



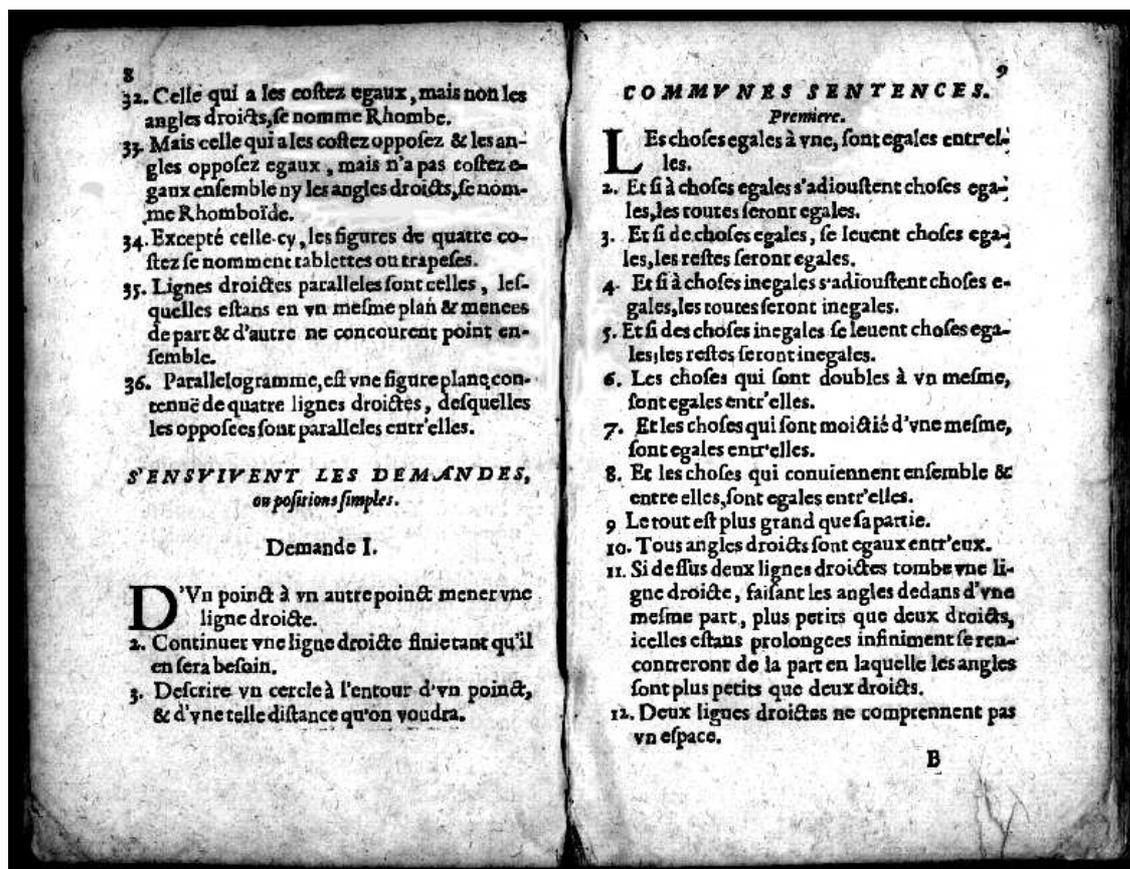
Une approche rigoureuse de la géométrie euclidienne élémentaire transposable dans l'enseignement secondaire

