



# Une approche rigoureuse de la géométrie euclidienne élémentaire transposable dans l'enseignement secondaire

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

14 juin 2009 / ADIREM / Formation continue / Valpré

# Euclide : axiomatisation de la géométrie

32. Celle qui a les costez egaux, mais non les angles droicts, se nomme Rhombe.
33. Mais celle qui a les costez opposez & les angles opposez egaux, mais n'a pas costez egaux ensemble ny les angles droicts, se nomme Rhomboïde.
34. Excepté celle cy, les figures de quatre costez se nomment tablettes ou trapèzes.
35. Lignes droictes paralleles sont celles, lesquelles estans en vn mesme plan & menées de part & d'autre ne concourent point ensemble.
36. Parallelogramme, est vne figure planç contenue de quatre lignes droictes, desquelles les opposees sont paralleles entr'elles.

*S'ENSUIVENT LES DEMANDES,  
ou posicions simples.*

Demande I.

- D'**Vn point à vn autre point mener vne ligne droicte.
2. Continuer vne ligne droicte finietant qu'il en sera besoin.
3. Descrire vn cercle à l'entour d'un point, & d'une telle distance qu'on voudra.

## COMMUNES SENTENCES.

*Premiere.*

- L**Es choses egales à vne, sont egales entre elles.
2. Et si à choses egales s'adioustant choses egales, les routes seront egales.
3. Et si de choses egales, se leuent choses egales, les restes seront egales.
4. Et si à choses inegales s'adioustant choses egales, les routes seront inegales.
5. Et si des choses inegales se leuent choses egales, les restes seront inegales.
6. Les choses qui sont doubles à vn mesme, sont egales entr'elles.
7. Et les choses qui sont moitié d'une mesme, sont egales entr'elles.
8. Et les choses qui conuenient ensemble & entre elles, sont egales entr'elles.
9. Le tout est plus grand que sa partie.
10. Tous angles droicts sont egaux entr'eux.
11. Si deffus deux lignes droictes tombe vne ligne droicte, faisant les angles dedans d'une mesme part, plus petits que deux droicts, icelles estans prolongees infiniment se rencontreront de la part en laquelle les angles sont plus petits que deux droicts.
12. Deux lignes droictes ne comprennent pas vn espace.

**B**

# Viète et l'algèbre nouvelle



# Descartes et la géométrie analytique



# L'axiomatique de Hilbert



LES PRINCIPES FONDAMENTAUX  
DE  
**LA GÉOMÉTRIE**

PAR  
M. D. HILBERT.

Traduit par L. LAUGEL.

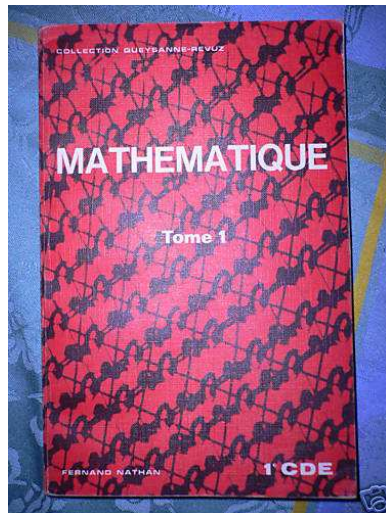


PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

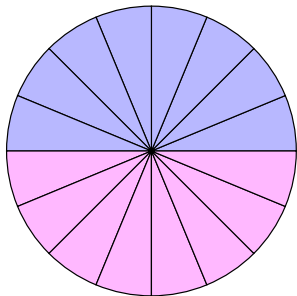
1900

# La réforme des mathématiques modernes

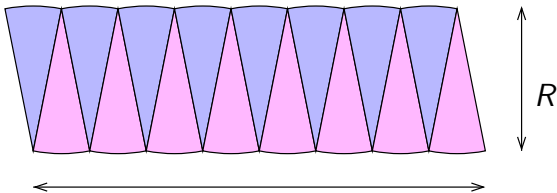


# Raisonnement : aire du disque (fin primaire (?))

disque



→ parallélogramme



$$\pi = \frac{P}{D} \Rightarrow P = 2\pi R$$

$$\simeq \frac{P}{2} = \pi R$$

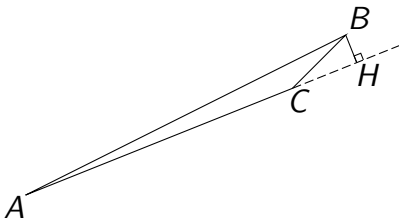
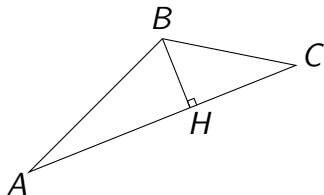
d'où (aire du disque de rayon  $R$ ) =  $\pi R \times R = \pi R^2$ .

