Annales scientifiques de l'Éc. Norm. Supérieure
4^e série, tome 20, 1987, p. 579 à 598.

Formules intégrales pour les formes différentielles de type (p,q) dans les variétés de Stein

par Jean-Pierre Demailly et Christine Laurent-Thiébaut

Résumé. – On construit sur toute variété de Stein un noyau global permettant de démontrer des formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour des formes différentielles de type (p, q) quelconque.

Abstract. – We construct on every Stein manifold a global kernel which enables us to prove Koppelman and Koppelman-Leray formulas for differential forms of arbitrary type (p, q).

0. Introduction

Henkin et Leiterer ont construit dans [2] et ([3], chap. 4) des noyaux globaux sur une variété de Stein grâce auxquels ils démontrent des formules intégrales pour les $(0, q)$-formes différentielles. Dans cet article nous démontrons des formules intégrales du type Koppelman et Koppelman-Leray pour les formes différentielles de type (p, q) quelconque sur une variété de Stein. Celles-ci généralisent à la fois les formules démontrées par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$-formes différentielles (*cf.* [2] et [3], chap. 4) et les formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour les (p, q)-formes différentielles dans C^n (*cf.* [8], [7] et [1]); elles permettent sous certaines conditions de résoudre des problèmes de $\overline{\partial}$ avec estimations de croissance ou de régularité.

Dans un premier paragraphe nous construisons des noyaux dont nous donnons une expression globale sur la variété de Stein M; ce sont des formes différentielles continues sur $M \times M$ privé de sa diagonale. La necessite d'avoir des formes différentielles invariantes par changement de coordonnées permettant d'obtenir des formules intégrales pour les (p, q)-formes différentielles nous a amenés dans le cas $p1$ à introduire la connexion do Chern du fibré tangent.

Aux paragraphes 2 et 3 nous nous intéressons principalement à un noyau du type précédent qui généralise le noyau de Bochner-Martinelli. II en résulte une formule de Koppelman pour les (p, q)-*formes* différentielles sur une variété de Stein (théorème 2.2), et la transformée de Bochner-Martinelli se généralise egalement dans ce contexte (théorème 3.1).

Le paragraphe 4 est consacre à la démonstration de deux formules de Koppelman- Leray dont on peut deduire des formules de résolution du I pour les (p, q)-*formes*

différentielles dans un domaine strictement pseudoconvexe d'une variété de Stein. La premiere généralise la formule intégrale donnee par Lieb [7] et $\Phi vrelid$[8] dans C^n et la seconde la formule de base de l'article [1] de Andersson et Berndtsson.

Le dernier paragraphe donne une méthode, différente de celle utilisee par Henkin et Leiterer ([3], §4. 12), pour obtenir des formules intégrales pour les formes différentielles a valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe sur une variété de Stein.

1. Préliminaires

Soit X une variété analytique complexe; si u et v sont des n-uplets de fonctions C^1 definies sur un ouvert de $X \times X$, on pose

$$n$$

$$CD_{z,\zeta}(u) = \wedge d_{z.\zeta} u_j j = 1$$

$$\overline{\omega}'_{z,\zeta}(v) = \sum_{j=1} (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{k \neq j} \overline{\partial}_{z,\zeta} v_k$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$$

$[(z, \zeta)$ designent les variables dans $X \times X]$.

Le noyau de Bochner-Martinelli dans $C^n \times C^n$ est alors donne par les expressions suivantes : $K_{BM}(z, \zeta) = (n-1)!(2i\pi)^n 00'_{z,\zeta}(\overline{z} - \overline{\zeta}) \wedge 0)_{z,\zeta}(z - \zeta) - |z - \zeta|^{2n}$

$= (-1)^{n-1}(2\pi)^n \langle \overline{z} - \overline{\zeta}, d_{z,\zeta}(z - \zeta) \rangle \wedge (\langle \overline{\partial}_{z,\zeta}(\overline{z} - \overline{\zeta}), d_{z,\zeta}(z - \zeta) \rangle)^{n-1} |z - \zeta|^{2n}$.

Il permet de démontrer des formules de représentation intégrale pour les formes différentielles de bidegre (p, q) quelconque dans C^n.

Dans [2] et [3], chapitre 4, Henkin et Leiterer construisent des noyaux qui conduisent a la représentation des formes différentielles de bidegre $(0, q)$ dans une variété de Stein.

Precisons mainténant la méthode de construction u.tilisée par Henkin et Leiterer.

On considere une variété de Stein M de dimension n dont l'orientation est definie par la condition suivante: si $(z_1, . . ., z_n)$ sont des coordonnées holomorphes locales, la forme différentielle

$(-i)^n d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d_{Z_n \wedge}^{-} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = (-1)^{n(n-1)/2} i^n dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ . \ . \ . \ \wedge dz_n \wedge d_{Z_n}^{-}$ est positive.

On notera $T(M)$ et $T^*(M)$ les fibrés tangent et cotangent de M et $\tilde{T}(M \times M)$, $\tilde{T}^*(M \times M)$ leurs images reciproques respectives par la projection de $M \times M$ age $M, (z, \zeta) \mapsto z$.

Soit $s : M \times M \to \tilde{T}(M \times M)$ la section holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$ definie par Henkin et Leiterer ([2] et [3], lemme 4.2.4) qui vérifie :

$\bullet s(z, z) = 0$ pour tout $z \in M$

$\bullet s(z, \,.\,) : M \to T_z(M)$ est une application biholomorphe d'un voisinage de z dans M sur un voisinage de 0 dans $T_z(M)$.

Rappelons brievement la construction de s. Soit $f : M\sigma C^N$ un plongement propre de M dans C^N et soit

$$O \to T(M) \to M \times C^N \to N(M) \to O$$

la suite exacte definissant le fibré normal à M, note $N(M)$.

D'après le théorème B de Cartan on a $H^1(M, Hom(N(M), T(M))) = 0$, donc la suite exacte ci-dessus admet un scindage global $g : M \times C^N \to T(M)$ tel que $g \circ df = Id_{T(M)}$. La section s est alors definie par

$$s(z, \zeta) = g(z, f(\zeta) - f(z)).$$

Grâce au théorème B applique sur $M \times M$, on peut d'autre part construire une fonction φ holomorphe sur $M \times M$, egale à 1 sur la diagonale $\Delta(M)$ de $M \times M$ et dont la restrictiqu a $M \times M \backslash \Delta(M)$ appartient au sous-faisceau de $O(M \times M)$ engendre par s. De plus il existe un entier $\chi 0$ tel que la fonction $\varphi^X / |s|_9^2$ soit de classe C^2 sur $M \times M \backslash \Delta(M)$ (*cf.* [2] et [3], lemme 4.2.4).

Si D est un ouvert relativement compact de M dont le bord ∂D est de classe C^1 par morceaux, on appellera section de Leray pour (D, s, φ) (*cf.* [3], §4. 3.2) un couple (s^*, χ^*) où χ^* est un entier et s^* une section de $\tilde{T}^*(M \times M)$ definie sur $D \times V_{\partial D}, V_{\partial D}$ etant un voisinage de ∂D dans M, telle que

@ $\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle \neq 0$ pour $z \in D, \zeta \in \partial D$ tels que $\varphi(z, \zeta) \neq 0 (\langle\ ,\ \rangle$ designe le crochet de dualité entre $\tilde{T}(M \times M)$ et $\tilde{T}^*(M \times M))$.

