

Groupe
de
Réflexion
Interdisciplinaire
sur les
Programmes

Des outils pour apprendre à calculer

Pascal Dupré, instituteur à Gien (45)
Roncq Août 2007

Ces documents sont la propriété de leurs auteurs ou du GRIP ; tout usage autre que personnel est soumis à leur autorisation."

Sommaire :

1. Éducation des sens et abstraction
2. Outils pour calculer, calcul mental, calcul posé
3. Calculer sur le bout des doigts
4. Jetons et bâchettes
5. Bouliers et damiers
6. Les jeux et autres supports visuels
7. Système métrique et monnaie
8. Conclusion

1-Éducation des sens et abstraction :

Si le premier article du Dictionnaire pédagogique de Ferdinand Buisson est consacré au mot « Abaque », ce n'est pas seulement dû au hasard de l'ordre alphabétique, c'est aussi le reflet la place prépondérante dans la méthode intuitive d'un matériel permettant de rendre sensibles aux enfants les abstractions mathématiques. On trouve ainsi dans l'article « Mathématiques » un rappel des instructions officielles : « *En tout enseignement, le maître, pour commencer, se sert d'objets sensibles, fait voir et toucher les choses, met les enfants en présence de réalités concrètes, puis peu à peu il les exerce à en dégager l'idée abstraite, à comparer, à généraliser, à raisonner sans le secours d'exemples matériels. Le meilleur moyen d'apprendre aux enfants à compter consiste à leur faire compter effectivement des objets semblables, comme des pois, des noisettes, ou de simples bûchettes analogues à des allumettes et que l'on a taillées d'avance. Des paquets de dix bûchettes liées ensemble serviront à introduire l'idée des dizaines ; et dix paquets semblables, réunis en un seul, donneront l'idée d'une centaine, etc...* »⁽¹⁾

et plus loin :

« *Dès le début, il faut faire connaître aux élèves le mètre, le franc, le kilogramme et le litre ; non pas par une définition, mais en leur montrant des mesures effectives réelles, grandeur nature, en leur expliquant comment on mesure une longueur avec un mètre ou une capacité avec un litre.* »⁽¹⁾

Ou encore : « *L'idée première de chaque opération devra être introduite à propos d'un petit problème d'application, aussi simple que possible, sur des billes, des gâteaux, etc., et avec des nombres très petits, de façon que l'enfant soit amené à faire intuitivement ces opérations.* »⁽¹⁾ Le dictionnaire attribue la paternité de ces méthodes à une lignée de pédagogues qui s'inspirent des théories de Rousseau sur l'éducation des sens. Il cite notamment Marie Pape-Carpantier « *apôtre de la **méthode naturelle**, de la méthode qui prend la nature pour point de départ, ensuite pour guide et pour point d'appui ; qui s'adresse d'abord aux sens et, par leur moyen, met l'enfant en communication avec tout ce qui l'entoure* » et l'article précise : « *Elle répugne à l'abstraction ; elle ne parle qu'en présence de l'objet ou du moins de son image ; sa maxime est : « Un signe visible pour chaque chose visible »* »⁽²⁾.

L'article « Calcul intuitif » mentionne également l'influence, dans le domaine mathématique, de la méthode de l'allemand Grube dont il résume ainsi l'esprit :

« *L'enfant doit retenir à force d'avoir vu et non à force d'avoir récité.* »⁽³⁾

Méthode intuitive, méthode naturelle, éducation des sens, le Dictionnaire Pédagogique se démarque cependant des pédagogies qui « *répugnent à l'abstraction* »

On trouve ainsi (peu après le mot « Abaques »...), l'article « Abstraction » avec une mise au point de Buisson :

« *Le rôle de l'abstraction et des idées abstraites dans l'éducation intellectuelle est **un des points controversés de la pédagogie théorique, un des problèmes délicats de la pédagogie pratique.***

... *Depuis le commencement du dix-neuvième siècle, en particulier sous l'influence des idées de Rousseau, une vive réaction s'est faite contre l'abus de l'abstraction, et l'on est allé jusqu'à prétendre l'exclure de l'enseignement élémentaire.*

Nous croyons qu'il y a là un malentendu ...

Et il commence par dénoncer les méfaits de l'abstraction prématurée :

« *Faire abstraire prématurément, c'est faire abstraire passivement, machinalement, sans profit pour l'intelligence. C'est cette considération qui a fait de nos jours le triomphe de la méthode dite*

intuitive. »⁽⁴⁾

Puis il énonce les pédagogues qui ont tracé la voie de la méthode intuitive, sans omettre certains égarements. Ainsi Jacotot que Buisson qualifie gentiment d'utopiste : « *Jacotot pousse si loin la prétention de se passer de l'abstraction, qu'il veut, même en lecture ou en grammaire, que la lumière se fasse dans l'esprit de l'enfant par une sorte de divination naturelle, par un travail spontané et inconscient d'analyse.* »⁽⁴⁾

C'est bien sur le mot « naturel » que repose le malentendu évoqué par Buisson, qui rappelle justement que « ***l'abstraction est une faculté naturelle dont le développement ne saurait être impunément négligé ni même ajourné*** »⁽⁴⁾.