# Une approche basée sur la distance

**Notion primitive** : la distance  $d(A, B) = AB$ .

**Inégalité triangulaire.** *Étant donnés trois points  $A, B, C$ , les distances vérifient toujours  $AC \leq AB + BC$ , autrement dit la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.*

**Justification intuitive.**



L'hypoténuse est plus grande que les côtés de l'angle droit ...



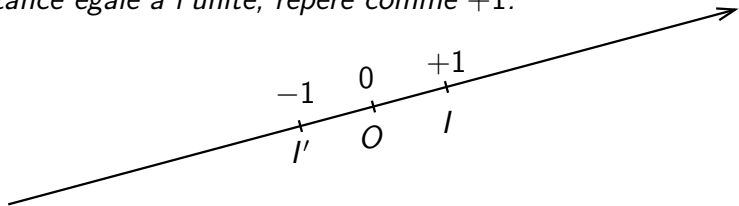
# On peut déjà donner des définitions rigoureuses

## Segments, droites, demi-droites.

- *Étant donné deux points  $A, B$  du plan ou de l'espace, on appelle segment  $[A, B]$  d'extrémités  $A, B$  l'ensemble des points  $M$  tels que  $AM + MB = AB$ .*
- *On dit que trois points  $A, B, C$  sont alignés avec  $B$  situé entre  $A$  et  $C$  si  $B \in [A, C]$ , et on dit qu'ils sont alignés (sans autre précision) si l'un deux appartient au segment formé par les deux autres.*
- *Étant donné deux points distincts  $A, B$ , la droite  $(AB)$  est l'ensemble des points  $M$  alignés avec  $A$  et  $B$ ; la demi-droite  $[A, B)$  d'origine  $A$  contenant  $B$  est l'ensemble des points  $M$  alignés avec  $A$  et  $B$  tels que  $M$  soit situé entre  $A$  et  $B$ , ou  $B$  entre  $A$  et  $M$ . Deux demi-droites de même origine sont dites opposées si leur réunion forme une droite.*

# Axes : premier lien avec la "géométrie analytique"

**Définition.** *Un axe est une droite  $\mathcal{D}$  muni d'une origine  $O$  et d'une orientation, c'est à dire un choix d'un point  $I$  situé à une distance égale à l'unité, repéré comme  $+1$ .*



**Abscisse d'un point.**

$x_M = +OM$  si  $M \in [0, I)$ ,  $x_M = -OM$  si  $M \in [0, I')$ .

**Mesure algébrique.**  $\overline{AB} = x_B - x_A = \pm AB$ .

**Relation de Chasles.**  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

Elle résulte du fait que  $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$ .

## Droites, plans, parallélisme.

- Deux droites  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}'$  sont dites concourantes si leur intersection est constituée d'exactly un point.
- Un plan  $\mathcal{P}$  est un ensemble de points balayé par les droites  $(UV)$  telles que  $U$  décrit une droite  $\mathcal{D}$  et  $V$  une droite  $\mathcal{D}'$ , pour des droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  concourantes données. Si  $A, B, C$  sont 3 points non alignés, on note  $(ABC)$  le plan associé par exemple aux droites  $\mathcal{D} = (AB)$  et  $\mathcal{D}' = (AC)$ .
- Deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont dites parallèles si elles sont confondues, ou bien si elles sont contenues dans un même plan  $\mathcal{P}$  et ne coupent pas.

