Structures géométriques et physique de l'Univers

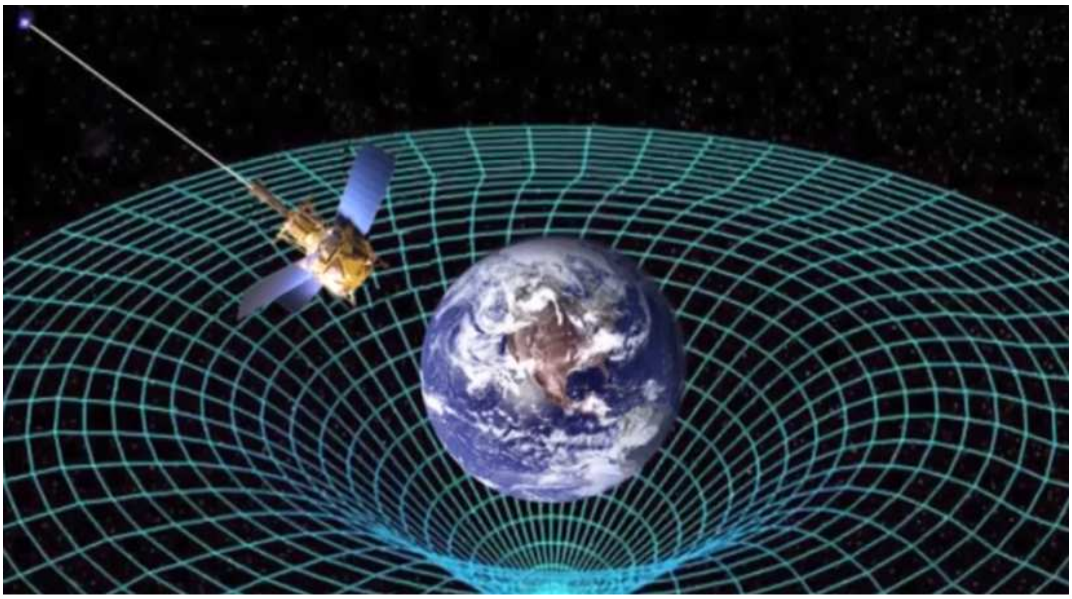
Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université Grenoble Alpes, France

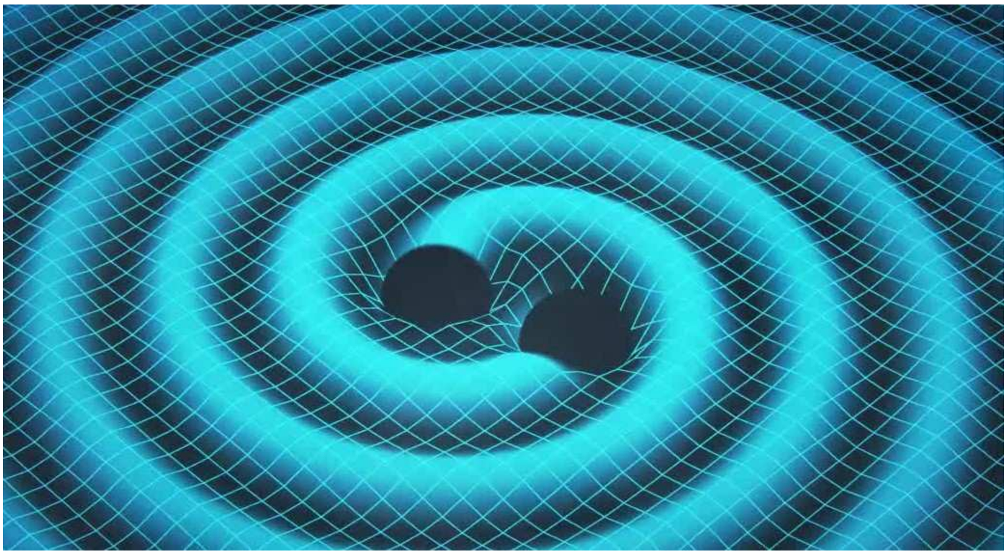
7 juin 2018
Présentation au Collège Louis Aragon
Villefontaine