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

14 juin 2009 / ADIREM / Formation continue / Valpré

Euclide : axiomatisation de la géométrie



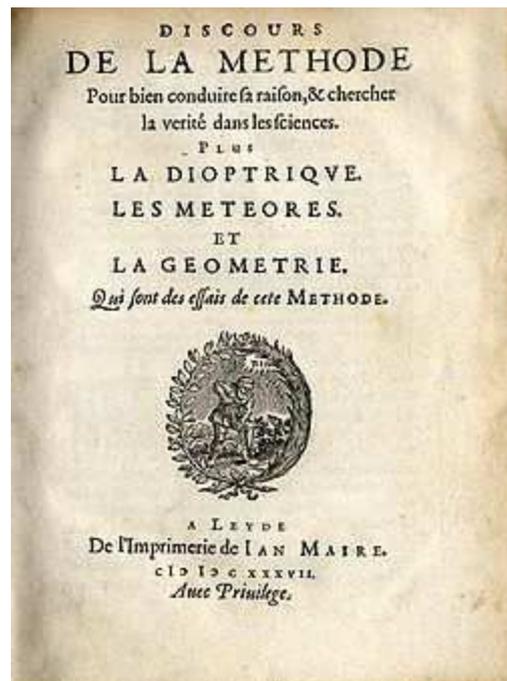
Viète et l'algèbre nouvelle



Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 14/06/2009

Géométrie euclidienne élémentaire

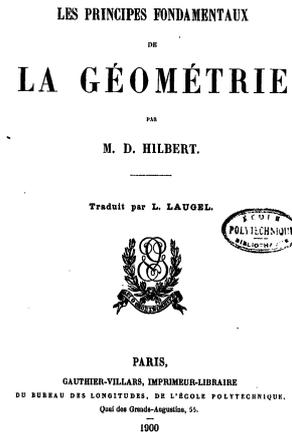
Descartes et la géométrie analytique



Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 14/06/2009

Géométrie euclidienne élémentaire

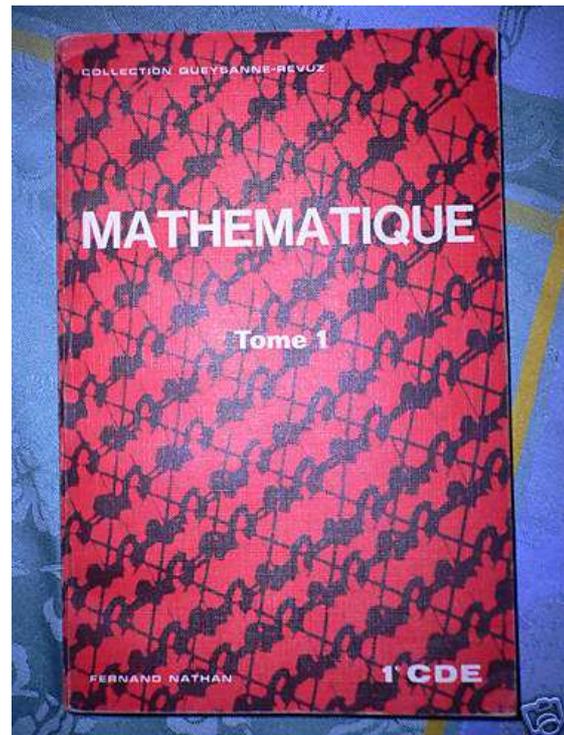
L'axiomatique de Hilbert



Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 14/06/2009

Géométrie euclidienne élémentaire

La réforme des mathématiques modernes



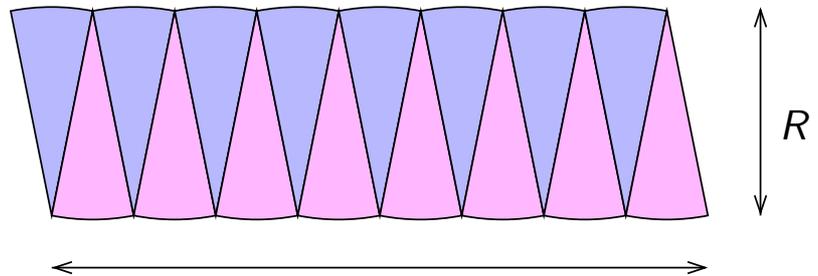
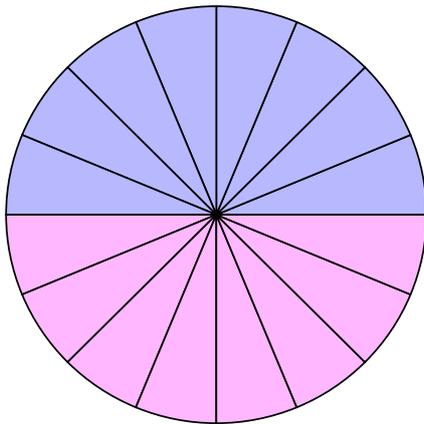
Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 14/06/2009

Géométrie euclidienne élémentaire

Raisonnement : aire du disque (fin primaire (?))

disque

→ parallélogramme



$$\pi = \frac{P}{D} \Rightarrow P = 2\pi R$$

$$\simeq \frac{P}{2} = \pi R$$

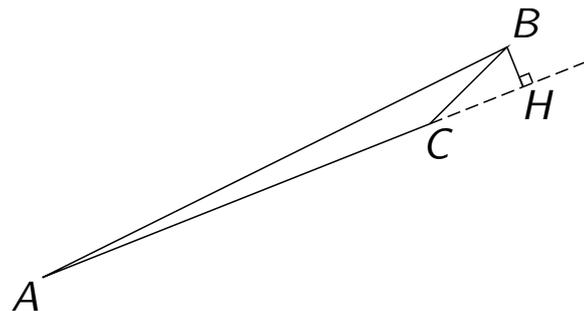
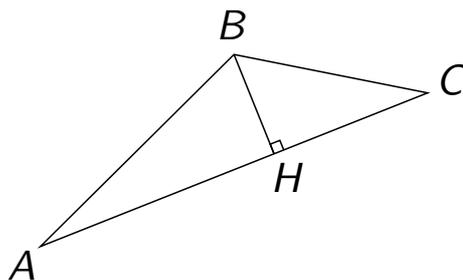
d'où (aire du disque de rayon R) = $\pi R \times R = \pi R^2$.