$\bullet \varphi^{x^*}(z, \zeta) / \langle s^*(z, \langle \rangle,\ s(z, \zeta) \rangle$ est de classe C^1 sur un voisinage de $D \times \partial D$ dans $D\times$ M.

Si U est un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^n$ un repere trivialisant holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$, nous noterons respectivement u et u^* les expressions de s et s^* dans ce repere et son dual. Henkin et Leiterer posent alors

$$\Omega^0(\varphi^v, s^*, s) = (n-1)!(2i\pi)^n \varphi_*^{vn} \overline{\omega}'_{z.\zeta}(u^*) \wedge 0)_\zeta(u) \langle u, u \rangle^n$$

ce qui definit une forme différentielle sur $D \times \partial D$.

Mais ce noyau ne contient que des termes de bidegre $(0, q)$ en z.

Pour passer à la représentation des formes différentielles de type (p, q) quelconque il convient donc de completer ce noyau. La premiere expression du noyau de Bochner-Martinelli conduirait à remplacer $0)_\zeta(u)$ par $rn_{z,\zeta}(u)$ dans la définition de $\Omega^0(\varphi^v, s^*, s)$ mais cela ne permet plus de definir une forme différentielle invariante par changement de coordonnées car s est une section du fibre vectoriel $\tilde{T}(M \times M)$. Nous devons donc, pour obtenir un noyau defini globalement sur $D \times \partial D$, utiliser une connexion de $\tilde{T}(M \times M)$.

Soit 0 une metrique hermitienne C^∞ sur $T(M)$, elle induit une metrique hermitienne, notee encore C) sur $\tilde{T}(M \times M)$ et une application antilinéaire $\sigma : \tilde{T}(M \times M) \to \tilde{T}^*(M \times M)$, $\xi \mapsto \langle ., \xi \rangle_9$. On appellera D la connexion de Chern de $\tilde{T}(M \times M)$ relative à 0 et ∇ la connexion de Chern de $\tilde{T}^*(M \times M)$ associee à la metrique 6$*$ induite par C) sur $\tilde{T}^*(M \times M)$.

On notera $\hat{s}$ la section $C^\infty, M \times M \to \tilde{T}^*(M \times M)$ définie par $\hat{s} = \sigma \circ s$, *il* est facile de voir que $(\hat{s}, \chi)$ est une section de Leray pour $(D, s, \varphi), D$ etant n'importe quel ouvert relativement compact à bord C^1 par morceaux de M. Remarquons que si 9 est la metrique hermitienne construite par Henkin et Leiterer à l'aide d'une partition de l'unite subordonnee à un recouvrement trivialisant de $T(M) \wedge$' alors $\hat{s}$ coincide avec la section $\overline{s}$ qu'ils ont definie dans [2] et [3], §4. 3. 1. De plus s et $\overline{s}$ possedent les memes propriétés.

On peut alors definir la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$ par

$$\Omega(\varphi^v, s^*, s) = (-1)^{n-1}(2\pi)^n \varphi_*^{vn} \langle s^*, Ds\rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds\rangle)^{n-1} \langle s, s\rangle^n$$

. $C'estuneformediffrentiellecontinuesurunvoisinagede$D$\times \partial D$ dans $D \times M$ si (s^*, χ^*) est une section de Leray associee à (D, s, φ) et $v\chi^*$. Si de plus $s^* = \hat{s}$, la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$ est de classe C^1 sur $M \times M \backslash \Delta(M)$ si $v\chi$ et admet une singularite d'ordre *2* $n-1$ en $z = \zeta$.

Etudions l'expression de la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$ dans des coordonnées locales.

Soient U un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^n$ un repere trivialisant holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$. La metrique 0 est donnee dans ce repere par une matrice hermitienne definie positive H, C^∞, ne dépendant que de la variable z et la metrique induite par 0 sur $\tilde{T}^*(M \times M)$ est donnee dans le repere dual par la matrice $\overline{H}^{-1}$.

Soient u, u^*, $\hat{u}$ les expressions respectives de s, s^* et $\hat{s}$ dans les reperes choisis; alors les expressions de $Ds, \nabla s^*$ et $\nabla \hat{s}$ dams ces reperes sont données classiquement pde $du + (H^{-1}\partial H) \wedge u$, du' $+(\overline{H}\partial\overline{H}^{-1}) \wedge u^*$ et $d\hat{u} + (\overline{H}\partial\overline{H}^{-1}) \wedge \Theta, etpardfinitionde \hat{s}$ on a: $\hat{u} = \overline{H}\overline{u}.$

On en deduit que :

$$\langle \nabla'' s^*, Ds\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{\partial} u_j^* \wedge (du_j + ((H^{-1}\partial H) \wedge u)_j)$$

$$\langle s^*, Ds\rangle = \sum_{j=1}^n u_j^* (du_j + ((H^{-1}\partial H) \wedge u)_j)$$

. Un calcul analogue à celui du lemme 3 de [1] montre que

$$\langle s^*, Ds\rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds\rangle)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)\ ! \ [_{j=1}\sum^n (-1)^{j-1} u_j^* \bigwedge_{k\neq j} \partial u_k^*]$$

n

$$\wedge \bigwedge_{p=1} (du_p + ((H^{-1}\partial H) \wedge U)_p)$$

. $Onadoncpourzet\zeta$ dans des compacts

$$\langle s^*, Ds\rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds\rangle)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)$$

! $[^{-}_{00'_{z,\zeta}(u^*)} \wedge rn_{z,\zeta}(u) + O(|u|_9)]$. $Danslecasparticulieroul'onprendcommesections^*$ la section $\overline{s}$ de [3] et pour 0 la metrique intérvenant dans la définition de $\overline{s}$ on obtient sur $U \times V \backslash \Delta(U)$

$$\tilde{\Omega}(\varphi^v, \overline{s}, s) = \tilde{K} + O(1|u|_9^{2n-2})$$

(si z et ζ varient dans des compacts de M).

$\tilde{K}$ étant le noyau défini localement dans [5] et qui est une solution fondamentale locale du *8* ([5], §2).

Remarquons d'autre part que si $M = C^n$ et si la metrique 0 est la métrique habituelle de C^n alors les connexions D et ∇ coincident avec la différentielle ordinaire et si on prend :

$$\varphi(z, \zeta) = 1, \ \forall (z, \zeta) \in C^n \times C^n$$

$s(z, \zeta) = z - \zeta$ et $s^*(z, \zeta) = \overline{z} - \overline{\zeta}$ $lenoyau\Omega(\varphi^v, \overline{s}, s)$ n'est autre que le noyau de Bochner-Martinelli dans $C^n \times C^n$.

2. Formule de Koppelman pour les (p,q)-formes différentielles

Dans ce paragraphe nous allons étendre au cas des (p, q)-*formes* différentielles, $0p$, qn la formule de Koppelman donnee dans les variétés de Stein par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$-formes différentielles ([3], théorème 4. 5.2).