Et il poursuit : « *Si légitime que soit cette réaction contre l'abus des procédés abstraits et déductifs, il ne faudrait pas la pousser jusqu'à les bannir de l'enseignement. Il ne faut même pas reculer trop tard le moment où l'on fera de l'abstraction la forme et la condition de tout l'enseignement : trouver pour chaque élève et pour chaque étude le moment précis où il convient de passer de la forme intuitive à la forme abstraite est le grand art d'un véritable éducateur. Un enfant qu'on habituerait à ne jamais faire cet effort d'intelligence qu'exige l'abstraction, puis la généralisation, risquerait de prendre une sorte de paresse d'esprit, une lourdeur ou une difficulté de conception extrêmement fâcheuse* »⁽⁴⁾

Suivent deux règles pédagogiques pour l'emploi de l'abstraction dans l'enseignement. « *La première est que l'abstraction dans tout enseignement, dans tout exercice, ait toujours été précédée de l'intuition et n'en soit que le résumé. La seconde est que l'abstraction soit graduée* » Selon que ces règles seront ou non observées, l'abstraction sera « *un désastreux procédé d'enseignement* » ou « *un secours pour la mémoire, une satisfaction pour l'intelligence, une ressource inappréciable pour le langage* »⁽⁴⁾.

Quant à Gabriel Compayré, il consacre un article à « l'éducation des sens » pour en démontrer les bienfaits et les limites : « *Aujourd'hui la nécessité de l'éducation des sens est devenue un lieu commun de la pédagogie, et les exercices d'intuition ont acquis droit de cité dans nos écoles. Mais il reste beaucoup à faire pour les organiser d'après un ordre méthodique et rationnel. La condition psychologique essentielle du développement normal de la perception, c'est l'attention. En d'autres termes, les sens qui par leurs perceptions précises, exactes et nettes contribueront à former l'esprit, ont besoin eux-mêmes, pour vaquer à leur fonctions, de l'assistance d'un esprit attentif, maître de lui-même, s'appliquant à l'objet qu'il perçoit. On veillera donc à ce que l'enfant n'use pas de ses sens d'une façon distraite. Pour cela, il convient de ne pas lui présenter trop d'objets à la fois, ou du moins de ne pas faire défiler trop rapidement devant lui une trop grande succession et variété de choses. Il faut retenir son esprit sur un petit nombre d'objets, les lui faire examiner sous tous les aspects, exercer en un mot sa puissance d'observation.*

...

L'éducation des sens, si l'on en faisait l'objet principal du travail de l'école, ferait courir à l'esprit de véritables dangers. Elle matérialiserait l'intelligence. De plus elle la déshabituera de l'effort. Gréard a remarqué avec raison que le spectacle des phénomènes sensibles amuse les enfants au point qu'ils y sacrifieraient tout le reste : calcul, histoire, grammaire. "Cette sorte d'étude, dit-il, est pour eux moins un travail qu'une distraction : elle les dissipe plutôt qu'elle ne les exerce. Nous avons banni de nos classes primaires l'ennui : prenons garde d'en faire un peu trop sortir l'effort." »⁽⁵⁾.

Cette catégorisation : concret-sensible-naturel-intuitif d'un côté, abstrait de l'autre a ses limites. Confondre méthode intuitive et éducation des sens c'est prendre le risque de restreindre l'intuition à sa forme sensible. C'est en partie vrai chez le tout jeune enfant, mais, dès que s'ébauche un raisonnement logique, c'est l'intuition intellectuelle, le « déclic » diront certains, qui permet la synthèse des éléments rationnels dans l'évidence de la compréhension. Ferdinand Buisson développe

cette notion dans l'article Intuition : « *La méthode intuitive ne se borne pas à cette éducation des sens et par les sens: c'est par là qu'elle commence sans doute, mais pour se continuer en se généralisant de plus en plus.* » « *...nous reconnaissons comme intuitifs les différents actes de l'esprit jugeant spontanément et affirmant indubitablement sur le seul témoignage des sens, de la conscience ou de la raison. Il y a intuition dans l'esprit quand il y a évidence dans l'objet qu'il considère; et nous tenons pour également légitimes les diverses formes d'intuition malgré les différences, parce que nous tenons pour également valables les divers modes d'évidence directe par lesquels la réalité ou la vérité s'impose à l'esprit.* »⁽⁶⁾

2- Outils pour calculer, calcul mental, calcul posé

Pour illustrer sa théorie de l'abstraction Buisson renvoie le lecteur du DP à l'article « boulier ».

