=PL))cm (u, T* ßlen et ce pour tout ut D(12) d'où T*f = -e ž (fle e Qe)

p15

Le calcul montre de plus que Don (12) c Dom T* Supposons pour l'instant 4 = 42 = 43 = 4 et 8■ Don (2) alors T*f = - co + toe et T* f est de classe C à support compact ; d'où : Se IT*812 609 dd - da (TT*f16) 64 dd gekbe is TT* f = vafle au + fre) dze sn ozkaze - cosmesa es sich because there] dže tretien den beze fik dze et Sa IT*fl? e4 dd =- Se alleen ozLe content Be ad + Se nekesn dem Size Be Be e 4 dd = Se viene dd + Sie einen ei ole za bebe ■ 4 dit D'autre part sf = neislan doe) dzę 1 dže Sz Isgje e 4 di = Se lucrean lahe on selle ell dd et comme lesene og det ligesom er noget mesma Lemme 2 : on a !!T*f + 11 sf lil'= Se baten eq ai + Se minden Bar Be E4 dd > Se sin de ze Be fe eau dd pour tout ße Day (12) Supposons maintenant Qv42,43, choisis comme au début et soit l'opérateur T* Lelatif à Q = (avec trois poids égaux comme dans le 'lemine 2 sf - - Ž eatze ezt fork e42-P) esate azil file e=442) + I de fle = of t* f + Opdf SL 1R, comme) 11 11 ozk Here (C (done 118■ la < (1+B) ll el T*fl+ (1+2) llap tf ll 34+ß) !!T*fl'én + +) Iz l■ple ifie 93 dd pour toute constante' 'ß > 0.

---

p16

déps$_f tBeCouleIN61+B)||T*f15+115$■$182 > scLabelsnoz.zeftbe-(1+3)Toplaigle]ddpourtoutkEDo$
$0SideplusHlo(43,4) = basedede > (1+3)ldpl21112astelsmozkozepourtoutleca, l'ingalits'tendtout$
■ Dom T* , Dom S (por densité de Don (52)°).$Nousutiliseronsl'estimationsouslaformesuivanteiLen$
$SiJl.143,1) = (1+)lople112pourtoutdeonalors1T*8118 > S[386(0,3)-aldplifie]e4ddpourtout$
■ Dom T* n Kers'. 2.2. Estimations LP pour l'opérateur On considere le diagramme Hi - L © = TP > H o H = L(12,4) EC2712) Ho = [22(126)]P (muni de la structure de somme H2 = Ker SP ; hilbertienne) T , SAol T , S à la section 2.1, avec les poids Py = 03-28,0 = -p. Fi= Ker TP n'est autre que le sous-espace des fonctions holomorphes de TL(52,4)]P , et nous notons de même F = 2(52,8) M AC2). Enfin th = gi hi pow h = (hal... hp) ■ [Lo(12,64)]' ou go.. gp sont p fonctions holomorphes sur 12. So Ilhé 4 dd <le 1912 1h 4 dd < sup (191

une constante 1912 = Elgil telle que : < Cem avec r = -41 nous supposerons désormais ; remarquons de plus qu'alors LEĆE.

---

p17

Calculons * f pour u ■ 12 (12,4) : (Lh, f) = sa gihi) 6-4 dd = Se I hi ■i fe4-4 e ca dd avec hi e L'(12,4) c'-à-d (th, f) = (h, L* 8) on L* f = (gn ferme, gz $em, ..., gpfete)Siu$■$Dom@*, ona@*u = (T*un, T*u, ...T*ep)$;

* +* > $Cllfllpourfe F, etu$■$DomO*Lepremiermembres'crit$: 11*+©*uit = $3liifete+$
$T*u; ISCE(2) = a(lifem11 + 2Re(iferit*miben + T*u;)Il$