Géométrie de l'espace

Selon Einstein et sa théorie de la relativité générale (1907–1915), l'espace est courbé en raison de la distribution de matière, qui induit un champ gravitationnel



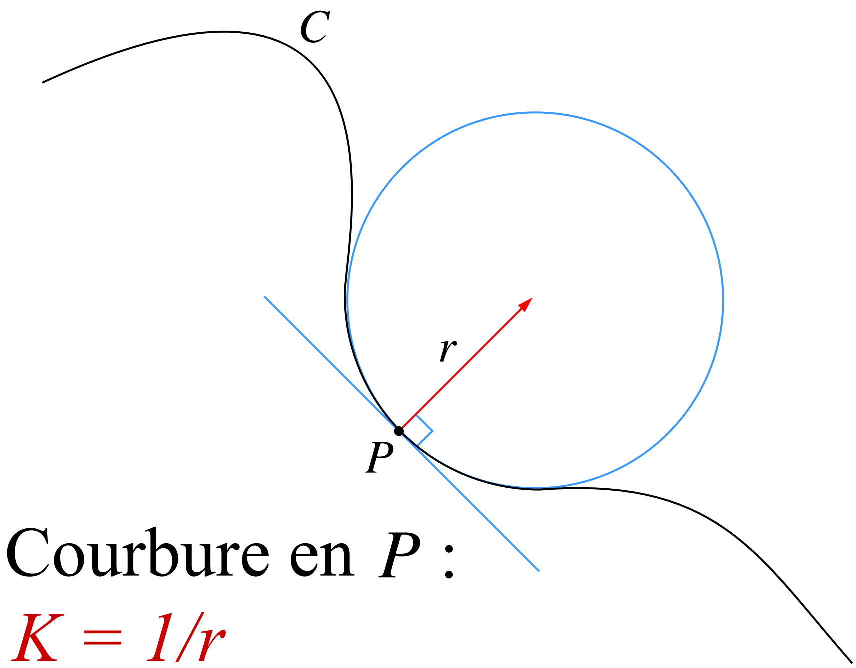
Découvertes des ondes gravitationnelles (2015)



Le 14 septembre 2015, on a détecté l'arrivée sur Terre d'ondes gravitationnelles, provoquée par la fusion de deux trous noirs de 36 et 29 masses solaires, situés à 1,3 milliards d'années-lumière. Dans le choc, 3 masses solaires ont été converties en énergie !

Comment calcule-t-on la courbure ?

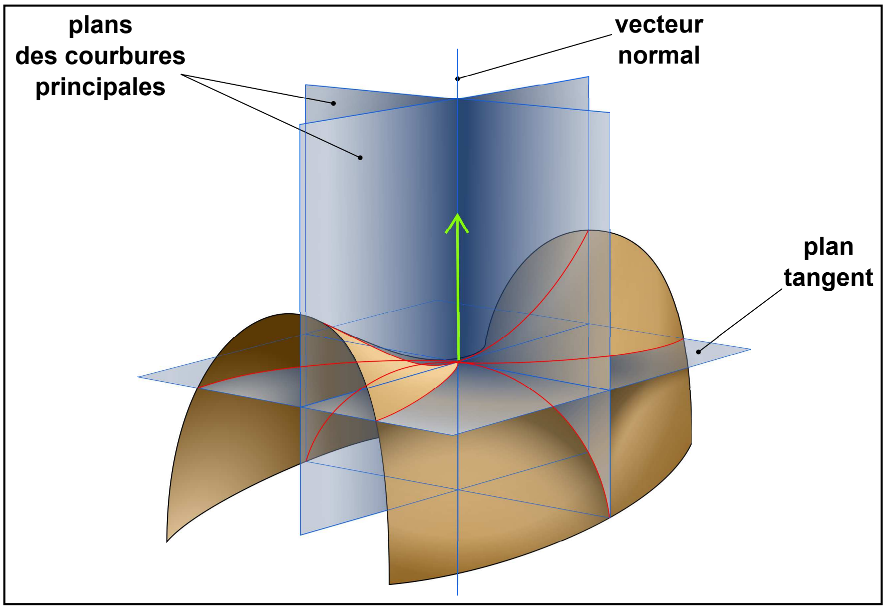
Une courbe et son cercle osculateur de rayon r



Si le rayon $r = \infty$, la courbure K est nulle.