# Angles (secteurs angulaires)

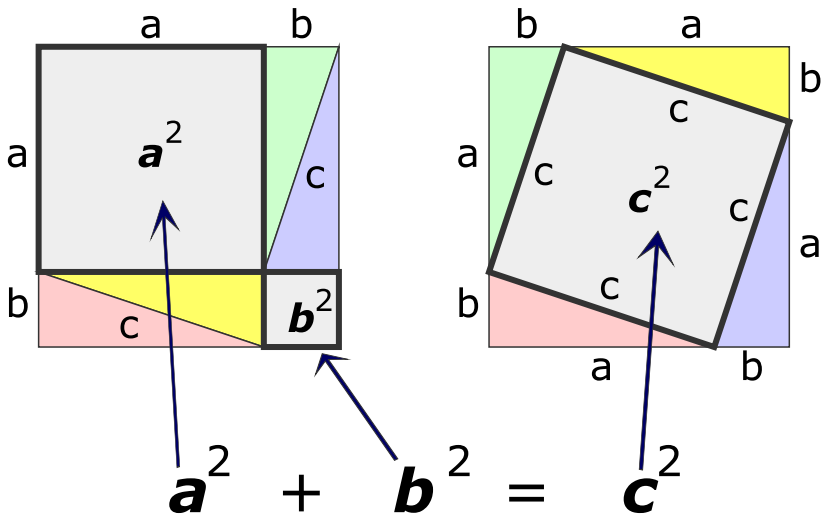
## Angles (secteurs angulaires).

- *Un angle aigu  $\widehat{BAC}$  (ou secteur angulaire aigu) défini par deux demi-droites  $[A, B)$ ,  $[A, C)$  de même origine et non opposées est l'ensemble balayé par les segments  $[U, V]$  avec  $U \in [A, B)$  et  $V \in [A, C)$ .*
- *Un angle obtus (ou secteur angulaire obtus)  $\widetilde{BAC}$  est le complémentaire de l'angle aigu  $\widehat{BAC}$  dans le plan  $(ABC)$ , union les 2 demi-droites  $[A, B)$  et  $[A, C)$  comme bord.*
- *Étant donné une droite  $\mathcal{D}$  et une demi-droite  $[A, M)$  avec  $A \in \mathcal{D}$  et  $M \notin \mathcal{D}$ , le demi-plan bordé par  $\mathcal{D}$  contenant  $M$  est la réunion de tous les segments  $[U, V]$  tels que  $U \in \mathcal{D}$  et  $V \in [A, M)$ . Le demi-plan opposé est celui associé à une demi-droite  $[A, M')$  opposée à  $[A, M)$ . On parle aussi dans ce cas d'angles plats de sommet  $A$ .*

## Cercles, arcs, mesures des angles.

- *Le cercle de centre  $A$  et de rayon  $R > 0$  est l'ensemble des points  $M$  d'un plan  $\mathcal{P}$  tels que  $d(A, M) = AM = R$ .*
- *Un arc de cercle est l'intersection d'un cercle avec un secteur angulaire ayant pour sommet le centre du cercle.*
- *La mesure d'un angle (en degrés) est calculée proportionnellement à la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte sur un cercle dont le centre est le sommet de l'angle, de sorte que le cercle complet corresponde à  $360^\circ$ .*
- *angle plat = angle de mesure  $180^\circ$  (arc = demi-cercle)*
- *angle droit = moitié d'un plat = angle de mesure  $90^\circ$ .*
- *Deux demi-droites de mêmes extrémités sont dites perpendiculaires si elles forment un angle droit.*

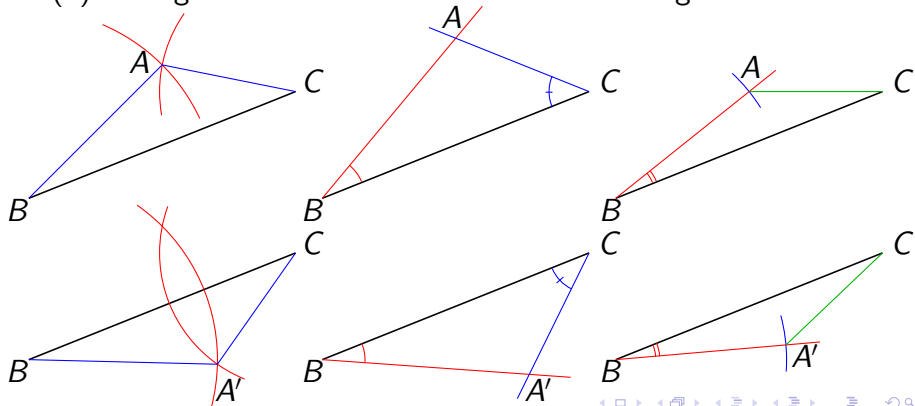
# Le théorème de Pythagore



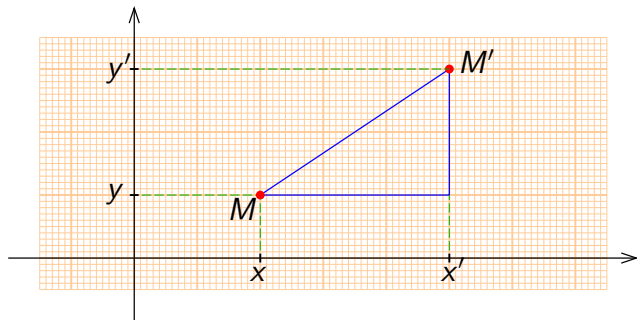
# Constructions de triangles / "cas d'isométrie"