(3) 3 lõifede llei = Sa 1912 iki ■ 20 GPa dd Comme f est helomorphe ö lõife+ M) = $a(giere)ikmappartiendraDomIsiem-ela(giem)|2estborne0@el$■$17($■■■$)2|$■$Endfinitivelesconditions$
$bornelehetleilae$

i=1 k-1 OZ le lemas palgi eM) 12 bonnée pour 1sisp on a alors (qi feste 1T*uien = of orgierte) | mi) 42 d'où en posant Mi = Z, mik dzik § 2 Relgife" IT* u;) = 2 Relat logiem) dik e-42 dd Wtilisons l’inégalité Ilal? + a 1b12 + 2 Reačno sie al est un nombre ° > 1; $aonobtientensupposant191 > i(4)2Relifet!T * ui) > -SoIgl?1812ez - dd - \cup 421812enOz(giem)uitlessddUtilisonsmaintenantl'ingalitdulemme3pow.MiEDomT* nKerso(5)||T*millei > Se[161934)-alapislup?Je43ddquiestvalidesi316(43,) > (1+)120121112BEe$

---

p18

combinant (2) (3) 4) (5) il vient : (6) 12* f+ @* u 112 = (1-1). Se 18:12 1812 e-que-41 dd over hele like ■ie - s topliuta 41+ ß ik, e ozk öze ak mie Blopi *** -aighe il 20 cm Liet) uin Jedd Choisissons Choisissons m = Log Ig? + 43 = y + x(1+B) Log Igi? Pa = 03 - ’2p Ulo 43 Plecy, 1) > (1+) 12012 1112 M■ en , Y o bom degi wik■ie > < 1912 , en dz.(giem) uit 1 1R 12 ozhože Vik uil = Zk 1912 jt Iglulega og m <t N Zk On vérifie facilement que : s 32l Log 1912) ian■se 21 Els agjen Liza agd uit 1 = 131-4 [na Igmore wit | -15 giugno in l] = 1914 meil Egmoedig en god same Jack (7) grâce à l’identité de Lagrange : Slamll b;- ■j bi l = I lam bj - a; bm 12 D’autre part en oeulgiesme) = Ogi - gi amese = di- gi 1912 ? gi = lgt? Ji (goi mai - gi 294) (8) fev 22, kg4) wiel = 114 Ji (g: Bai - 9:22) Lemme 4 : soit q = Infim, p-1) ; on a l’inégalité 15 ■; (az bik - a; bjk) cik <qlal I I lambile - a; bmk) Cikel az bik cik E C 15 i,jsp 15ks n lal = laj12 | (pour une démonstration voir Skoda [5] p. 552 lemme 1)

---

p19

Appliquons le lemme à a; = gj bik = d quiet cik = wide ; On voit d’après 67) et (8) qu’on peut prendre r = 29. Compte tenu de ce que Igi? = elle, 4 = Put je, l’inégalité (6)’ entraîne i || L* f+ * u 112 > (4-) Ja ifle e dd H + Sa Loits Feesten wijk üie - â l■pl2 lut?] 643 dd Remplaçons maintenant 4 par + 285 T o est une fonction purisonsharmonique de classe.ca (9) est valide lorsque le [.] figurant dans la deuxième intégrale dee membre de droite ese > O . En, supposant ý plurisousharmonique , cette condition sera nts (sce nte ze wille wice > lopp lupe Comme Hilele, t) > - Ja■ pl1112 il suffit de prendre : fo) e oze da te > (2 10.pl + 4+*) ldple) ale se on Proposition 2 : on a | L* 2 + 2*. I > (A-4 Rio cod) . ver ■ ■■■■ ■■ + X , e lui 11 + to 7777 t + avec x>1 ß> 0 9 = Infin, p-1) RE F u Dom * 43 = +20 + TT + x(1+B)q Log 1912 y p.s.h. de classe C2 , = + p + + a (1+8) a Leal 812 că = R + ’ T + «(1+ 3)ą Logigi? 4 = 4+ I + (« (1+6)q+1) Log Igle et sous réserve que Igl > 0, que les p fonctions 191? lagi lg1-2)] soient bonnées, et qué FO) 36 (1, 1) > (2 l■■pl + (1+4) ldpl) 1/12 VEC" Grâce à des passages à la limite standards, la proposition 3 va nous donner des théorèmes d’existence. 3. Le premier théorème d’existence 3.1. Théorème 1 :. Soient s un ouvert pseudo-convexe de C", y une fonction plurisousharmonique dans Š .’ Scient ga, ...gp des fonctions holomorphes dans 12 , ql’entier