Une approche basée sur la distance

Notion primitive : la distance $d(A, B) = AB$.

Inégalité triangulaire. Étant donnés trois points A, B, C , les distances vérifient toujours $AC \leq AB + BC$, autrement dit la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Justification intuitive.



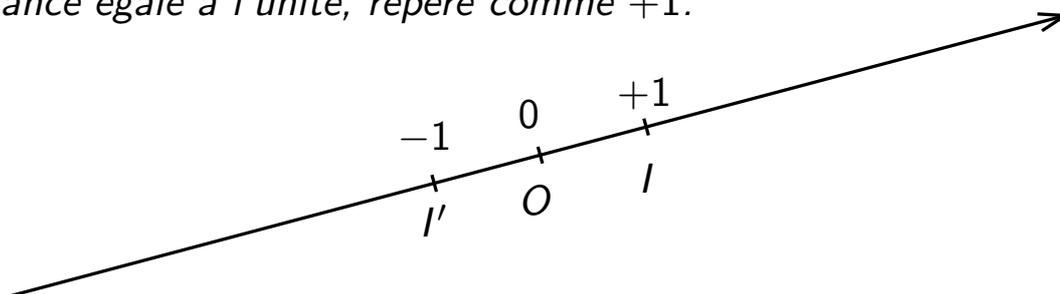
L'hypoténuse est plus grande que les côtés de l'angle droit ...

Segments, droites, demi-droites.

- Étant donné deux points A, B du plan ou de l'espace, on appelle segment $[A, B]$ d'extrémités A, B l'ensemble des points M tels que $AM + MB = AB$.
- On dit que trois points A, B, C sont alignés avec B situé entre A et C si $B \in [A, C]$, et on dit qu'ils sont alignés (sans autre précision) si l'un d'eux appartient au segment formé par les deux autres.
- Étant donné deux points distincts A, B , la droite (AB) est l'ensemble des points M alignés avec A et B ; la demi-droite $[A, B)$ d'origine A contenant B est l'ensemble des points M alignés avec A et B tels que M soit situé entre A et B , ou B entre A et M . Deux demi-droites de même origine sont dites opposées si leur réunion forme une droite.

Axes : premier lien avec la "géométrie analytique"

Définition. Un axe est une droite \mathcal{D} muni d'une origine O et d'une orientation, c'est à dire un choix d'un point I situé à une distance égale à l'unité, repéré comme $+1$.



Abscisse d'un point.

$$x_M = +OM \text{ si } M \in [O, I), \quad x_M = -OM \text{ si } M \in [O, I').$$

Mesure algébrique. $\overline{AB} = x_B - x_A = \pm AB$.

Relation de Chasles. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Elle résulte du fait que $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$.

Droites, plans, parallélisme.

- Deux droites \mathcal{D} , \mathcal{D}' sont dites concourantes si leur intersection est constituée d'exactly un point.
- Un plan \mathcal{P} est un ensemble de points balayé par les droites (UV) telles que U décrit une droite \mathcal{D} et V une droite \mathcal{D}' , pour des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' concourantes données. Si A, B, C sont 3 points non alignés, on note (ABC) le plan associé par exemple aux droites $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{D}' = (AC)$.
- Deux droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont dites parallèles si elles sont confondues, ou bien si elles sont contenues dans un même plan \mathcal{P} et ne coupent pas.

Angles (secteurs angulaires)

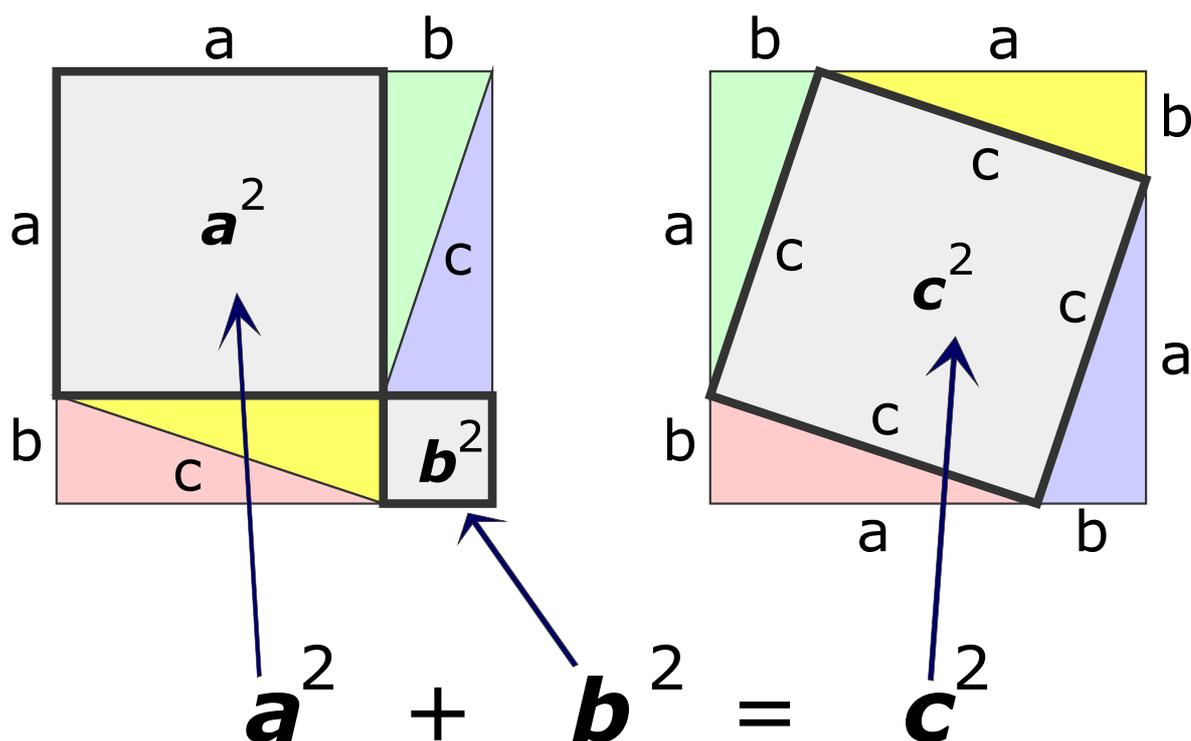
Angles (secteurs angulaires).