Considerons le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$ defini au paragraphe précédent. Remarquons tout d'abord que s etant holomorphe on a $Ds = D's$; les connexions D et ∇ sont d'autre part liées par la relation naturelle $\nabla \hat{s} = \nabla$ (a $\circ s) = \sigma \circ Ds$ ou σ est antilineaire; par suite $\nabla \hat{s} = \nabla'' \hat{s}$ et

$$\Omega(\varphi^v, \hat{s}, s) = (-1)^{n-1}(2\pi)^n \varphi^{vn} \langle \hat{s}, Ds\rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds\rangle)^{n-1} |s|_9^{2n}$$

. $Lenoyau\Omega(\varphi^v, \hat{s}, s)$ admet la décomposition suivante :

$$\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s) = \sum_{1pn, 1qn-1} \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)$$

$ou\Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)$ est de type (p, q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ. On peut remarquer que si $\hat{s}$ coincide avec la section $\overline{s}$ de Henkin et Leiterer, $\sum_{1qn-1} \Omega_q^0(\varphi^v, \overline{s}, s)$ n'est autre que le noyau Ω^o defini par Henkin et Leiterer ([2], §2.4 et [3], §4. 5) pour démontrer la formule de Koppelman pour les $(0,q)$-formes différentielles : ceci résulte du fait que la forme de connexion $H^{-1}\partial H$ qui intérvient dans la définition de $\Omega(\varphi^v,\hat{s},s)$ ne dépend que de la variable z. On pose $\Omega^0_{-1}=\Omega^0_n=0$.

Pour simplifier les expressions ulterieures, nous noterons $\tilde{\Omega}$ et Ω^p_q les noyaux $\Omega(\varphi^v,\hat{s},s)$ et $\Omega^p_q(\varphi^v,\hat{s},s)$ lorsqu'il ne risque pas d'y avoir de confusion.

Designons par $c(\tilde{T}(M\times M))=D^2$ et $c(\tilde{T}^*(M\times M))=\nabla^2$ les formes de courbure des fibrés $\tilde{T}(M\times M)$ et $\tilde{T}^*(M\times M)$ pour les connexions D et ∇; elles sont de bidegré $(1,1)$ et ne dépendent que de la variable z.

LEMME 2. 1. – *On a sur* $M\times M\backslash\Delta(M)$.

$\overline{\partial}\Omega=(-1)^{n-1}(2\pi)^n\varphi^{vn}\langle\hat{s},s\rangle^n[\langle\hat{s},c(\tilde{T}(M\times M)\wedge s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}$

$$+(n-1)\langle\hat{s},Ds\rangle\wedge\langle\nabla\hat{s},c(\tilde{T}(M\times M))\wedge s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-2}]$$

. $etdoncroaunesingularited'ordre2$n-2$surladiagonale.$

Si de plus $c(\tilde{T}(M\times M))=0$ *on* $a\overline{\partial}\tilde{\Omega}=0$.

Dimonstration. – Calculons tout d'abord

$$d[\langle\hat{s},Ds\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}\langle\hat{s},s\rangle^n]$$

. Ona

$$d\langle\hat{s},s\rangle=\langle\nabla\hat{s},s\rangle+\langle\hat{s},Ds\rangle$$

$d\langle\hat{s},Ds\rangle=\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle+\langle\hat{s},c(\tilde{T}(M\times M))\wedge S\rangle$ $\mathrm{d}(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}=(n-1)[\langle c(\tilde{T}^*(M\times M)\wedge\hat{s},Ds\rangle$

$$-\langle\nabla\hat{s},c(\tilde{T}(M\times M))\wedge S\rangle]\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-2}$$

. $D'ou$

$d[\langle\hat{s},Ds\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}\langle\hat{s},s\rangle^n]=1(\langle\hat{s},s\rangle)^{n+1}[\langle\hat{s},s\rangle(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^n$

$$+\langle\hat{s},s\rangle\langle\hat{s},c(\tilde{T}(M\times M))\wedge s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}$$

$-(n-1)\langle\hat{s},s\rangle\langle\hat{s},Ds\rangle\wedge(\langle c(\tilde{T}^*(M\times M))\wedge\hat{s},Ds\rangle$

$$-\langle\nabla\hat{s},c(\tilde{T}(M\times M))\wedge s\rangle)\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-2}$$

$$-n(\langle\nabla\hat{s},s\rangle+\langle\hat{s},Ds\rangle)\wedge\langle\hat{s},Ds\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s},Ds\rangle)^{n-1}]$$

$or\langle\hat{s},Ds\rangle\wedge\langle\hat{s},Ds\rangle=0$

$$\langle \hat{s}, s\rangle(\langle\nabla\hat{s}, Ds\rangle)^n = n\langle\nabla\hat{s}, s\rangle \wedge \langle\hat{s}, Ds\rangle \wedge (\langle\nabla\hat{s}, Ds\rangle)^{n-1}$$

$(il suffit de reprendre les calculs du lemme 3 de [1])$.

Revenons au noyau $\tilde{\Omega}$, comme φ est holomorphe et $\nabla\hat{s} = \nabla''\hat{s}$, on a pour des raisons de degré $\overline{\partial}\tilde{\Omega} = (-1)^{n-1}(2\pi)^n\varphi^{vn}$

$$\times\left\{\langle\hat{s}c(\tilde{T}(M\times M))\wedge s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s}Ds\rangle)^{n-1} + (n-1)\langle\hat{s}Ds\rangle\Lambda\langle\nabla\hat{s}c(\tilde{T}(M\times M))\wedge s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat{s}Ds\rangle)^{n-2}\right\}\langle\hat{s}, s\rangle$$

, $tudions maintnant la singularite de \overline{\partial}\Omega$ en $z = \zeta$. Par définition de $\hat{s}$, on a $(\hat{s}, s) = |s|_9$ et si z et ζ varient dans des compacts de M, les formes différentielles $c(\tilde{T}(M\times M), \nabla\hat{s}$ et Ds sont bornées donc : $\overline{\partial}\tilde{\Omega} = O(|s|_9^{-2n+2})$ car $|\hat{s}| = |\sigma s| = O(|s|_9)$.

THÉORÈME 2.2. – *Soient D un domaine relativement compact à bord C^1 par morceaux de la variété de Stein M et $v2\chi$. Si f est une (p,q)-forme différentielle continue sur $\overline{D}$, telle que $\overline{\partial}f$ soit aussi continue sur $\overline{D}, 0p, qn$, on a pour $z\in D$ (2. 1)* $f(z) = (-1)^{p+q}[\int_{\zeta\in\partial D} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta) - \int_{\zeta\in D}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)$

$$+\overline{\partial}_z\int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta) + (-1)^{p+q+1}\int_{\zeta\in D} f(\zeta)\wedge P_q^p(z,\zeta)]$$

où $\Omega_q^p(z,\zeta) = \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z,\zeta)$ et $P_q^p(z,\zeta)$ est la partie de bidegre (p,q) en z de an.

Remarque 1. – Si $p = 0, P_q^p = 0$ car $c(\tilde{T}(M\times M))$ est de bidegre $(1,1)$ en z, on retrouve donc la formule (2. 4. 6) de [2].

Remarque 2. – Si la metrique 0 est telle que $c(\tilde{T}(M\times M)) = 0$, on obtient la formule de Koppelman classique pour les (p,q)-*formes* différentielles.

Demonstration. – La méthode utilisee 1C1 est la meme que celle de la démonstration du théorème 4. 5.2 de [3]. II nous a semble plus clair d'en rappeler 1C1 les principales etapes.