---

p20

Infin, p-1) et « une constante > 1 Alors pour toute fonction | holomorphe dans 2 telle que se ifi? 1g1-249-2 e-4 dd < + c

f = a gihi, et So Thi? 151-209 e4 dd som So ifie 191-229-2 et dll stration de me move on nam se da te me 4 de classe c’, Igl>0 et 1912 121 gi 191-2) 12 bornée 15isp, et Jbl , 1) vérifie la condition (10) du 2,2 . on a alors llollip = So hobea dd someone I * v + @* u 19 pour tout ve F = (2,4) n A (12) L et u ■ Dom ©* solfle 4 dd <+co si , la proposition 1 implique i=1 f = th = gihi et A) Se the endd sbon Se Hifle 24 d Supposons maintenant que T est une fonction d'exhaustion cstrictement plurisousharmonique et propre sur 1 Soit Ky = z ■ 2 ; T() s v y E IN Par hypothèse de propreté Ky est compact, et tout compact de $12°' estcontenuedansl'undesKy' PrenonsaussiO < By < * - 1avecBy > 0etsubstituonsallaonchoisitnyeC00(2).Osmys1my = 1auvoisinagedekypourtout° DEN.Enparticuli$ $1suruncertainvoisinageouvertWydeKypourr > y(wyindpendantdebiensr)OnpeutdoncchoisireyE(1$ $o, ev = 0sununsuventwascontenantKyetrelativementcompactdansW, telleque : Tnalepspourr$■$yRe$

---

p21

c? sur iR de sorte que la condition 2.2 (10) soit satisfaite lorsque XVOT , By ; TT, ß, a, 6 , et pu remplacent respectivement 02) Py? 1+ By, el pu remplacent respe a HB (Tuott,) > XVOT JB (TT,) > XV O T C 1112 c70 CE C°(52)2, $2(10)seradoncsatisfaitsijct) > sup(21d.pl+(1+3y)ropyl)TT(Z) < tLesecondmembreestunefonctioncroissantepartoutfinienullesu$ $-, y].OnprendradoncXv = 0sur]--, v], Aveclesschangementsdenotationprcisesen(2)onaiPo =$▉ $4+Xro+xqLogigi?0 = +XvOTT+(Qq+1)Lgalgiadoncsoifi2e4dd = Selfi?1g1-269-$ $2eydd < toparhypothese..D'aprs6ilexistedesfonctionshy = (have...hpv)tellesque : =$ gi hiv et se Thy l 191-269 ■4-Xvott od s d'ou Sk Thyle 1g1-2019 e4dds s li* 191-209-2 e-4 dd Comme 191-269e- est minorée sur tout compact familles $°Chin)veinlesformentdespartiesbornesd$ $1, ...poiBy1412141 - 269 - 2todLlitByaitBu - 112fr1g1 - 29 - 2 - -1 - ByS2$

une suite encore notée hyj telle que hiy converge uniformément sur tout compact Kcs vers une fonction holomorphe hi . Alors See Thi? 1g1-209 e4 dx = lim S Thyl? 1g11209 e4 dd < sa lfil? 1g1-269-2 et dd 1> + K

Eliminons maintenant les deux hypothèses suivantes : (d) Igi? 12 (gi 191-2)| bornée 1sisp ii) y de classe C2 .