- Un angle aigu \widehat{BAC} (ou secteur angulaire aigu) défini par deux demi-droites $[A, B)$, $[A, C)$ de même origine et non opposées est l'ensemble balayé par les segments $[U, V]$ avec $U \in [A, B)$ et $V \in [A, C)$.
- Un angle obtus (ou secteur angulaire obtus) \widetilde{BAC} est le complémentaire de l'angle aigu \widehat{BAC} dans le plan (ABC) , union les 2 demi-droites $[A, B)$ et $[A, C)$ comme bord.
- Étant donné une droite \mathcal{D} et une demi-droite $[A, M)$ avec $A \in \mathcal{D}$ et $M \notin \mathcal{D}$, le demi-plan bordé par \mathcal{D} contenant M est la réunion de tous les segments $[U, V]$ tels que $U \in \mathcal{D}$ et $V \in [A, M)$. Le demi-plan opposé est celui associé à une demi-droite $[A, M')$ opposée à $[A, M)$. On parle aussi dans ce cas d'angles plats de sommet A .

Cercles, arcs, mesures des angles.

- Le cercle de centre A et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points M d'un plan \mathcal{P} tels que $d(A, M) = AM = R$.
- Un arc de cercle est l'intersection d'un cercle avec un secteur angulaire ayant pour sommet le centre du cercle.
- La mesure d'un angle (en degrés) est calculée proportionnellement à la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte sur un cercle dont le centre est le sommet de l'angle, de sorte que le cercle complet corresponde à 360° .
- angle plat = angle de mesure 180° (arc = demi-cercle)
- angle droit = moitié d'un plat = angle de mesure 90° .
- Deux demi-droites de mêmes extrémités sont dites perpendiculaires si elles forment un angle droit.