Coefficients de courbure d'une surface

Les deux courbures d'une surface dans un espace de dimension 3

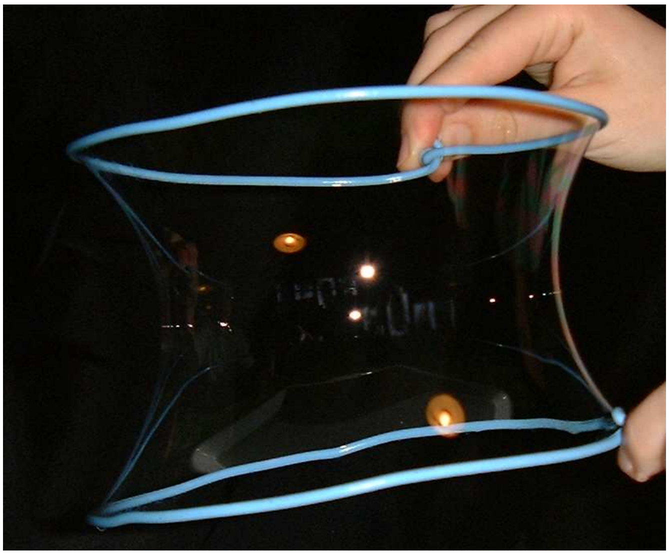


$$K_1 = \frac{1}{r_1} > 0, \qquad K_2 = \frac{1}{r_2} < 0$$

La courbure moyenne

Courbure moyenne : $M = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

Une bulle de savon "libre" est de courbure moyenne nulle en tout point : $K_1 = -K_2, \quad M = 0$



Catenoide:

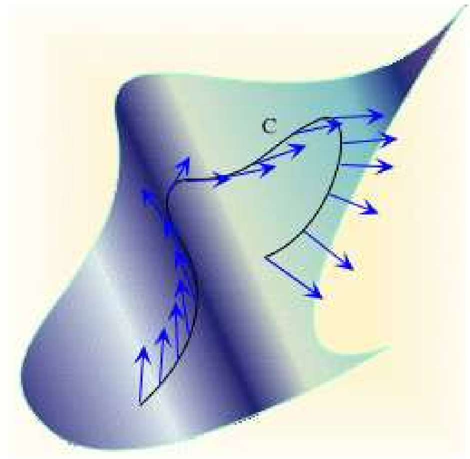
$x = a \cosh u \cos\theta$

$y = a \cosh u \sin\theta$

$z = au$

Métrique riemannienne / Tenseur de courbure

Bernhard Riemann (1826–1866) / espace à n dimensions



$$ds^2 = \sum g_{\alpha\beta}(x)\, dx^\alpha dx^\beta$$

Métrique riemannienne

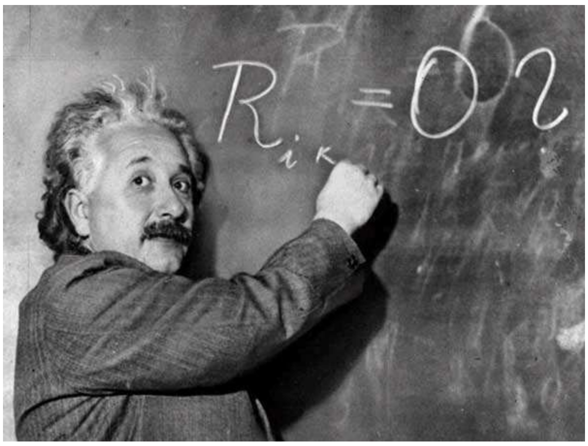
$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma}, \quad 1 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le n.$$