« Ce qui importe, ..., c'est de déterminer en quel sens et dans quelle mesure l'emploi du boulier doit être approuvé. Il a rencontré des adversaires sérieux. L'un d'eux, M. Rambert, professeur à l'École polytechnique de Zürich, disait à propos des bouliers figurant à l'Exposition universelle de Vienne (1873): « Le boulier corrompt l'enseignement de l'arithmétique. La principale utilité de cet enseignement est d'exercer de bonne heure, chez l'enfant, les facultés d'abstraction, de lui apprendre à voir de tête, par les yeux de l'esprit. Lui mettre les choses sous les yeux de la chair, c'est aller directement contre l'esprit de cet enseignement. La nature a donné aux enfants leurs dix doigts pour boulier ; au lieu de leur en donner un second, il faut leur apprendre à se passer du premier. »⁽⁶⁾

Cet acharnement contre le boulier n'est guère compréhensible si on ne se réfère à l'histoire de l'arithmétique. Buisson s'y engage : « L'idée de faire compter par les enfants des objets matériels avant de leur parler des nombres abstraits et des chiffres qui les représentent est trop naturelle pour ne pas être aussi ancienne que la civilisation. Elle a fait inventer dès l'antiquité des abaques plus ou moins perfectionnés. Chez nous, depuis la fin du moyen âge, on exerçait les enfants, comme le porte le titre de plusieurs vieux livrets d'école, à « sommer avec les jets » (jetons) ; Montaigne dit quelque part : 'Je ne sais compter ni à jet ni à plume !' »⁽⁷⁾ Mais Buisson ne développe pas ce que sous entend cette expression. Voici une gravure dont le commentaire permettra de mieux comprendre quels sont les véritables enjeux :



Cette gravure du début du XVIème siècle représente *Dame Arithmétique* tranchant le débat entre deux calculateurs. L'un représente les « abacistes », défenseurs des chiffres romains et du calcul « à jets », pratiqué avec des jetons déplacés sur un abaque, ancêtre du boulier. L'autre, symbolise les « algoristes » partisans du calcul posé « à (la) plume » et des chiffres arabes (d'origine indienne). Bien que l'attitude de la dame signifie sa préférence pour l'algoriste la querelle entre les deux camps durera plusieurs siècles en occident.

Comme le montre la citation de Montaigne, l'enseignement du calcul, même dans les milieux cultivés, était souvent réduit à la lecture des nombres, à l'addition, voire la soustraction. La multiplication fut rarement enseignée dans les petites écoles avant la Révolution et la division à peu près jamais avant cette date. Ceci pour deux raisons : d'une part la complexité des méthodes opératoires et d'autre part le blocage des autorités religieuses et des calculateurs professionnels qui voyaient dans la démocratisation du calcul une perte de pouvoir et d'influence. Ces deux verrous sautèrent à la fin du XVIII^e siècle avec la simplification des techniques opératoires et l'interdiction de l'usage de l'abaque dans les écoles et les administrations imposée par la Révolution française.

Nous tirerons deux leçons de cet aparté historique :

- la première c'est que derrière toute forme d'enseignement, même quand il s'agit de mathématiques, se trouvent des enjeux politiques.

- la seconde, c'est qu'en matière d'éducation il faut se méfier de la notion de simple. Le calcul abstrait des algoristes est « simple » dans la logique de l'adulte, mais l'intelligence naturelle de l'enfant s'appuiera avec beaucoup plus d'aisance sur la « complexité » du boulier. Ce que Buisson résume ainsi : « *Le simple, c'est l'abstrait* » « *Le réel ou le concret n'est jamais simple* »⁽⁴⁾.

Ce n'est donc pas tant l'usage du boulier en tant que support à l'enseignement par les sens qui est condamné ici, mais son usage en tant que « machine à calculer » qui serait une entrave au bon exercice du calcul mental « *Le calcul mental est la base de toute instruction en ce qui concerne le calcul ; toute machine qui a la prétention de suppléer au calcul mental va contre le but de l'enseignement* »⁽⁷⁾ nous rappelle Buisson.

Et la distinction est faite entre la « machine » qui se substitue à l'opération mentale et « l'objet sensible » qui matérialise cette opération pour mieux l'assimiler. « *en montrant à l'enfant, en lui faisant voir les résultats d'une addition, d'une soustraction, d'une multiplication ou d'une division, le boulier diminue les efforts et la fatigue de l'enfant ; mais, par le témoignage des yeux, il grave profondément dans son esprit et dans sa mémoire tous ces résultats qu'il lui importe de conserver. Le boulier prépare, initie au calcul mental : nous n'avons jamais pensé qu'il pût le remplacer.* »

On veut que l'enfant s'accoutume à « voir de tête », c'est très bien ; mais encore faut-il qu'il ait appris d'abord à voir avec ses deux yeux. Avant l'abstrait le concret, avant la formule l'image, avant l'idée pure l'idée sensible : c'est la loi générale de la saine pédagogie. »⁽⁷⁾.