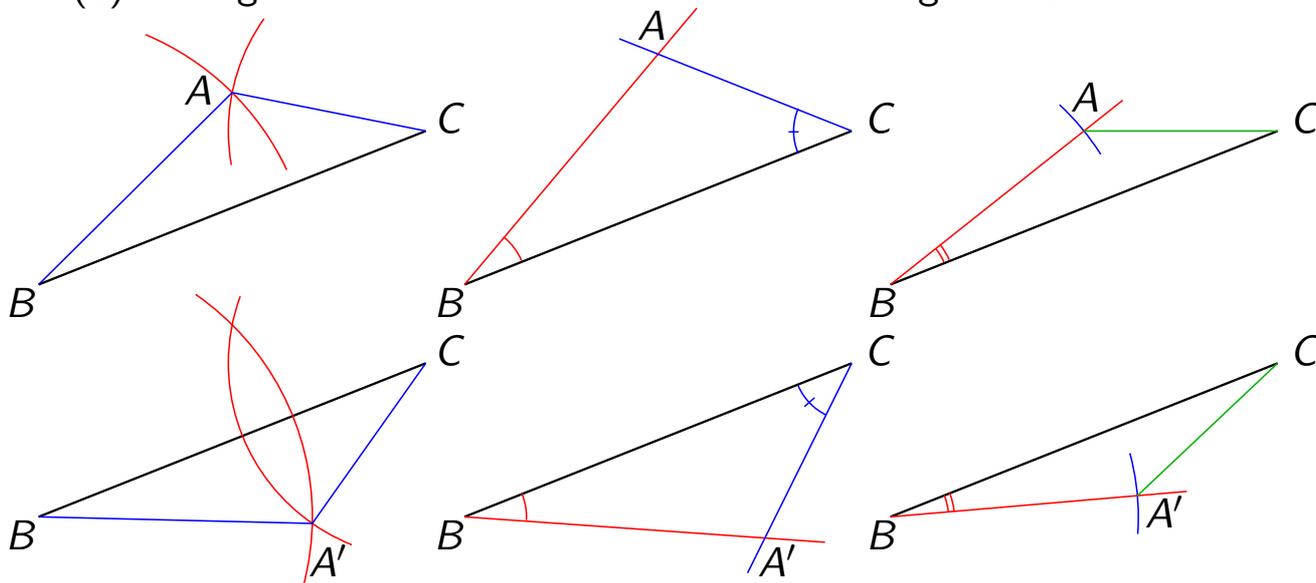
Le théorème de Pythagore



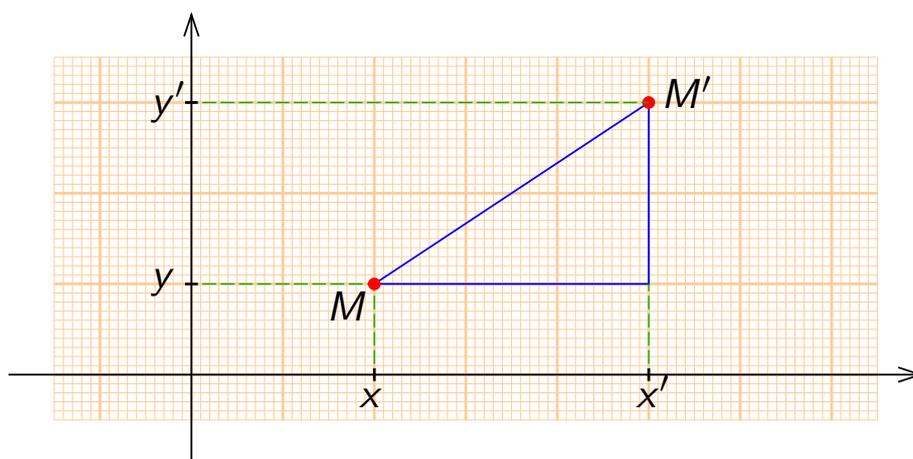
Constructions de triangles / "cas d'isométrie"

Problème. Construire un triangle ABC ayant une base BC donnée et deux autres éléments donnés, à savoir :

- (1) les longueurs des côtés AB et AC ,
- (2) les mesures des angles \widehat{ABC} et \widehat{ACB} ,
- (3) la longueur du côté AB et la mesure de l'angle \widehat{ABC} .