II suffit de prouver pour toute forme différentielle g de bidegre $(n-p, n-q), C^\infty$ a support compact dans D, que $\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z) = (-1)^{p+q}[\int_{(z,\zeta)\in Dx\partial D} f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)\wedge g(z)$

$$-\int_{(z}, \zeta\rangle\in DxD\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega_q^p(z,\zeta)\wedge g(z)]$$

$+\int_{(z,\zeta)\in DxD} f(\zeta)\wedge\Omega_{q-1}^p(z,\zeta)\wedge\overline{\partial}_z g(z) - \int_{(z,\zeta)\in DxD} f(\zeta)\wedge P_q^p(z,\zeta)\wedge g(z)$. $Par des considrations de bidegre$ et Ω_{q-1}^p par $\tilde{\Omega}$, P_q^p par $\overline{\partial}\Omega$ ainsi que ∂f et ∂g par df et dg. On doit donc démontrer l'égalité $(2'.2)\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z)$

$$= (-1)^{p+q}[\int_{(z,\zeta)\in Dx\partial D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z) - \int_{(z,\zeta)\in DxD} d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)]$$

$$+\int_{(z,\zeta)eDxD} f(\zeta)\wedge\Omega(z,\zeta)\wedge d_z g(z)-\int_{(z,\zeta)\in DxD} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{z,\zeta}\Omega(Z,\zeta)\wedge g(z)$$

. $Griceauxpropritsdes, onpeuttrouverunvoisinage$U$_\Delta \subset M\times M$ de la diagonale $\Delta = \{(z,z)|z\in M\}$ tel que pour tout z fixe dans $M, s(z,\zeta)$ soit biholomorphe pour tout $\zeta\in M$ tel que $(z,\zeta)\in U_\Delta$. On considere les ouverts

$$U_\epsilon=\{(z,\zeta)\in U_\Delta\times U_\Delta||s|_9<\epsilon\},\ \epsilon>0$$

. $Comme$D$\subset\subset M$, pour ϵ assez petit, $\partial U_\epsilon\cap(D\times D)$ est lisse.

Nous allons appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle $f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$ sur l'ouvert $D_\epsilon = D\times D\backslash U_\epsilon$.

Nous choisissons ϵ pour que

$$\partial D_\epsilon\cap(suppg\times M)=(D\times\partial D\cup\partial U_\epsilon)\cap(suppg\times M)$$

$$, alors \int_{(z,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)-\int_{(z,\zeta)\in\partial U_\epsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$

$$=\int_{(z.\zeta)\in D_\epsilon} d_{z,\zeta}(f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z))$$

. Ord$_{z,\zeta}(f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)) = d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$

$$+(-1)^{p+q}f(\zeta)\wedge d_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)+(-1)^{p+q+1}f(\zeta)\wedge\Omega(z,\zeta)\wedge d_z g(z)$$

et pour des raisons de bidegre on peut remplacer $d_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$ par $\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$, on en deduit donc que

(2. 3) $$\int_{(z,\zeta)\in Dx\partial D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)-\int_{(z,\zeta)\in\partial U_\epsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$

$$=\int_{(z,\zeta)\in D_\epsilon} d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)+(-1)^{p+q}\int_{(z,\zeta)\in D_\epsilon} f(\zeta)\wedge\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$

$$+(-1)^{p+q+1}\int_{(z,\zeta)\in D_\epsilon} f(\zeta)\wedge\Omega(z,\zeta)\wedge d_z g(z)$$

. $ilestclairque\tilde{\Omega}$ ayant une singularite d'ordre $2\,n-1$ *au* voisinage de la diagonale et $\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}$ une singularite d'ordre 2 $n-2$, ces deux formes différentielles sont localement intégrables sur $D\times\overline{D}$ et par conséquent les intégrales du second membre de (2. 3) tendent vers les intégrales correspondantes de (2.2) quand $\epsilon\to 0$. Il reste donc à montrer que

(2. 4) $$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{(z,\zeta)\in\partial U_\epsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)=(-1)^{p+q}\int_{z\in D} f(z)\wedge g(z).$$

Après usage d'une partition de l'unite sur le support de g, on peut supposer que le support de g est contenu dans un ouvert de carte U de M. Soit V un ouvert tel qfu $suppg\subset V\subset\subset U$.

Si ϵ est assez petit, les conditions $z \in V$ et $(z, \zeta) \in U_\epsilon$ impliquent $\zeta \in U$. Avec les notations du paragraphe 1, le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$ admet pour $(z, \zeta) \in V \times U$ l'expression en coordon- nées locales

$$\tilde{\Omega}(z, \zeta) = (n-1)!(2i\pi)^n \varphi^{vn} eo'_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z,\zeta}(u) - |u|_9^{2n} + O(|u|_9^{-2n+2})$$

. $Enparticuliersur \partial U_\epsilon \cap (V \times (U \cap \overline{D}))$

$$\Omega(z, \zeta) = (n-1)!(2i\pi)^n$$

cp $0)'_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge 00_{z,\zeta}(u) - \epsilon^{2n} + O(\epsilon^{-2n+2})$. $Orlamesuredel'ensemble \partial U_\epsilon \cap (V \times U)$ est un 0 (ϵ^{2n-1}), il en résulte que (2.4) se deduira de

(2. 5) $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{(z.\zeta) \in \partial U_\epsilon \cap (VxU)} f(\zeta) \wedge K(z, \zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in V} f(z) \wedge g(z)$

ou

$$K(z, \zeta) = (n-1)!(2i\pi)^n \varphi^{vn} 0)'_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge 0)_{z,\zeta}(u) - \epsilon^{2n}$$

. $Orcersultatestdmontredans([3], p.176-177) pourlasection \overline{s}$ et donc pour $\hat{s}$ car ces deux sections ont les memes propriétés (*cf.* [3], §4. 3. 1).

Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 2. 3. – *Le noyau* $\Omega(\varphi^v, \hat{s}, s)$ *definit un courant sur* $M \times M$ *qui vérifie*

$$\overline{\partial} \tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s) = [\Delta] + P$$

où $[\Delta]$ *est le courant d'intégration sur la diagonale* Δ *de* $M \times M$ *et* P *la forme différentielle localement intégrable qui coïncide avec* $\partial \tilde{\Omega}$ *sur* $M \times M \backslash \Delta(M)$. *En particulier si* $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, *alors* a0 $(\varphi^v, \hat{s}, s) = [\Delta]$.

Ce résultat n'est autre que l'intérpretation en terme de courants de la formule (2. 1); il montre que le courant d'intégration [A] n'est autre que le residu au sens de Griffiths th Harris ([10], p. 369) de la forme différentielle $\Omega(\varphi^v, \hat{s}, s)$.

3. Transformée de Bochner-Martinelli

On considere une hypersurface reelle V fermée, orientee de classe $C^{1+\alpha}, \alpha > 0$, dans un ouvert U de la variété de Stein M, telle que $U \backslash V$ ait exactement deux composantes connexes U^+ et U^-

On suppose que l'orientation sur V est celle obtenue lorsque l'on considere que V est la frontiere de U^+.

Si f est une (p, q)-*forme* différentielle de classe C^1 sur V, à support compact on appelle transformée de Bochner-Martinelli de f la forme différentielle F definie sur $U \backslash V$ par

$$F(z) = \int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta)$$

. $Dans[6]nousavonsdejaetudielesproprits de$F$, lorsque$f$estune$(0, q)$-formediffrentielle, lesrsultats$
q)$-formesdiffrentielles.$

Les notations sont celles de [6], §3. On suppose que

$$V = \{z \in M/p(z) = 0\},\ p \in C^{1+\alpha}(M)$$

. Sif$\in C_{p,q}.(V)$ on notera f_t sa projection sur l'espace quotient de $C_{p,q}(V)$ par les formes différentielles normales complexes. Si F est une (p, q)-*forme* différentielle continue sur U^+ ou U^- nous dirons qu'elle se prolonge continument à $U^\pm \cup V$ modulo $\overline{\partial}p$ s'il existe une (p, q)-forme différentielle $\tilde{F}$ continue sur $U^\pm \cup V$ telle que $F \tilde{-} F = \overline{\partial}p \wedge G$ sur $U^\pm$, G etant une forme différentielle continue sur $U^\pm$ de bidegre $(p, q-1)$.