A cet acquittement du boulier (qu'il faut cependant réserver aux « *tout jeunes enfants* ») succède pourtant une condamnation du calcul sur les doigts :

« *Le calcul sur les doigts a plus d'inconvénients que le boulier, comme l'a fort bien montré M. Lenient: « D'abord on ne peut pas disposer de sa main comme d'un objet étranger ; puis, apprendre aux enfants à calculer sur leurs doigts présente certainement un danger : les élèves continueront à s'en servir longtemps encore après qu'on les aura exercés à calculer de tête. C'est donc justement un obstacle au calcul abstrait que préconise M. Rambert.* »⁽⁷⁾.

Alors, dans la pratique, quels outils, quels supports peut-on utiliser pour concilier « l'éducation des sens » sans retarder pour autant la représentation mentale et l'abstraction ?

La présentation qui suit concernera principalement le matériel utilisable en CP, certains supports pourront être utilisés dès à la grande section d'autres seront réutilisables au CE1. Le problème des machines à calculer, des bouliers russes ou chinois ne sera donc pas abordé ni celui des calechettes, « boîtes noires » qui ne trouveront pas leur place en primaire.

3- Calculer sur le bout des doigts

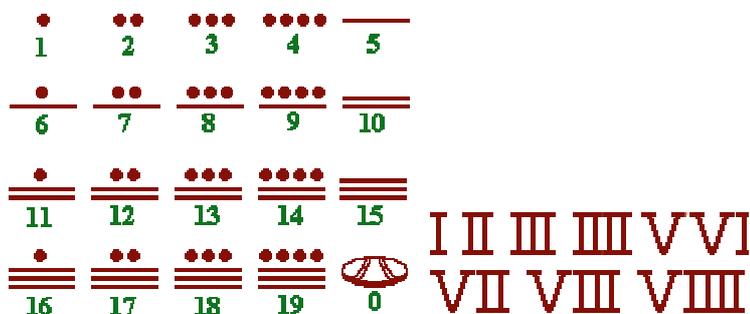
Je me permettrai de contester ce dernier extrait du Dictionnaire pédagogique en affirmant qu'interdire de compter sur les doigts présente certainement un danger plus grand que d'apprendre à calculer avec les doigts. Certains affirment qu'empêcher un enfant d'utiliser ses doigts pour compter peut conduire à une mauvaise représentation du corps et entraîner des troubles dans le repérage spatio-temporel, c'est en tout cas prendre le risque de brûler des étapes importantes. Dans le domaine de la lecture une pratique similaire visait à interdire la lecture à voix haute pour le lecteur débutant, les dégâts ont été considérables. Que l'on apprenne à se passer des doigts pour calculer et de l'oralisation pour lire semble acquis mais la tentation de mettre la charrue avant les boeufs est toujours récurrente.

La main est le meilleur outil de l'enfant pour entrer dans l'abstraction du nombre. Pour compter une collection d'objets, il va associer successivement à chacun d'eux le nom qu'il aura mémorisé dans la comptine numérique, il n'aura au début que la notion de nombre ordinal : il pourra désigner le « un », le « deux », le « trois »..., c'est à dire le premier, le deuxième, le troisième... Pour appréhender la notion de quantité, c'est à dire la notion de nombre cardinal, il lui faudra deux aptitudes : concevoir la notion d'unité, c'est à dire admettre que l'ordre dans lequel il compte les objets ne modifiera pas le résultat final (c'est pourquoi il est préférable de faire compter des objets « semblables », afin de neutraliser toute différenciation qualitative), et garder le souvenir pour chaque unité de toutes les unités précédentes. La main est donc le support idéal pour aider à cette prise de conscience. Il lèvera successivement 3 doigts en comptant le nombre d'objets qu'il voit, puis pour indiquer le résultat de son dénombrement il lèvera simultanément les trois doigts en énonçant le résultat. Le procédé ainsi décrit est évidemment limité aux dix premiers nombres mais il en existe de plus complexes qui dépassent largement ces limites. Sans s'attarder sur les systèmes qui utilisent pour dénombrer l'appariement avec toutes les parties du corps, on signalera simplement l'utilisation des phalanges des doigts opposés au pouce qui permettent de compter facilement jusqu'à douze avec une main et jusqu'à soixante en combinant les deux mains (ce qui n'est peut être pas étranger à l'utilisation des base douze et soixante). Un ouvrage de calcul chinois du XVI^e siècle indique même comment compter jusqu'à cent mille sur une main et dix milliards sur les deux.

Il ne s'agit pas ici d'aborder un système de numération corporel complexe mais d'envisager comment le calcul sur les doigts peut favoriser les représentations mentales des dix premiers nombres.