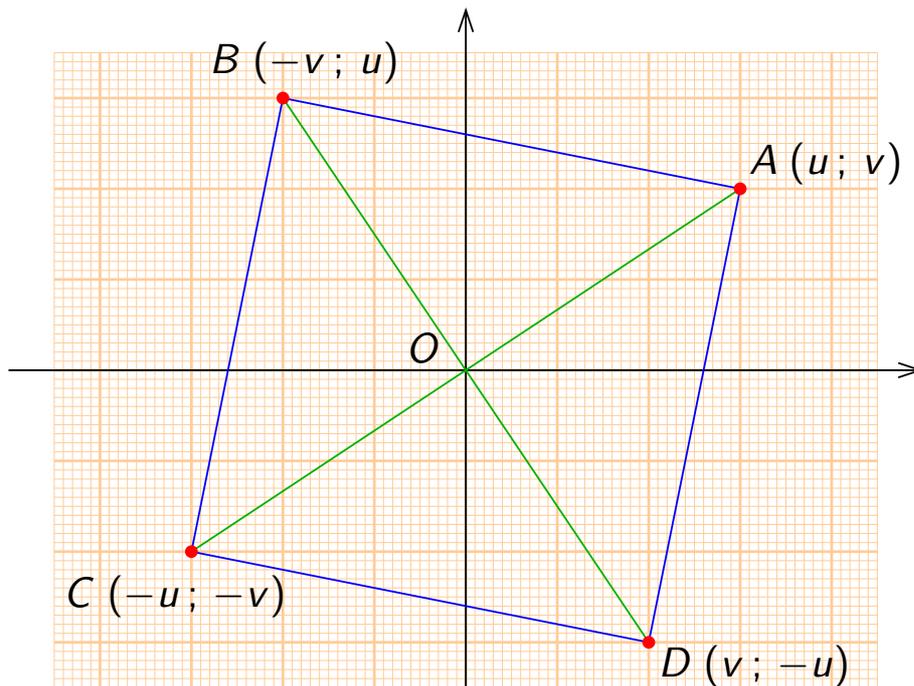


Les coordonnées cartésiennes

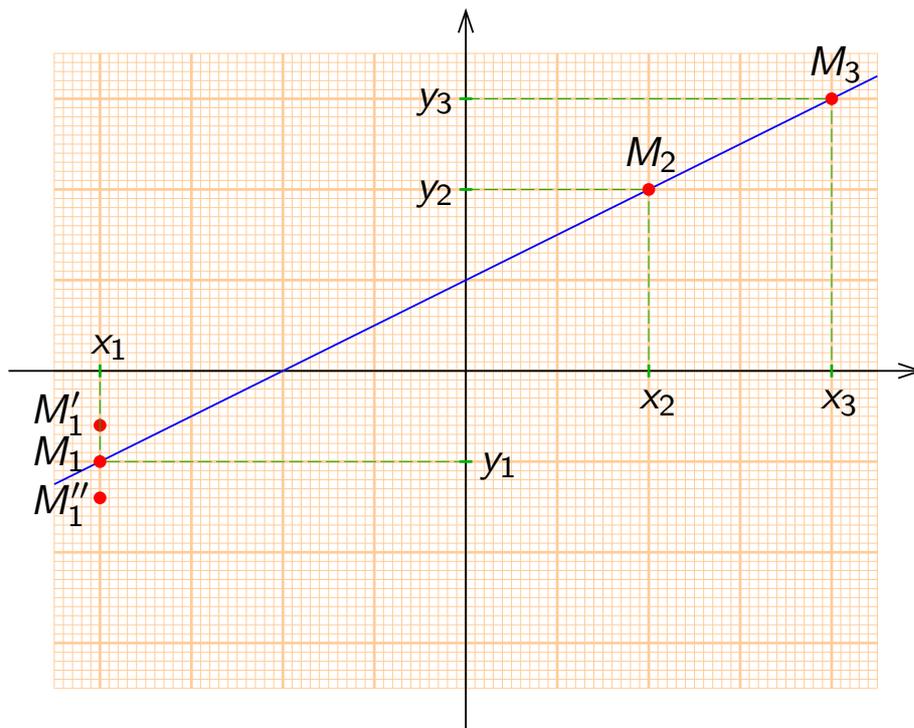


$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

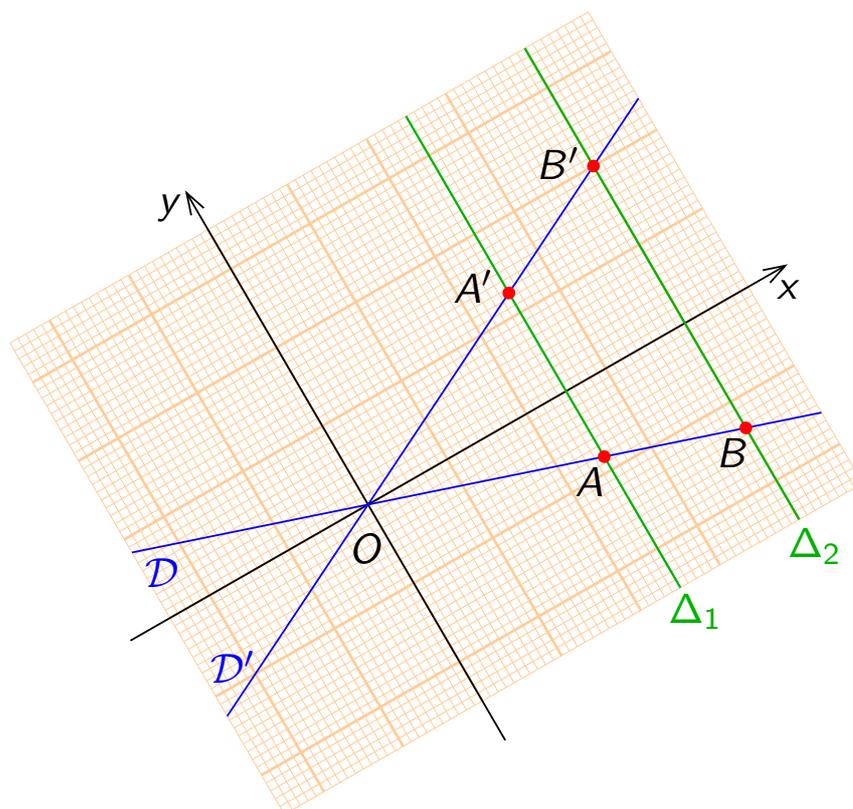
Le carré en coordonnées cartésiennes



Droite $y = ax + b$



$$M_1 M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$



Une “axiomatique” rigoureuse

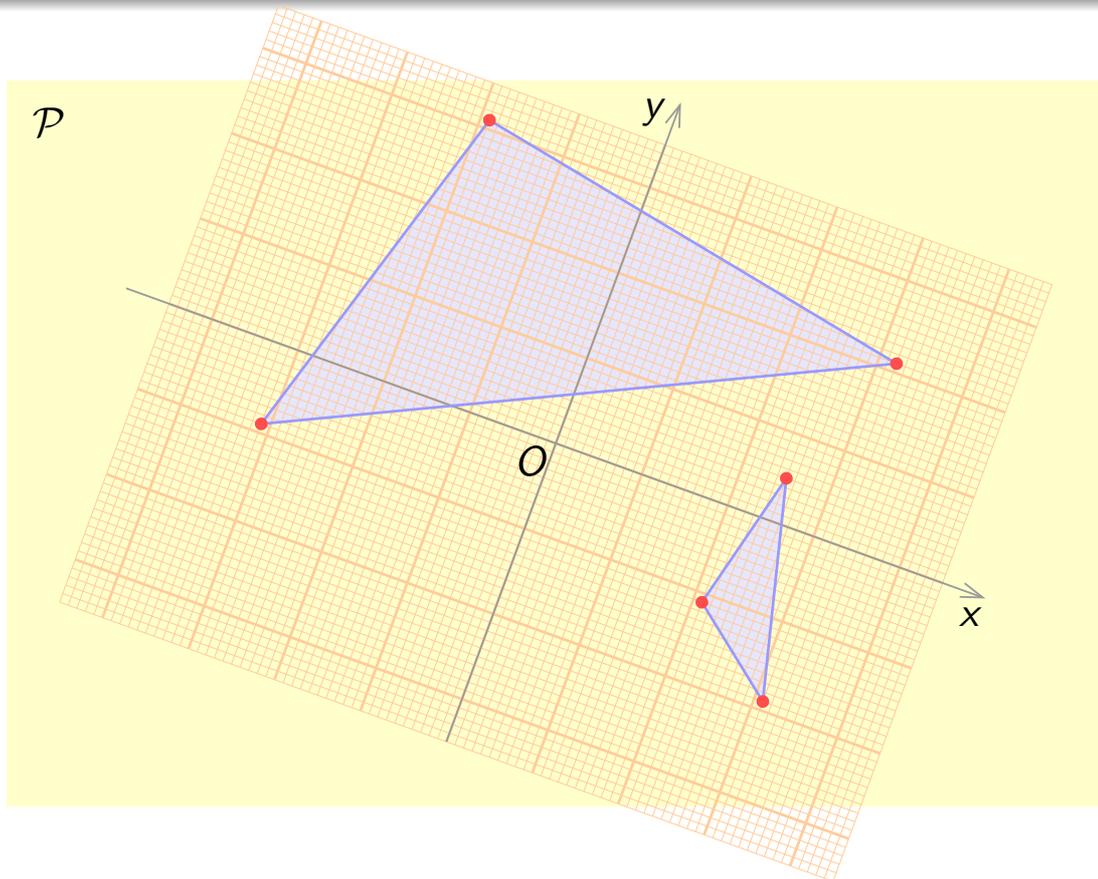
Définition. On appellera plan euclidien un ensemble de points noté \mathcal{P} , muni d'une distance d , c'est-à-dire une application

$$d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad (M, M') \mapsto d(M, M') = MM' \geq 0,$$

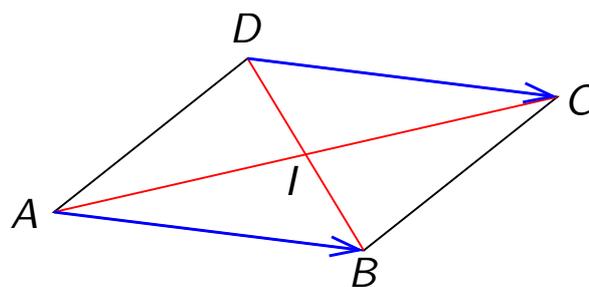
de sorte qu'il existe des “systèmes de coordonnées orthonormés” : à tout point $M \in \mathcal{P}$ on peut faire correspondre un couple de coordonnées $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, par une correspondance bijective $M \mapsto (x; y)$ satisfaisant l'axiome

(Pythagore + Descartes) $d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$

pour tous points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$.



Construction des vecteurs



On trouve donc la condition nécessaire et suffisante

$$x_I = \frac{1}{2}(x_B + x_D) = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \quad y_I = \frac{1}{2}(y_B + y_D) = \frac{1}{2}(y_A + y_C),$$

ce qui équivaut encore à

$$x_B + x_D = x_A + x_C, \quad y_B + y_D = y_A + y_C$$

ou encore à

$$x_B - x_A = x_C - x_D, \quad y_B - y_A = y_C - y_D.$$

Le produit scalaire

La *norme* $\|\vec{V}\|$ d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ est la longueur $AB = d(A, B)$ d'un bipoint quelconque qui le définit. On pose

$$(1) \quad \vec{U} \cdot \vec{V} = \frac{1}{2}(\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2)$$

de sorte que l'on a en particulier $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$. Le nombre $\vec{U} \cdot \vec{V}$ s'appelle le *produit scalaire* de \vec{U} et \vec{V} , et $\vec{U} \cdot \vec{U}$ s'appelle aussi le *carré scalaire* de \vec{U} , noté \vec{U}^2 . On obtient par conséquent

$$\vec{U}^2 = \vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2.$$

D'après la définition (1), nous avons

$$(2) \quad \|\vec{U} + \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V},$$