---

p22

relativement compacts dans 1 , et tels que 1 - 0 2x y = 0 too suppose Igl>O D'ames Hörmander [2] .p.45th 2.6.3 on peut trouver une suite de fonctions H plurisousharmoniques et de classe cao sur S2y telles que : Horn s tv sur say et y = lim tv Il existe alors des hy = (hay,... hoy) holomorphes sur 12, telles que ; if = gi hiny et Ss Thyll 1g1-2aq e-Yv dd s ve 1f1? 191-269-2 e Hy di un passage à la limite analogue au précédent montre qu'il existe des fonctions holomorphes hii... he sur 12 vérifiant les conditions du théorème . Eliminons enfin l'hypothèse Igl>o ; choisissons parmi les ai une fonction non identiquement nulle par exemple 90, et appliquons le théorème sur l'ouvert pseudo-convexe : 2n = 2 X ou Xi est lhypersurface g16) = 0 D'après [5] p. 560 lemme 2. toute fonction he Lec (12) n A (120) se prolonge en une fonction holomorphe sur 12 . (comme ox, est de mesure nulle on peut supposer que h est seulement définie sur son) Une solution h de k = E gihi sur si se polonge su s tout entier, 3.2 Conséquences. On considere un ensemble o de fonctions plurisous harmoniques

si Pu, Pz E S up Car P2) et Pn+ 42 E o , Notons Ad l'ensemble des fonctions holomorphes f telles qu'il existe 6 ■ 0 et une constante Cao i pour tout z ■ 12 if(z)'s C exp (4(21) On supposera que Ad contient les polynômes et que fe ad si et seulement' si : 1

So ifisé 4 dl <+ pour au moins une fonction GE . Pour des fonctions gilusisp dans Ad , et une fonction positive y sur SZ , notons !

---

p23

I (g) l'idéal engendré par les gi . Jis) e idéal des R E As telles que lfl < Cx. exp (4) poir une constante o Cz0 et une fonction ope $^\circ R.Lersultatsuivantestuneconsquenceimmdiateduthorme1 : Corollaire1(Hrmander) : ilyaquivalenceentre(i)J(g) = Ad$

t igl > A exp(-o). (aut) Il existe x>1 et pe tels que so 191-29-2 exp(-40) dd <ta 9- Inf (m, p-1)

Kelleher et Tayler [4 chap. II : Corollaire 2 : (a) Jig) c Jigs c J(ig!) = J(1g.) où fig) (resp. J(191)) est la clôture intégrale de J(g) (resp. Julgi)) fui) J(1951)9+l+1 c Trg)e pou tout entier lan et 9 = Infin, p-1) En particulier Jig) et J(191) ont même racine (iii) s'il existe pe et ■ >0 tels que se Igre exp(-2) dd <+00 alors J(191)9+ c Igle pour tout entier l> 1 fire) Si JlIgI)* = Jlg)e pou kHe alors flg) = J (191) = Ap. Démonstration : (a) Il est clair que sig) < Jlig!) Il suffit donc de vérifier que J(191) - J(197) . É Illal) par définition s'il existe un entier, > 1 et des éléments a; , 1<jsk , aj ■ (1gb) tels que fle + an fl-1 + ... + ak = 0. Il existe of $etdesconstantesCjtellesque|Tajl < Cjlgldexp(jcp)Silg! = 0alorslajl = 0ofifl = 0silaltoonarif!_tesc._18!1R-(1)Iglexplo)J+...+CheLiglexp(6)JFCIlkidondTglexp(0)FC = sup(C + ... + Ck, 1)$