Nombres	Signes primitifs	Sumérien classique	Valeurs	Prononciation
1			DIŠ GIS ₁	gush
2			MIN	min
3			EŠ ₃	esh
4			LAMMU LIMMU MAR ₂ MAR ₃	limmou
5			GEŠIA I ₂ IA ₂	ia
6			AŠ ₂ GEŠAS	ash
7			GEŠUMUN IMIN UMUN ₇	imin i-min (2+5)
8			GEŠUSS ISSU	issou
9			ILIMMU GESILIMMU	ilimmou i-ilimmou (5+4)
10			U	ou

La vision humaine ne permet pas de distinguer directement une quantité supérieure à quatre, les systèmes d'écriture des nombres à base de traits ou de points utiliseront donc des groupements particuliers pour représenter les nombres au delà de quatre :



numération sumérienne

numération maya

numération romaine

La structure de la main est à l'image de cette limite de la perception humaine (4 doigts opposés au pouce) et offre, en plus de la perception visuelle, la sensation kinesthésique qu'on ne doit pas négliger dans l'apprentissage. Quand on parle de représentation mentale du nombre on pense avant tout à une représentation visuelle mais le nombre, pour le jeune enfant, c'est d'abord une perception sonore, un mot, au sein d'une comptine, souvent associé à une durée ou à un rythme frappé dans les mains (dans les jeux : « 1,2,3 soleil », « cache-cache », ou les ultimatum « je compte jusqu'à 3... »). C'est bien évidemment insuffisant pour appréhender la notion de nombre mais cela participe indéniablement à la construction de cette notion. La main offre en outre une représentation des relations arithmétiques entre les dix premiers nombres : 2 et 3 s'obtiennent par addition d'une unité (on lève un doigt de plus après le pouce $1+1$, $2+1$) mais pour monter 4, il est plus simple de cacher le pouce, c'est à dire de « montrer » 5 moins 1, dès lors on remarquera aussi que pour 3 on replie 2 doigts, c'est à dire « 5 moins 3 ». Quand l'enfant sera suffisamment exercé à observer, reproduire et monter ces relations entre 1, 2, 3, 4 et 5, on pourra les associer à des problèmes simples : « J'avais 3 billes, j'en ai gagné 2, combien ai-je de billes maintenant ? J'avais 5 bonbons, j'en ai mangé 2, combien m'en reste-t-il ? J'avais 5 euros, j'ai acheté un pain avec 1 euro... ». La décomposition des 5 premiers nombres acquises, on passera à celle des nombres de 6 à 10, avec comme perception première $6 = 5+1$, $7 = 5+2$, $8 = 5+3$, $9 = 5+4$; $10 = 5+5$, puis on comptera les doigts repliés pour avoir $9=10-1$, $8=10-2$...

En montrant les doigts des 2 mains on pourra également mémoriser les premiers doubles (2 pouces : 2 fois 1 égalent 2, 2 pouces et 2 index : 2 fois 2 égalent 4...) et bien sûr les premières moitiés. Quand toutes ces combinaisons auront été mémorisées, on commencera à parler de « calcul mental » en interdisant aux doigts de bouger. Mais il sera bien inutile et vain de savoir quel type de représentation mentale sera privilégiée par chaque enfant. Par exemple pour $5-3$, entendra-t-il la formule $5-3=2$? Verra-t-il 2 doigts de sa main se replier pour en laisser 3 levés ? Sentira-t-il une impulsion nerveuse au bout des doigts concernés, même sans les bouger ? Ou peut être même un mélange de tout cela. Peu importe, il saura que $5-3$ font 2 ...sur le bout des doigts.

Pour la suite de l'apprentissage des tables d'addition la mémoire auditive sera davantage sollicitée, mais si elle présente des défaillances, il ne sera pas inutile de rappeler ces premiers calculs sur les doigts et les décompositions de 5 et de 10. Par exemple « $8+7$ » peut se décomposer en « $8+2+5 = 10+5 = 15$ », « $6+8$ » en « $6+4+4 = 10+4 = 14$ », mais il est nécessaire pour cela de s'entraîner à enchaîner (avec, puis sans les doigts) des suites d'additions et de soustractions de petits nombres ($4-2+3+1-5...$). On trouvera également quelques techniques de calcul sur les doigts pour des tables de multiplication mais elles font plus figure de gymnastique mentale ou de remède d'urgence que de base d'apprentissage.

4-Jetons et bâchettes

J'appelle par commodité jeton tout petit objet plat et rond (petits cailloux, pions, boutons, bouchons, billes chinoises...) et bâchette tout petit bâton (allumettes, coton tiges, bâtons de sucettes ou de glace...) qui peuvent être utilisés pour des exercices de dénombrement et de calcul.