**Problème.** Construire un triangle  $ABC$  ayant une base  $BC$  donnée et deux autres éléments donnés, à savoir :

- (1) les longueurs des côtés  $AB$  et  $AC$ ,
- (2) les mesures des angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$ ,
- (3) la longueur du côté  $AB$  et la mesure de l'angle  $\widehat{ABC}$ .



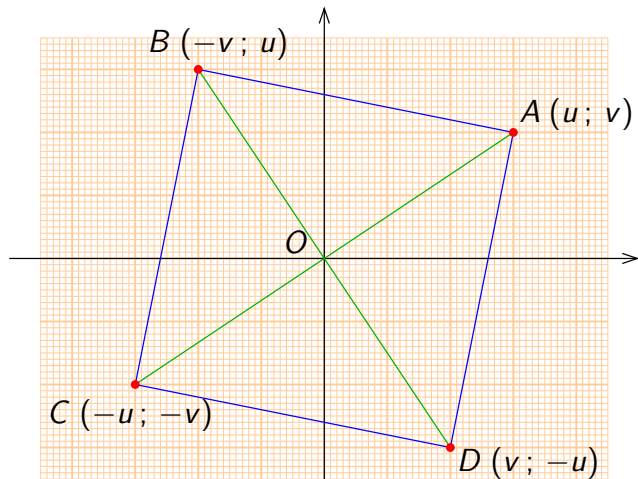
# Les coordonnées cartésiennes



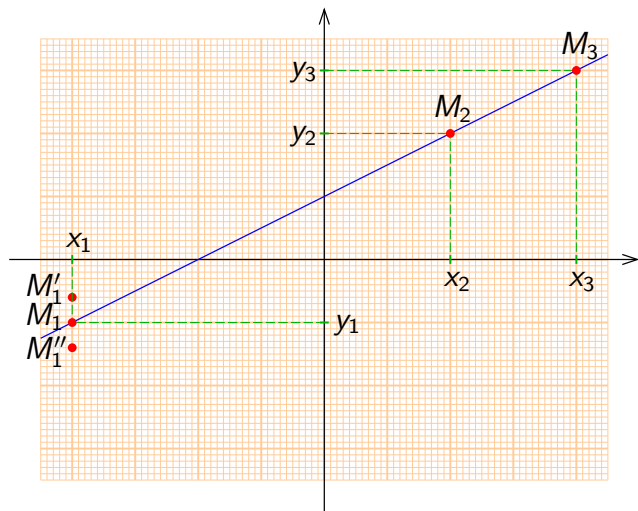
$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$



# Le carré en coordonnées cartésiennes

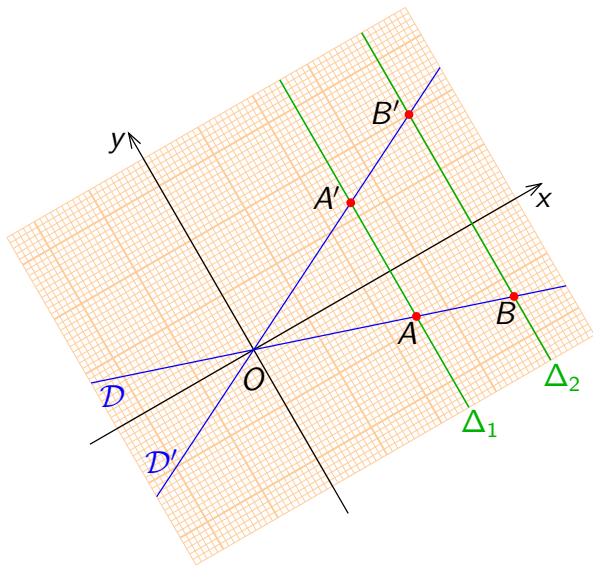


# Droite $y = ax + b$



$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

# Le théorème de Thalès



# Une “axiomatique” rigoureuse

**Définition.** On appellera plan euclidien un ensemble de points noté  $\mathcal{P}$ , muni d'une distance  $d$ , c'est-à-dire une application