---

p24

car sinon c'est vrai si , et sinon cela résulte de (1) en divisant par Ciglexpres)) d'où ift < clgl exp (p) et ■E J(191) . (ii) Si y est une fonction mesmable >0 sur R, on note JC (y) l'idéal des fe Ap telles qu'il existe pe o ; Se ifle yox exp(-40) dd <too si ifls cy exp (6) et Je exp(-4) d) < + on a Sz 1f1? yu? exp(-20) ad < c? Se expl=cp) dx sto donc 818) c RECY) Montrons que g(191)9+4+1 c Fe (1919+P+1) c Igje Fe (1919+1) La memière inclusion résulte de ce que flign)9+4+1 c I (1919+2+1); il suffit donc de raisonner par récurrence sur l ěn s'assurant que ; JE (1919+@+1) < Jg) HE (1919te) pour l> 1 Mais ceci est ' exacte traduction du théorime 1 avec = 1+

localement ; (si qe Ad 'est un polynome de Weierstrass de degré k suro un' voisinage compact K d'un point 2. Er, alors Sk Ign- od < + .) Sous l'hypothese (ie) J (191978) c HE (191976+) et JE (1919+2+3) Jlg) H (1919+2-1+£) pain tout é > 1 grâce au théorème 1 appliqué à « = 1+(-1 + $).kv).Eneffetsik > eonagieeg(191)$" < Jelgik) d'où lgoibel < c Iglfe exp (cp) C o 46 0 et igle s pl-1)+.C 1918 exp(p) Comme k>e, il vient igik-e ? K exp(-48) K0 or igjkl-4 < c'explom") d'où Igl> " expl-") c">o , ("E 0. et d'après le corollaire 1 3(g) = g(igi) = AD . Si kce alors gik E Jligible = 3(g)e c Iligie) et on applique le même raisonnement ,

---

p25

Nous allons maintenant démontrer le deuxième théoreine d'existence de H. Skoda [5] qui nous permetta de retrouver le résultat ike + + 777 + + Mem

: mes 4. le second théorème d'existence Ce théorème se propose d'être l'analogue du théorème 1 pour Q=1. Lorsque x = 1, la poposition 2 fournit : 11 L*v + ©* u IL > ita Ei rekiston Mike üil e 43 dd ozled ze avec ß>0 , 9 = Infin, p-1), NEF, ut Dom * T, plurisousharmoniques de classe c2 sur 12 03 = + 20+ + (1+B)9 Logigi? z = + p't ■ + (1+B) a Leadiz Pa = y + ' TT + (1+ß)'q 'Logig72 4 = 4 + 1 + ((1+8)9+1) Log ig2 avec les même restrictions que pour la proposition 2, sunt fel.) DC 12 ore c est continue >0 sui si Seicento e con (Way Tozu. Wp) ■ Hz un système de p formes Par définition de Hy on a Jwi = 0 et Sa Treil é 42 dd <too Supposons de plus que se Ã lul e ca dd < too on a alors (w, ulce = so I wile wide e Me dd I(w, ul.cz 12 < ce a look e Sa 'ax) ce clul2 ■543 dd) |(w, ulce I < V7+ß us a lowle e Atdx) II L* w+ *ulla L'application du théorème de Hahn. Banach montre qu'il existe un système de P fonctions h = (hay... hp) ■ Hi = [Lo(12,41)]P So Thall é An dd = (1+B) So I 1 w12 e 4a dd et (w, ulpe = th, *v + @* un avec ue Dom ** ce qui équivaut à : Th = w (en faisant w=0) et de plus (th, vp = 0 pour tout v E F soit encore Ghi = win 1sisp et i

---

p26

Quitte à remplacer 12 par un ouvert s2 pseudo-convexe relativement compact dans l , on peut supposer Ig! $\iota\sigma$■ε■$o\Omega$(etonsupprimeainsienmmetempslhypothsesuivant|laquellelesfonctionsi
2)?sontbornes.)Supposonssoleta19129eydd < tooetse■Treste191−29e−4dd < +00dcritcompeusavor
osoIhyl?1g1−2(176)9■4−XPottad = (1+pv)So■Irof?1g1−2(1+Rv)ae−t−Ruotdd <
(1+pu)InfIgrzyn)28s9Seamul?1g1−29874dcommeiglestminore, ladernirelignetendversSealwol19
2974quand+1.Shiv = Wi$_1$sisp..etSe(gihiy)■ePvdd = 0pourtoutefonctionholomorphewtellequeseiv
4 + XyOTT + ((1 + By)q + 1)Loglg12)