Avec les jetons et les bâchettes, on arrive à une représentation du nombre qui s'approche des premiers systèmes d'écritures. Que ce soit avec des cailloux, des encoches gravées dans l'os ou le bois, des noeuds sur une corde, des marques dans des tablettes d'argile, les premières écritures des nombres seront des séries de points ou de traits organisés, auxquelles on ajoutera d'autres symboles pour représenter des regroupements de 5, de 10...etc... Même si notre système d'écriture s'est détaché de cette représentation concrète, il est bon de repasser par ce chemin pour bien appréhender la numération décimale. On a vu que la perception directe d'une quantité ne dépassait pas le quatre, dès lors, il sera utile au-delà de 4, de procéder à des regroupements par 2,3 ou 4 pour pouvoir se représenter le nombre étudié. Le groupement par 5 est la limite supérieure, il servira de tremplin pour passer au groupement par 10 de la numération décimale. On obtiendra des images différentes selon qu'on manipule jetons-points ou bâchettes-traits mais elles seront d'autant plus efficaces qu'elles se rapprocheront de formes géométriques régulières. Pour les jetons on reprendra la disposition des points du dé ou du domino :



pour les traits, on aura recours à des formes géométriques simples :



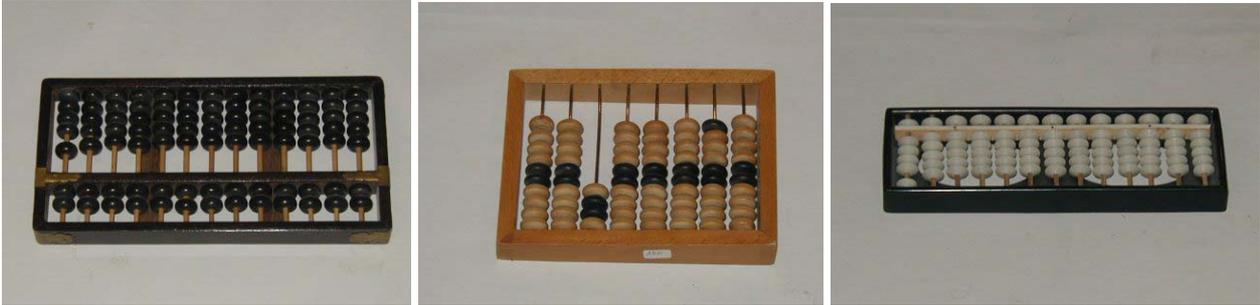
Dans les exercices de manipulation on pourra bien sûr faire appel à l'imagination des enfants et choisir de varier les représentations en gardant toujours en vue leur efficacité pour le dénombrement et le calcul. Car ces exercices apporteront une vision du nombre complémentaire à celle donnée par les doigts : 7, par exemple, ne sera plus seulement 5+2 comme l'indiquent les mains, mais aussi 2+2+2+1 ou 4+3, 9 sera 2 fois 4 et 1, ou 3 fois 3...tout ceci relève à la fois de la « connaissance intime du nombre » et du calcul mental.

On ne négligera pas les applications concrètes de ces pratiques : compter des objets utilisés en classe (crayons, livres, cahiers...) des enfants rangés par 2, faire des jeux avec des équipes de 3, de 4... en répétant à chaque occasion un vocabulaire sur lequel reposera le sens de la multiplication, de la division et de la numération décimale. En effet, quand on en viendra à faire des paquets de dix, on ne désignera plus la quantité obtenue par un seul chiffre qui représentera un nombre d'unités, mais on emploiera un chiffre qui désignera un nombre de « paquets » de dix, un nombre de « fois » dix. On passera ainsi d'une représentation concrète : un paquet, un fagot, une boîte de dix et rien d'autre à une formulation abstraite : 1 dizaine ou 1 fois dix et 0 pour arriver à l'écriture : 10. Pour les jetons, il faudra alors disposer d'un contenant pour matérialiser la dizaine : petits récipients de récupération ou matériel spécifique (boîtes à dizaines), pour les bâchettes, un simple élastique suffira à matérialiser le « fagot » de dix.

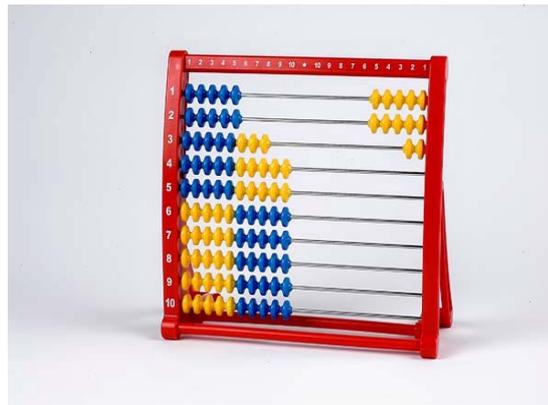
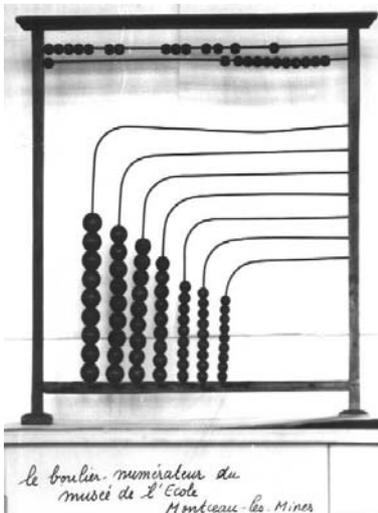
Mais nous arrivons à un stade où la quantité d'objets manipulés risque de faire obstacle à l'attention et à la concentration de certains élèves et l'utilisation du boulier sera un grand secours.