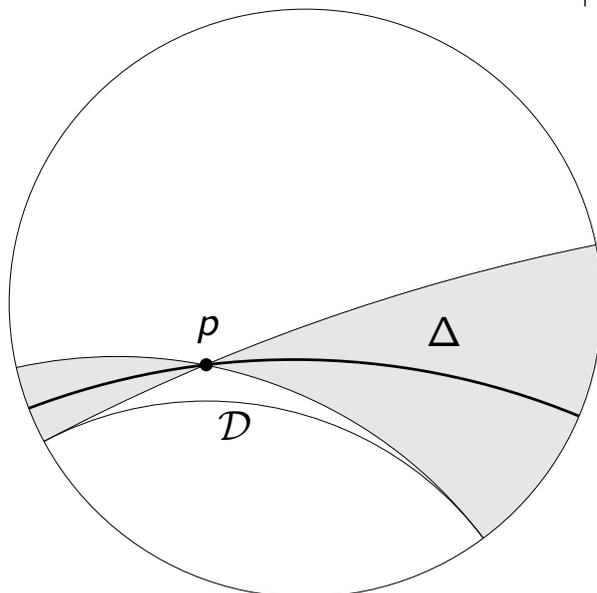
ce qui peut se récrire

$$(3) \quad (\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V}.$$

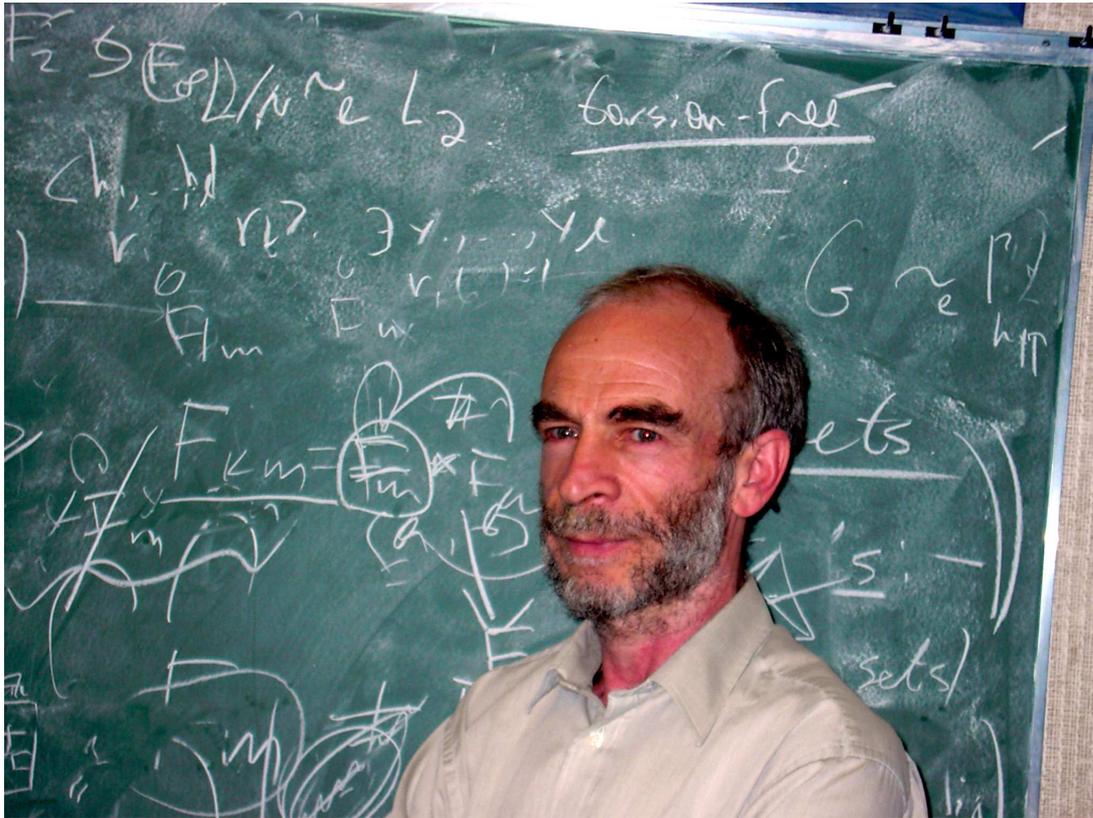
Les géométries non euclidiennes

Le disque de Poincaré (ou plan hyperbolique)

$$d_P(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}{1 - \frac{|b-a|}{|1-\bar{a}b|}}.$$



Jusqu'aux travaux de Mikhail Gromov



Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 14/06/2009

Géométrie euclidienne élémentaire