convergeant faiblement dans Lloc vers h = This isis telle o que Se thi? 19/1-29 eydd s se Ž Trope 191-29 24 dx Thi = win 1sisp. seule difficulté est de vérifier qu'on a bien I gihi) õ 191-29-2 eV dd = 0 pour toute fonction holomorphe o telle que se inol? 1g1-29-2 2-4 d) <too Sait K compact ce ; sa gihi) to 131-29-24 dd - So gihin J■s 191-269+)-24-Xvet ds. = Sx š gi Chi - his 1g1-28v9) 1g1-29-2 2-4 dd + Sek... - Series

---

p27

et de même T Sex gi hiy) 191-2(1+80)q-2 2-4-Xv dd (Sök lote 131-2017 fu)q-3 e 4-xvot da)* (Sz the l? 1gi ehtiyat < (in fr 1931) A9 (Sek Hov? 13129-2 -4 dn). constante donc les deux intégrales étendues à GK peuvent être choisies arbitrairement petites (indépendamment de v) pourire

K

Il suffit de voir qui'en fait hiv > hi uniformément sur ou tout compact .

de Llen, donc relativement compacte dans A(12). O est limite faible dans Lecc , par suite c'est la seule valeur d'adhérence dans A(Z) de hi-his, et la peuve est acher On supprime enfin l'hypothese lgl minorée en $\Lambda\alpha\lambda\alpha\lambda$emCem$\Lambda\alpha\iota\tau o$■$o\Omega\tau o\alpha\mu\alpha\Omega$ =
UΩ, , etenpocdantcommedanslethorme1, onadonclamopositionsuivantepourlaquelleonsedonnepfon
dheTe > c1112k; ozkazekCECO(2)Proposition3 : Soientw = (WwWp)unsystmedepformesdebideg
Se(1 + 1)Injei91 − 29e4dd < +009 = Infin, p − 1)

(2) cs■ (12) T

(a) Zhi = win (b) Se gihi) ■ e 4 dd = 0 avec 4 = 4 +(4+1) Log Igie et pour toute fonction holomorphe ve F = A(12)4 12(12,4) (c) So Thi? 1g1-29 24 dx = Se a lho 12 191-29 6-4 d).

---

p28

Soit fe une fonction holomorphe sur s , et cherchons des fonctions hi telles que ß = Egihi. on a f = Ž gi hi avec hí = of pain (on suppose Igl>o))

OZR dzki wi = Thé = 1914 Le gj (gi argin- gi dik On cherche à appliquer la proposition 3 aux wi Ona se a 1w12181-29 e4dds So I ißi? 18129-2 1914 19; gai - git be-Ud) (en utilisant l'inégalité de Cauchy - Schwarz sur la sommation en j :) la (Log Igle) = Pie z log|gie) = ig. " I the largement grand donc sz a lou12 191-29 64 od < So I 1812 191-29-2 A Log Igle-4 dd et on a la même inégalité en remplaçant ■ par 1+. Supposons Se (1+4) 1812 181-29-2 A Log Igl etdi <+00 Alois d'après la proposition 3 il existe des fonctions her telles que . Z h = wie et : se Th"12 191-29 64 od s se ■ 1f1? 191-29-2 A LogIgle-val avec se (gihi") ■ 191-29-2 2-4 d1= 0 pour tout w■ F Posons hi= hs-hi hi est holomorphe or sa th'12 191-29 e 4 dx = So 1812 191-29-2 24 d. o qu'on suppose finie Alors Žgih! ■ Ľ(12,4) et d'après la condition (b) sur R" se i gi hi) 191-29-2 évad = Sa Śgi hé) 191-29-2 e-Wed = Se f ■ 191-29-2 e-dx