5-Bouliers et damiers

Il existe différents types de bouliers, certains sont destinés à être des « machines à calculer » (bouliers chinois, russe, japonais...)



d'autres sont plus spécifiquement conçus pour l'enseignement de la numération décimale, comme celui mis au point par Marie Pape Carpentier et qui a été le plus utilisé en France aux premiers temps de l'Instruction Publique.



(photo catalogue Celda)

Le Boulier que j'utilise en classe est composé de dix barres horizontales, sur chacune d'elles dix boules de même taille, chaque boule représentant une unité. Chaque rangée est divisée en deux couleurs (5-5), les deux mêmes couleurs pour les 5 premières rangées, deux autres couleurs (ou les mêmes inversées) pour les 5 dernières. Ces quatre couleurs permettent de repérer assez rapidement 5, 10, 50 et des exercices réguliers conduiront à « lire » ou à « écrire » le plus rapidement possible un nombre entre 1 et 100. Il existe d'autres types de bouliers, comme celui utilisé dans les cours Hattemer qui présente une autre décomposition de la dizaine : 3+3+1 et qui est assez complémentaire dans le travail du calcul mental. On peut dès la grande section s'entraîner à dénombrer les boules une par une, même sans donner le « vrai » nom du nombre quand il est supérieur à 10 : dix et un, dix et deux... deux fois dix et un...trois fois dix et quatre... jusqu'à dix fois dix). Puis on déroulera la comptine à partir de n'importe quelle boule du boulier. Viendront les exercices de comptes à rebours, puis de comptage de 2 en 2, de 10 en 10, de 5 en 5 (facilités par les couleurs), de 3 en 3, de 4 en 4... Le dénombrement ne sera pas dissocié du calcul, on cherchera « ...plus ... », « ...moins... » , « ... pour aller à ... » « ...fois... » et même « dans...combien de fois... ». Là non plus, il n'y a pas entrave au calcul mental, mais préparation au calcul mental : quand les exercices sont suffisamment bien « rôdés » avec le boulier, ils sont répétés bras croisés et yeux fermés.

En fin de CP on pourra s'affranchir d'une lecture « linéaire » du boulier pour calculer additions et soustractions à 2 chiffres : il s'agira d'ajouter ou de retrancher dizaines (« lignes de boules ») puis unités (« boules ») en veillant à ne laisser les unités que sur une seule rangée du boulier. En procédant ainsi, on préfigure le calcul mental qui contrairement au calcul posé s'opère de gauche à droite (dizaines puis unités).

Le damier des nombres de 0 à 99 offre des aspects complémentaires à ceux du boulier dans la représentation des nombres. On peut en procurer un à chaque enfant et afficher un grand modèle pour le travail collectif cependant le tableau à cases plastifiées avec des nombres amovibles permettra des manipulations plus variées. On l'utilisera comme une simple bande numérique pour exercer la lecture linéaire des nombres mais sa structure facilite l'habileté à lire de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10. On repérera aussi les colonnes de nombres pairs et celles de nombres impairs et pourquoi pas les diagonales avec les multiples de 9 et les multiples de 11. Les nombres amovibles permettront de nombreux jeux de recherche du (ou des) nombre(s) caché(s), du (ou des) nombres déplacés.



(photo catalogue Celda)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

On utilisera le côté ludique de ce matériel pour relancer l'attention des enfants dans des tâches exigeantes et répétitives mais on pourra également tirer partie de l'aspect mathématique de certains jeux enfantins.

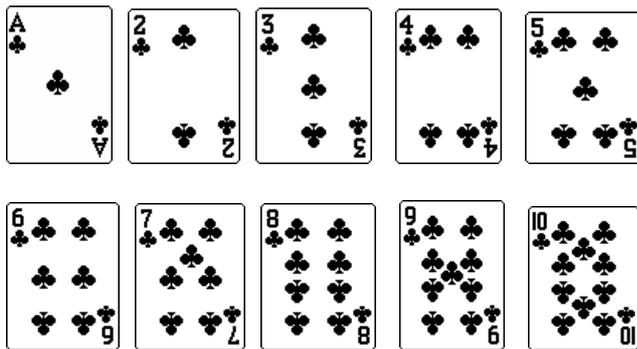
6-Les jeux et autres supports visuels

Le premier apport du calcul dans les jeux sera de compter les points pour connaître le gagnant, d'où un réservoir inépuisable pour les problèmes : billes gagnées-billes perdues, quilles abattues, panier-butts marqués, tours ou relais effectués... jusqu'aux notes obtenues pour une dictée ou une série d'opérations.

On s'attachera à compter également le nombre de joueurs, le nombre d'équipes, le nombre de joueurs par équipe et à constater les situations de parité.