THÉORÈME 3. 1. – *Soit f une (p, q)-forme différentielle, C^1 sur V, à support compact. La transformée de Bochner-Martinelli de f*

$$F(z) = \int_{\zeta\in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta)$$

admet, modulo $\overline{\partial}p$, des prolongements continus à $U^+ \cup V$ er *$U^- \cup V$ notes F^+ et F^- et on a*

$$F_t^+ - F_t^- = (-1)^{p+q} f_t$$

. $Demonstration.--IIs'agitd'unproblemelocal, onpeutdoncsupposerque$U$estundomainedecartedeM.$

Choisissons des coordonnées et un repere trivialisant de $\tilde{T}(M \times M)$ sur cet ouvert, on a alors d'aprés le paragraphe 1

(3. 1) $\Omega(\varphi^v, \hat{s}, s) = (n-1)!(2i\pi)^n \varphi^{vn} \overline{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z,\zeta}(u)|u|_9^{2n} + O(|u|_{\}}^{-2n+2\text{‘}})$

si $(z, \zeta) \in U \times U \backslash \Delta(U)$, z et ζ variant dans des compacts de M.

Pour des raisons de degre

$$F(z) = \int_{\zeta\in V} f(\zeta) \wedge \Omega(\varphi^v, \hat{s}, s)$$

et par conséquent grace a(3. 1) la forme F est somme d'un terme continu au voisinage de V et de la forme

$$F_0(z) = (n-1)!(2i\pi)^n \int_{\zeta\in V} f(\zeta) \wedge \varphi^{vn}(z, \zeta) \overline{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z,\zeta}(u)|u|_9^{2n}$$

. $Lethormersultedoncduthormeanaloguemontrepour$F$_0$ dans [6] (Prop. 2. 3. 1).

Remarque. – Dans [6] nous avions etudie lorsque f est une $(n, n-q-1)$-forme différentielle

$$G(\zeta) = \int_{z\in V} f(z) \wedge \Omega_q^0(\varphi^v, \overline{s}, s)(z, \zeta) = \int_{z\in V} f(z) \wedge \Omega^0(\varphi^v, \overline{s}, s)(z, \zeta)$$

où $\Omega^0 = \sum_{0qn-1} \Omega_q^0$.

II n'est pas surprenant que F et G possedent les memes propriétés au voisinage de V. En effet d'apres (3. 1) et le lemme 2. 3.5de [6], si $\Omega^n = \sum_{0qn-1} \Omega_q^n$,

$$\Omega^n(\varphi^v, \overline{s}, s)(z, \zeta) - \Omega^0(\varphi^v, \overline{s}, s)(\zeta, z)$$

possede une singularité d'ordre 2 $n - 2$ en $z = \zeta$.

4. Formule de Koppelman-Leray

Sur $M \times M \times [0, 1]$ on designe par $\overline{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ le fibré vectoriel image reciproque de $T^*(M)$ par l'application $(z, \zeta, \lambda) \mapsto z$.

On notera $0*$ la metrique induite par la metrique 0 de $T(M)$ sur ce fibré.

Soit Δ la connexion hermitienne sur $\overline{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ relative à la metrique $\sigma*$, holomorphe en les variables (z, ζ) et invariante par translation dans la direction X.

Si $C_k^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}')$ designe l'espace des formes différentielles C^∞ de degre k sur $M \times M \times [0, 1]$ à valeurs dans $\overline{E}^* = \overline{T}^*(M \times M \times [0, 1])$, on a la décomposition suivante

$$C_k^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}') = \bigoplus_{p+q+r=k} C_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}')$$

$o\bar{\text{U}}$C$_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}^*)$ designe l'espace des formes différentielles de bidegre (p, q) en (z, ζ) et de degre r en X.

La connexion A se décompose en $\Delta' + \Delta''$ ou

$$\Delta'$$

: $C_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}^*) \to C_{p+1,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}')$ Delta$''$: $C_{p,q,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}')$

$$\to C_{p,q+1,r}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}') \oplus C_{p,q,r+1}^\infty(M \times M \times [0, 1], \overline{E}')$$

. *tudionsl'expressionde*Δ en coordonnées locales. Choisissons une trivialisation de $\overline{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ et notons v^* l'expression d'une section t^* de $\overline{T}^*(M \times M \times [0, 1])$ alsso

$$\Delta' t^* = \overline{H}(\partial_{z,\zeta}(\overline{H}^{-1} v^*))$$

011 H est la matrice de la métrique 0 dans la trivialisation correspondante de $T(M)$

$$\Delta'' t^* = (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v^*$$

. $Soit$D$unouvertrelativementcompact, bord$C^1 par morceau de M et (s^*, χ^*) une section de Leray pour (D, s, φ) (*cf.* §1).

Comme Henkin et Leiterer ([3], §4. 5), on pose pour tout $\lambda \in [0,1], z \in D$ et $\zeta \in V'_{\partial D}$ tel que $\langle s^*(z,\zeta), s(z,\zeta)\rangle \neq 0$

(4.1)t$^*(z,\zeta,\lambda) = (1-\lambda)s^*(z,\zeta)\langle s^*(z,\zeta), s(z,\zeta)\rangle + \lambda \hat{s}(z,\zeta)|s(z,\zeta)|_9^2$. $D'apreslesproPritsde\varphi, s$ et s^* l'application

$$(z,\zeta,\lambda) \mapsto \varphi^{\max(\chi,\chi^*)}(z,\zeta)t^*(z,\zeta,\lambda)$$

definit une section C^1 de $\overline{T}^*(M \times M \times [0,1])$ sur un voisinage de $D \times \partial D \times [0,1]$ dans $D \times M \times [0,1]$. On en deduit que pour tout entier $v \max(\chi,\chi^*)$ la forme différentielle $\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = (-1)^{n-1}/(2\pi)^n \varphi^{vn}\langle t^*, Ds\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-1}$ est continue sur un voisinage de $D \times \partial D \times [0,1]$ dans $D \times M \times [0,1]$.

LEMME 4. 1. – *On a les egalites suivantes*

$$\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=0} = \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$$

$$\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=1} = \tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$$

. *Demonstration.* – $-D'apresl'expression(4.1)de$t* il suffit de montrer que pour toute fonction μ de classe C^1, définie sur un ouvert de $M \times M$ contenant le domaine de définition d'une section s^* de $\tilde{T}^*(M \times M)$ on a

$$\langle \mu s^*, Ds\rangle \wedge (\langle \Delta''(\mu s^*), Ds\rangle)^{n-1} = \mu^n \langle s^*, Ds\rangle \wedge (\langle \Delta'' s^*, Ds\rangle)^{n-1}$$

; $onappliqueracetteformulesuccessivementavec\mu = \langle s^*, s\rangle^{-1}$ pour $\lambda = 0$ et $\mu = \langle \hat{s}, s\rangle^{-1} = |s|_9^{-2}, s^* = \hat{s}$ pour $\lambda = 1$.