EN et en peñant i ve I gihi - ß on voit que f = I gihi ,

24-1R121 48 < 2 Se 1h12 191129 2-4 d+2 12 1h"219129e-4a1

---

p29

En remplaçant 4 par 4 + 2 Log (1+iz[2), c par a? on obtient har 41+ 1212) Théorème 2 : Soient s2 un ouvert pseudo-convexe de ch T V une fonction plurisous harmonique dans ses er g = (gu)... gp) dans ? op un systeme de p fonctions holomorphes Soit x l'ensemble des zéros communs aux fonctions gé , et q e'entier Infin, p-1). Pour toute fonction of holomorphe dans 12 celle que Sex ifi 19129-2 Gaz biz+ A Logigi) 64 dd <too

−EgihietSoThi?1g1−29(1+Iz12)−2e−YdisSex1812181−29−2(2ps2+Alogig!)eyddRemarque :■
enfaitlethorme2estdmontrseulementlorsqueIgl > oetydeclasseC?, maisonpeutliminerces′restricti
Enreprenantlesnotationsdelasection3.2., ondduitaismentduthorme2lersultatsuivant :■
Corollaire3 : s′ilexistepeotellequesoyALogigleAddsoitfinie, onaf(191)9+1cIlg).Lorsquen−■
1onobtientlersultatdeKelleheretTaylor[4]′p.231,′ thorme3.2ifciall?cIlg)p.231, the.Lecorollaire3s′ap
sigestd′ordreauplusp(ci−dsiLog1962)) < CC■)(1+1z1)p+■pourtoute > 0)alorspourtoutEsoonaiSo
Izl)−2n+2−p−d(z) < tooD′aprslecorollaire3J(191)9+1cIg).OnpeutgalementdfinirlanotiondOrdr

---

p30

dans le cas d'un ouvert borné 12: la fonction g sera dite d'ordre se si pour tout e > 0 , il existe CCED tel que : où diz) est la distance de z au bord de s. Cle) P-E ev) 5 s'étend cette situation ,

résultat Fligi)9+1 < Ilg) ne peut être amélioré. Cafe Skoda [5] p. 575 - 576 , Kelleher et Taylor [4] p.233 théorème 3.6 5. Application aux équations de convolution, Grâce au théorème de Paley - Wiener, l'algélre de convolution de carne se aley - Wiener selalgebre de Fourier - Laplace é litent par la transformation de 0 = Al Im zi + s Log (1+1z1) ; A>0, s>0 deurent ove 7= ** 3 :

o y et les Ti sont les données et lés Xi les inconnues Ź To = û dans l'algètre Aç Le théorème 1 fournit alors un théorème d'existence et de Régularité des solutions, que nous énonçons sans démonstration coof Skoda [5] p. 576-578 85) Théorème 3 : soit Tj ■ E CIR) telles que a exp (A, I Im zl) (1+Iz1) Su > EiTj(z)> Cz exp(-Az I Im zl) avec des constantes Cr, An, A2, Sq, są > 0, Ç> 0 Alors pour tout YES (IR■) à support dans la boule de rayon A et danskas (IR) , pour tout <>o , et tout > 1 , il existe des X; E ŚCIRn)' telles que Ś Ti * xj = Y of xj ■ H-S' (IR") s'= s +s, + 29 (9,+2) $1° > 0(1 + I21) - sz$

A avec i A' = A + A2 + 29 (A + A2) + E et q = Inf (m, p-1).

---

p31

Bibliographie :

[1] Hörmander (L.) : L^2 estimates and existence theorems for the operator. Acta Math., vot 113 , 1966, p. 89–152.

[2] Hörmander (L.): An introduction to complex analysis. Second Edition, North Holland Publishing Company, 1973.

[3] Hörmander (L.); Generators for some rings of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73 , 1967, p. 943.

[4] Kelleher (J.J) et Taylor (B.A); Finitely generated ideals in rings of analytic functions. Math. Ann., vol. 193, 1971, p. 225–237

[5] Skoda (H.); Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomophes avec poids. Annales E.N.S., 4e série, tome 5, 1972, p. 545–579.