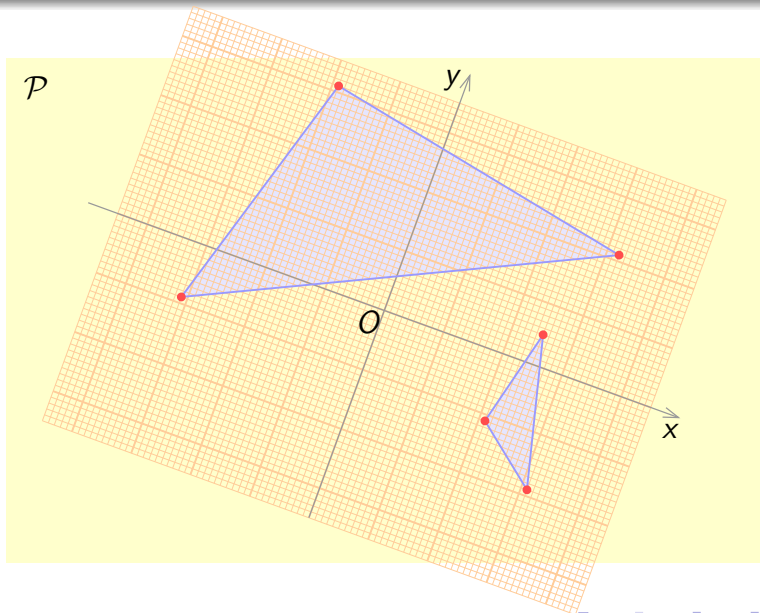
$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geq 0,$$

de sorte qu'il existe des “systèmes de coordonnées orthonormés” : à tout point  $M \in \mathcal{P}$  on peut faire correspondre un couple de coordonnées  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ , par une correspondance bijective  $M \mapsto (x; y)$  satisfaisant l'axiome (Pythagore + Descartes)

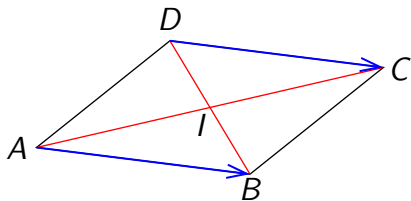
$$d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

pour tous points  $M(x; y)$  et  $M'(x'; y')$ .

# Interprétation géométrique de cette "axiomatique"



# Construction des vecteurs



On trouve donc la condition nécessaire et suffisante

$$x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \quad y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_D) = \frac{1}{2}(y_A + y_C),$$

ce qui équivaut encore à

$$x_B + x_D = x_A + x_C, \quad y_B + y_D = y_A + y_C$$

ou encore à

$$x_B - x_A = x_C - x_D, \quad y_B - y_A = y_C - y_D.$$

# Le produit scalaire

La *norme*  $\|\vec{V}\|$  d'un vecteur  $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$  est la longueur  $AB = d(A, B)$  d'un bipoint quelconque qui le définit. On pose

$$(1) \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2} (\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2)$$

de sorte que l'on a en particulier  $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$ . Le nombre  $\vec{U} \cdot \vec{V}$  s'appelle le *produit scalaire* de  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ , et  $\vec{U} \cdot \vec{U}$  s'appelle aussi le *carré scalaire* de  $\vec{U}$ , noté  $\vec{U}^2$ . On obtient par conséquent

$$\vec{U}^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2.$$

D'après la définition (1), nous avons

$$(2) \quad \|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V},$$

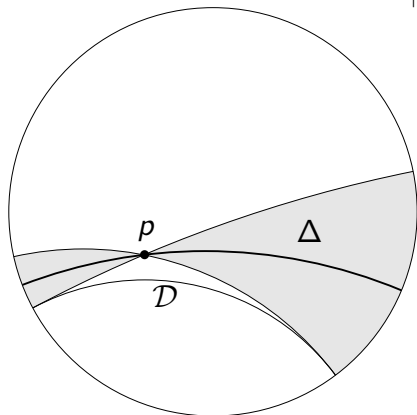
ce qui peut se récrire

$$(3) \quad (\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V}.$$

# Les géométries non euclidiennes

## Le disque de Poincaré (ou plan hyperbolique)

$$d_P(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}{1 - \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}.$$





# Jusqu'aux travaux de Mikhail Gromov