La formule résulte elle-meme immediatement du fait que

$$\langle \mu s^*, Ds\rangle \wedge \langle d''\mu \wedge s^*, Ds\rangle = -\mu d''\mu \wedge \langle s^*, Ds\rangle \wedge \langle s^*, Ds\rangle = 0$$

.

LEMME 4. 2. – *Soit* $W \times [0,1]$ *le domaine de definition de* $\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s), W \subset D\times$ M. *Pour tout* $(z,\zeta,\lambda) \in W \times [0,1]$, *on a* $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = (-1)^{n-1}(2\pi)^n \varphi^{vn}[\langle t^*, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-1}$

$$+(n-1)\langle t^*, Ds\rangle \wedge \langle \Delta'' t^*, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-2}]$$

. $Sidepluc$c$(\tilde{T}(M \times M)) = 0$, *on* a $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = 0$.

Demonstration :

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = (-1)^n(2\pi)^n \varphi^{vn}[(\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^n + \langle t^*, D^2 s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-1}$$

$$-(n-1)\langle t^*, Ds\rangle(\langle\Delta''^2 t^*, Ds\rangle - \langle\Delta'' t^*, D^2 s\rangle)$$

$$\wedge(\langle\Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-2}]$$

$or \Delta''^2 = 0, D^2 s = c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s.$

Considerons une trivialisation de $\overline{T}^*(M \times M \times [0,1])$, soit v^* l'expression de t^* dams cette trivialisation et u l'expression de s dans la trivialisation correspondante de $\tilde{T}(M \times M)$ $\varphi^{vn}(\langle\Delta'' t^*, Ds\rangle)^n$

$$= (-1)^{n(n-1)/2} n\ !\ ({}_j\bigwedge_{=1}^{n}(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^v v_j^*)) \wedge \big(n \wedge du_k + ((H^{-1}\partial H) \wedge u)_k k = 1\big).$$

On reprend alors la démonstration du lemme 4. 5.4 de [3] : on a $\sum_{k=1} \varphi^v v_k^* u_k = \varphi^v$ par définition de t^* les fonctions φ et u_k etant holomorphes en (z,ζ) et independantes de λ, on en deduit

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^v v_k^*) = 0$$

$$n$$

d'ou $k1 \bigwedge_{=} (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(\varphi^v v_k^*) = 0$ car le membre de gauche est continu d'aprés les propriétés des sections de Leray et l'ensemble $\{(z,\zeta,\lambda) \in W \times [0,1] | s(z,\zeta) \neq 0\}$ est dense dans $W \times [0,1]$. On a donc : $\varphi^{vn}(\langle\Delta'' t^*, Ds\rangle)^n = 0$ et le lemme est démontre.

Nous allons mainténant pouvoir généraliser au cas des (p,q)-formes différentielles la formule de Koppelman-Leray donnée par Henkin et Leiterer ([3], théorème 4. 5.3).

THÉORÈME 4. 3. – *Soient D un domaine relativement compact à bord C^1 par morceaux de la variété de Stein $M, (s^*, \chi^*)$ une section de Leray pour (D, s, φ) et v un entier plus grand que* $\max(2\chi, \chi^*)$. *On suppose de plus que toutes les derivees de $(\varphi^v s^* / \langle s^*, s\rangle)(z,\zeta)$ qui sont d'ordre 2 en z et d'ordre 1 en ζ sont continues pour tout (z,ζ) dans un voisinage W de $D \times \partial D$ dans $D\times$* M. *Alors pour toute (p,q)-forme différentielle f continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}, 0p, qn,$ on a*

$$(-l) f(z) = \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^v, s^*, s)(z,\zeta) - \int_{\zeta \in D} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z,\zeta)$$

$$- \int_{(\zeta,\lambda) \in \partial D x l 0} .1 l \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}_q^p(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta,\lambda)$$

$$+\overline{\partial}_z(\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^v, \hat{s}, s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial D\times l0},1lf(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_{q-1}(\varphi^v,s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda))$$

$$+(-1)^{p+q+1}[\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge P^p_q(z,\zeta)-\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial Dx[0,1]}f(\zeta)\wedge Q^p_q(z,\zeta,\lambda)],\ z\in D$$

, *o*Ŭ$\Omega^p_q(\varphi^v,s^*,s),\Omega^p_q(\varphi^v,\hat{s},s),\overline{\Omega}^p_q(\varphi^v,s^*,\hat{s},s),P^p_q$ et $\wedge Q^p_q$ *designent respectivement les parties de type* (p,q) en z *de* $\tilde{\Omega}(\varphi^v,s^*,s)$, $\tilde{\Omega}(\varphi^v,s,s)$, $\overline{\Omega}(\varphi^v,s^*,s,s)$, $\overline{\partial}_{z,\zeta}\tilde{\Omega}(\varphi^v,\hat{s},s)$, $(\overline{\partial}_{z.\zeta}+d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v,s^*,\hat{s},s)$.

Remarque 1. – Si $p=0,P^p_q=Q^p_q=0$ car $c(\tilde{T}(M\times M))$ est de bidegre $(1,1)$ en z, on retrouve donc la formule (4. 5. 32) de [3].

Remarque 2. – Si la metrique 0 est telle que $c(\tilde{T}(M\times M))=0$ alors $P^p_q=q=0$ et on obtient la généralisation aux variétés de Stein de la formule de Koppelman-Leray pour les (p,q)-formes différentielles de C^n.

En suivant la méthode utilisee par Henkin et Leiterer dans la dimonstration du théorème 4. 5.3 de [3], il suffit, pour prouver le théorème 4. 3, d'appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle $f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}(\varphi^v,s^*,\hat{s},s)$.

COROLLAIRE 4.4. – *Sous les hypotheses du théorème* 4. 3, *si de plus* $s^*(z,\zeta)$ *depend holomorphiquement de* $z\in D,q1$ *et* $c(\tilde{T}(M\times M))=0$, *alors*

$$f(z)=(-1)^{p+q}[\overline{\partial}_Z(\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^V,\hat{s},s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial Dx[0,1]}f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_{q-1}(\varphi^v,s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda))-(\int_{\zeta\in D}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\Omega^p_q(\varphi^v,\hat{s},s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial Dx[0,1]}\overline{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_q(\varphi^v,s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda))]$$

. *Enparticulierpourtoute*(p, q)*−formediff rentiellecontinuesur*$\overline{D}$ *telle que* $\overline{\partial}f=0$ *sur D*

$$g(z)=(-1)^{p+q}(\int_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\Omega^p_{q-1}(\varphi^v,\hat{s},s)(z,\zeta)$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\partial Dx[0,1]}f(\zeta)\wedge\overline{\Omega}^p_q(\varphi^v,s^*,\hat{s},s)(z,\zeta,\lambda))$$

est une solution continue de l'equation $\overline{\partial}g=f$ *dans* D.

Demonstration. – Cela se deduit immediatement du théorème 4. 3 car si $s^*(z,()$ est holomorphe en $z,\Omega^p_q(\varphi^v,s^*,s)=0$ dis que $q1$ et comme $c(\tilde{T}(M\times M))=0P^p_q=Q^p_q=0$ d'apres les lemmes 2. 1 et 4.2.

Nous allons mainténant prouver une autre formule de Leray-Koppelman, analogue a celle du théorème 1 de [1]. Une telle formule pourrait permettre d'aborder des probleras de division dans les ouverts des variétés de Stein comme l'a fait Berndtsson [9] pour lrr ouverts de C^n.