Tenseur de courbure de Riemann
(calcul précisé par Levi-Civita)

Tenseur de Ricci / équation d'Einstein

Le tenseur de Ricci est une sorte de "courbure moyenne" :

$$R_{\alpha\beta} = \sum_\gamma R^\gamma_{\alpha\beta\gamma}$$



Équation d'Einstein (1879–1955) de la relativité générale

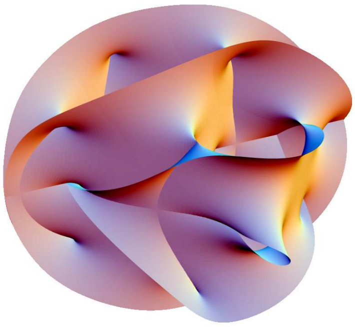
$$R_{\alpha\beta} - \Big(\Lambda + \frac{1}{2}R\Big) g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}.$$

Équation d'Einstein en mathématiques

Equation d'Einstein "simplifiée" (univers vide !!)

$$R_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}, \qquad \lambda = \text{constante.}$$

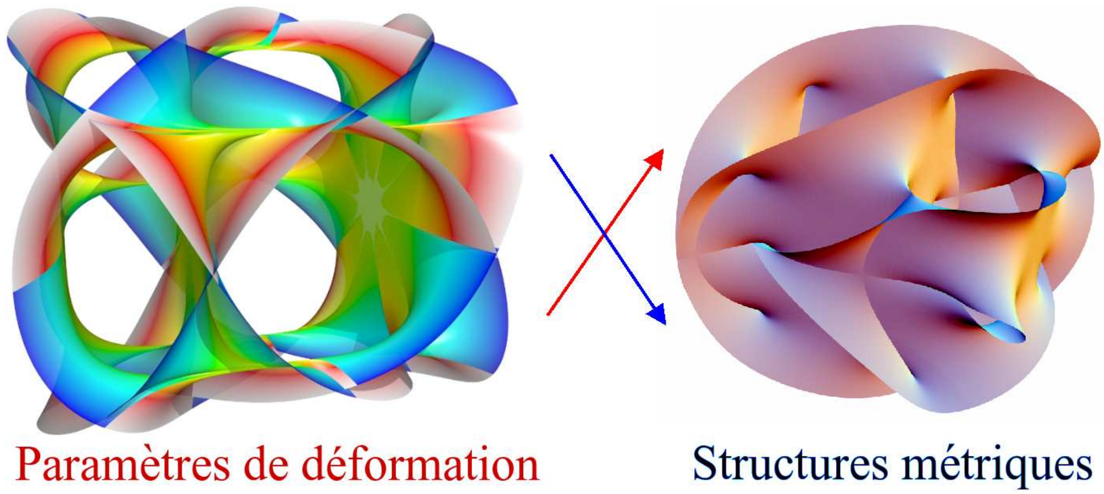
Vérifiée (avec $\lambda = 0$, $R_{\alpha\beta} \equiv 0$) par la
variété de Calabi-Yau 6-dimensionnelle définie dans $\mathbb{CP}^4$ par



$$z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 + z_4^5 - 5a\, z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 = 0, \quad z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C},$$

(avec 1 paramètre a de déformation). Yau: on a bien Ricci $\equiv 0$.

Variétés de Calabi-Yau, sièges des champs de forces?



Notre univers aurait 6 dimensions supplémentaires ultra-miscroscopiques ($\simeq 10^{-35}$ m) qui seraient le siège des champs de force (théorie des cordes)... sous forme d'une variété de Calabi-Yau de dimension complexe 3.
Celle-ci étant de dimension réelle 6, ceci amène à un univers de $4 + 6 = 10$ dimensions au total.