Dans toute la suite du paragraphe, on considerera un domaine D relativement compact a bord C^1 par morceaux de la variété de Stein $M, (s^*, \chi^*)$ une section de Leray pour (D, s, φ) vérifiant :

$\bullet s^*$ est une section de classe C^2 de $\tilde{T}^*(M \times M)$ definie sur $\overline{D}\times$ D.

$\bullet$ Pour tout compact L de D, il existe des constantes positives $c_1(L), c_2(L)$ et $\eta(L)$ telles que si $d(z,\zeta)$ designe la distance entre z, ζ on ait

$$|s^*(z,\zeta)|_{9^*} c_1(L) d(z,\zeta)$$

$$|\langle s^*(z,\zeta), s(z,\zeta)\rangle| c_2(L)(d(z,\zeta))^2$$

si $d(z,\zeta) < \eta(L)$ pour $\zeta \in \overline{D}$ et $z \in L$.

Remarquons que de telles sections existent: par exemple $\hat{s}$.

On désignera par K une forme différentielle de classe C^1 sur $\overline{D} \times \overline{D} \backslash \Delta(\overline{D})$ de degre *2* $n-1$ telle que :

1. $dK = R$ sur $\overline{D} \times \overline{D} \backslash \Delta(\overline{D})$, ou R est une forme différentielle localement intégrable sur $\overline{D}\times$ D.

2. Pour tout compact L de D il existe une constante $c_3(L)$ telle que

$$|K - \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)| c_3(L)(d(z,\zeta))^{-2n+2}$$

si $\zeta \in \overline{D}$ et $z \in L$. 3.K*estdebidegre*(n, n-1).

THÉORÈME 4. 5. – *Sous les hypotheses ci-dessus, si f est une (p,q)-forme différentielle continue sur $\overline{D}$ telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{D}, 0p, qn$, on a pour tout $z \in D$*

$$(-1)^{p+q} f(z) = \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge K_q^p(z,\zeta) - \int_{\zeta \in D} \overline{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_q^p(z,\zeta)$$

$$+\overline{\partial}_z [\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge K_{q-1}^p(z,\zeta)] + (-1)^{p+q-1} \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge R_q^p(z,\zeta)$$

. K_q^p, R_q^p *designant les composantes de bidegre (p,q) en z et $(n-p, n-q-1)$ en ζ de K et R, avec la convention $K_{p,-1} = 0$.*

Demonstration. – La démonstration est analogue à celle de la formule de Koppelman (théorème 2.2) (*voir* aussi [1] démonstration du théorème 1).

Grâce aux propriétés 1 et 3 du noyau K en appliquant la méthode utilisee au début de la démonstration du théorème 2.2 on se ramene à démontrer la formule 2.4 ou $\tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)$ est remplace par K, soit en gardant les memes notations

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{(z,\zeta) \in \partial U_\epsilon \cap (VxU)} f(\zeta) \wedge K(z,\zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in V} f(z) \wedge g(z)$$

. $Deplusd'apreslaproprit2de\mathrm{K}, ilsuffitdedmontrercersultatpour\tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$. Puisque nous l'avons deja démontre lorsque $s^* = \hat{s}$ *il* suffit de prouver que si $I_\epsilon = \int_{(z,\zeta)\in}$ au, $\cap(VxU)f(\zeta) \wedge \Omega(\varphi^v, s^*, s)(z,\zeta) \wedge g(z)$

$$-\int_{(z}, \zeta) \in \partial U_\epsilon \cap (VxU)f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^V, \hat{s}, S)(Z,\zeta) \wedge g(z)$$

$onaJim\mathrm{I}_\epsilon = 0.$

$$\epsilon \to 0$$

Dans $V \times U \times [0,1]$ on considere la variété à bord

$$X_\epsilon = \{(z,\zeta) \in V \times U | d(z,\zeta) = \epsilon\} \times [0,1]$$

on a

$$\partial X_\epsilon = \{d(z,\zeta) = \epsilon\} \times \{1\} \cup \{d(z,\zeta) = \epsilon\} \times \{0\}$$

. $OnvaappliquerlaformuledeStokeslaformediffrentielle$

$$f(\zeta) \wedge \Omega(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z)$$

et à la variété à bord X_ϵ :

$$\int_{\partial X_\epsilon} f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z) = \int_{x_\epsilon} d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z))$$

. $Grceaulemme4.1onapardfinitionde\partial X_\epsilon$

$$I_\epsilon = -\int_{\partial X_\epsilon} f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z)$$

. $Pardesconsidrationsdedegreonvoitque\mathrm{d}_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z))$

$$= (\overline{\partial}_{z.\zeta} + d_\lambda)(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z))$$

$$= \partial_\zeta f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge \partial_z g(z)$$

$$+(-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z)$$

. $Evaluons\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ et $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ sur X_ϵ.

Puisque nous sommes sur $V \times U$ nous pouvons exprimer $\Omega(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ en coordonnées locales; si $u, v,\ \hat{u},\ u^*$ sont les expressions de $s, t^*, \hat{s}, s^*$ dans les coordonnées choisies on a

$$\Omega(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s) = (n-1)!(2i\pi)^n \varphi^{vn} (\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{k \neq j} (\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v_k) \wedge \big(n \wedge du_l + ((H^{-1}\partial H) \wedge u)_l l = 1\big)$$

En fait seule intérvient la composante α de $\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ de degre 1 en $d\lambda$.

Puisque

$$v_k = (1-\lambda) u_k^* \langle u^*, u \rangle + \lambda \hat{u}_k \langle \hat{u}, u \rangle$$

, cart* est definie par (4. 1)

$$(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v_k = d\lambda(\hat{u}_k \langle \hat{u}, u \rangle - u_k^* \langle u, u \rangle) * + (1-\lambda) \overline{\partial}_{z,\zeta} ({}_* u_k^* \langle u, u \rangle) + \lambda \overline{\partial}_{z,\zeta} (\hat{u}_k \langle \hat{u}, u \rangle)$$

α vérifie alors d'apres les estimations (4.2) et la définition de $\hat{s}$

$$|\alpha| < C|v||\hat{u}_k \langle \hat{u}, u \rangle - u_k^* \langle u^*, u \rangle|(d(z,\zeta))^{-2n+4} C'(d(z,\zeta))^{-2n+2}$$

pour $\zeta \in U$ et $z \in V$ compact de D.

De meme en utilisant l'expression de $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ donnee dans le lemme 4.2 ainsi que la définition de $\hat{s}$ et les estimations (4.2) vérifiees par s^*, on voit que la composante β de $(\overline{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)\overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)$ de degre 1 en $d\lambda$ vérifie $|\beta| = 0(d(z,\zeta)^{-2n+3})$ sur $V \times U$ au voisinage de la diagonale. Par conséquent

$$d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \overline{\Omega}(\varphi^v, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta) \wedge g(z))$$

est un $O(d(z,\zeta)^{-2n+2})$ et comme la mesure de X_ϵ est un $O(\epsilon^{2n-1})$, on obtient

$Jim \mathrm{I}_\epsilon = 0.$

$$\epsilon \to 0$$

$Onpeutegalementdeduireduthorme 4.5 lecorollairesuivantrelatif larsolutiondu \overline{\partial}.$

COROLLAIRE 4.6. – *Sous les hypotheses du théorème* 4. 5, *si de plus* $s^*(z,\zeta)$ *depend holomorphiquement de* $z \in D$ *et si* $dK = 0$, *pour toute* (p,q)*-forme différentielle* f *continue sur* $\overline{D}$ *telle que* $\overline{\partial} f = 0$ *sur* $D, 0pn, 1qn,$

$$g(z) = (-1)^{p+q} (\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge K_{q-1}^p(z,\zeta))$$

est une solution continue de $\overline{\partial} g = f$ *dans* D.

Remarque 3. – Pour obtenir un noyau K vérifiant $dK = 0$, il suffit de prendre $K = \tilde{\Omega}(\varphi^v, s^*, s)$ dans un cas ou la metrique 9 peut-etre choisie telle que $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$.

Remarque 4. – Henkin et Leiterer ont construit dans [3] une section s^* vérifiant les hypothèses du corollaire 4. 4 lorsque le domaine D est supposé strictement pseudoconvexe de classe C^2.

On peut en deduire par des méthodes analogues à celles de Kerzman [4] dans C^n une section s^* vérifiant les hypothéses du corollaire 4. 6et une solution du a vérifiant les estimées L^p.

Remarque 5. – Lorsque f est une p-forme différentielle holomorphe le théorème 4. 5 nous donne si $dK = 0$ la représentation de Cauchy-Leray suivante de f

$$f(z) = (-1)^p \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge K_0^p(z, \zeta)$$

.

5. Noyaux pour les formes différentielles

a valeurs dans un fibre vectoriel holomorphe $On considere un fibre vectoriel holomorphe$F$sur$M$, et si \Pi_1$ et Π_2 designent les projections de $M \times M$ sur $M, (z, \zeta) \mapsto z$ et $(z, \zeta) \mapsto \zeta$, on notera $G = Hom(\Pi_2^* F, \Pi_1^* F)$; c'est un fibré vectoriel holomorphe sur $M \times M$ dont les fibres sont données par $G_{(z,\zeta)} = Hom(F_\zeta, F_z)$.

Nous allons construire un noyau Λ, c'est-à-dire une forme différentielle C^1 sur $M \times M \backslash \Delta(M)$ à valeurs dans le fibré vectoriel G, qui nous permettra d'obtenir une formule de Koppelman pour les formes différentielles à valeurs dans le fibre F.

LEMME 5. 1. *–Il existe une section holomorphe ψ de G vérifiant*

(i) $\psi(z, z) = Id_{F_Z}$ *pour tout* $z \in M$.

Demonstration. – Appliquons le théorème B de Cartan au faisceau $G \otimes J_\Delta$ dans la srnte exacte

$$0 \to G \otimes J_\Delta \to G \to G|_\Delta \to 0$$

, $o\mathrm{EJ}_\Delta$ désigne l'idéal de la diagonale. II en résulte que le morphisme de restriction

$$H^0(M \times M, G) \to H^0(\Delta, G|_\Delta) \simeq H^0(M, Hom(F, F))$$

est surjectif, d'où le lemme.

PROPOSITION 5.2. – *La forme différentielle* A $(z, \zeta) = \psi(z, \langle\rangle \tilde{\Omega}(\varphi^v, \hat{s}, s)(z, \zeta)$ *est de classe* C^1 *sur* $M \times M \backslash \Delta(M)$ *et* à *valeur dans* G, *elle vérifie*

$$\overline{\partial} \Lambda = [\Delta].\ Id_F + P.\psi$$

où $[\Delta]$ *est le courant d'intégration sur la diagonale* Δ *de* $M \times M$ *et* P *une forme différentielle localement intégrable sur* $M \times M$ *proportionnelle à* $c(\tilde{T}(M \times M))$. *En particulier si* $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$ *on* $a\overline{\partial}\Lambda = [\Delta]\ .\ Id_F$.

Demonstration. – II suffit d'appliquer le lemme 5. 1et le corollaire 2. 3 pour obtenir la proposition.

Le courant d'intégration sur la diagonale [A], apparait donc 1C1 egalement comme le residu de la forme différentielle A.

On en deduit alors immediatement la formule de Koppelman suivante pour les formes différentielles à valeurs dans le fibré vectoriel F.

COROLLAIRE 5.3. – *Soient* D *un domaine relativement compact à bord* C^1 *par morceaux de la variété de Stein* M *et* $v2\chi$. *Si* f *est une* $(p,q) - fo$ rme *différentielle continue sur* $\overline{D}$, *à valeurs dans* F *telle que* $\overline{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\overline{D}, 0p, qn$, *on a pour* $z \in D$

$$f(z) = [\int_{\zeta \in \partial D} \Lambda(z,\zeta) \wedge f(\zeta) - \int_{\zeta \in D} \Lambda(z,\zeta) \wedge \overline{\partial}_\zeta f(\zeta)$$

$$+\overline{\partial}_z \int_{\zeta \in D} \Lambda(z,\zeta) \wedge f(\zeta) + (-1)^{p+q+1} \int_{\zeta \in D} P(z,\zeta)\psi(z,\zeta) \wedge f(\zeta)]$$

. $Remarque.--Lenoyauquenousvenonsdeconstruirepourlesformesdiffrentiellesavaleursdansunfi$
q)$-formesdiffrentiellesaceluides(0,$ q)$-formesdiffrentielles; eneffet$

$$C^\infty_{p,q}(M,F) \simeq C^\infty_{0,q}(M, \Lambda^p T^* M \otimes F)$$

. $Cecipermetdefairedisparaitreletermeencourbure$P$^p_q$ dans toutes les formules de Koppelman.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDERSSON et B. BERNDTSSON, *Henkin-Ramirez Formulas with Weight Factors* (*Ann. de l'lnst. Fourier*,

vol. 32, 1982, P. 91-110).

[2] G. HENKIN et J. LEITERER, *Global Integral Formulas for Solvering the* ∂*-Equation on Stein Manifolds* (*Ann.*

Pol. Math., vol. 39, 1981, P. 93-116).

[3] G. HENKIN et J. LEITERER, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Birkhaüser, Verlag, 1984.

[4] N. KERZMAN, *Hölder and* L^p *Estimates for Solution of* $\overline{\partial} u = f$ *in Strongly Pseudoconvex Domains* (*Comm.*

Pure Appl. Math., vol. 24, 1971, P. 301-379).

[5] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Formules intégrales de Koppelman sur une variété de Stein* (*Proc. Amer. Math.*

Soc., vol. 90, 1984, p. 221-225).

[6] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Transformation de Bochner-Martinelli dans une variété de Stein.*

[7] I. LIEB, *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten* (*Math. Ann.*,

vol. 190, 1971, p. 6-44 et 199, 1972, p. 241-256).

[8] N. $\varphi VRELID$, *Integral Representation Formulas and L^p Estimates for the ∂-Equation* (*Math. Scand.*, vol. 29, 1971, P. 137-160).

[9] B. BERNDTSSON, *A Formula for Interpolation and Division in C^n* (*Math. Ann.*, vol. 263, 1983, p. 393-418).

[10] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-interscience, New York, 1978.

(Manuscrit reyu le 12 decembre 1986,

revise le 1" juin 1987).

J.-P. Demailly

Université de Uscroble I,

Institut Fourier, $B.P.$ 74,

$L.A.$ au C.N.R.S. n^O188,

38400 Saint-Martin d'Heres

C. Laurent-Thiébaut

Université Paris-VI,

Analyse complexe et géométrie,

$L.A.$ au C.N.R.S. n^{o}213,

4, place Jussieu,

75252 Paris Cedex 05.