Il est cependant des jeux qui offrent d'autres particularités intéressantes à exploiter. Dés et dominos par exemple donnent une représentation des petits nombres déjà évoquée dans la première partie mais prolongent cette configuration jusqu'à douze, avec le 6 et le double 6. Avec des jeux du type « jeu de l'oie » on peut alors calculer quelle sera la case d'arrivée, comment atteindre telle ou telle case avec 1, 2 ou 3 lancers de dés, quelle est la différence d'avancée entre deux joueurs... La structure du dé permet également de trouver les compléments à 7, la somme des faces opposées donnant toujours le nombre 7.

Les jeux de cartes présentent aussi des configurations utilisables pour la visualisation des nombres de 1 à 10 et les jeux de « batailles » nécessitent la reconnaissance immédiate de la quantité la plus grande.

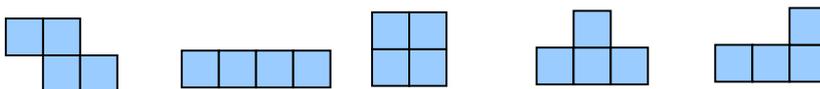


Moins traditionnels mais apportant encore une autre vision du nombre, les polyminos se prêtent à de nombreux jeux de reconnaissances, d'assemblages, de pavages, de puzzles... Le terme polymino est calqué sur celui de « domino » : le domino étant constitué de 2 carrés ayant un côté commun, le polymino de taille n sera un assemblage de « n » carrés connexes.

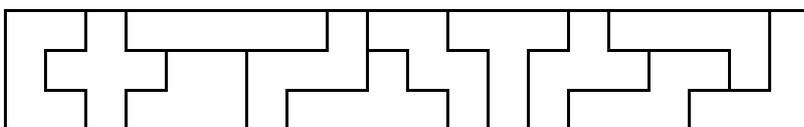
Nous aurons par exemple 2 polyminos de taille 3 :



et 5 de taille 4 :



Voici un exemple de puzzle réalisé avec des polyminos de taille 5 :



Ces exercices avec les polyminos peuvent se faire sur du papier quadrillé, ils préparent au calcul des mesures d'aires et permettent des observations simples sur le nombre de carreaux nécessaires pour former un rectangle ou un carré.

Toujours à la frontière entre numération et géométrie on trouve le matériel ci-dessous version bois ou version plastique, encastrable (Matériel concret de Lubienska de Lenval chez Oppa Montessori ou dans le catalogue Celda par exemple)



(photo catalogue Celda)

Ce type de matériel est déjà décrit dans le Dictionnaire Pédagogique (il est attribué à M. Martinot, instituteur à Nismes (Namur)) : « *Les unités simples sont représentées par mille petits cubes d'un centimètre de côté ; les dizaines par une rangée de 10 de ces petits cubes, en forme de réglette ; les centaines par dix réglettes ou une planchette de cent cubes. Le mille est figuré par le décimètre cube. Il est facile, avec cet ingénieux appareil, de faire exécuter de visu des calculs relativement très compliqués sur ces cubes et ces parallélépipèdes, au lieu d'opérer sur les chiffres.* » Avec un avertissement de rigueur : « *Rappelons seulement les réserves que nous croyons devoir faire au sujet de l'emploi trop prolongé de l'enseignement par les yeux.*⁽⁹⁾ » Ce matériel est en effet classé au chapitre *arithmomètres*, avec ces machines à calculer de la fin du XIX^{ème} qui sont « *à l'usage des banquiers, des architectes ou des savants* ». L'intérêt de ces cubes est pourtant double : faciliter l'étude de la numération mais aussi celle du système métrique en « *représentant en nature non seulement des longueurs linéaires, mais des surfaces et des volumes*⁽⁹⁾ ». C'est à cet apprentissage conjoint du nombre et de la mesure que sera consacré le dernier paragraphe.

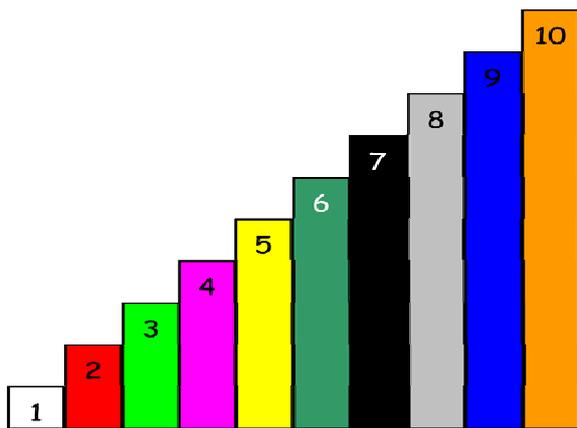
7-Système métrique et monnaie

Quand le Dictionnaire Pédagogique évoque l'éducation des sens il se réfère à la « Leçon de choses », véritable initiation à l'observation scientifique et tremplin vers l'abstraction physique et mathématique :

« Nul phénomène n'est vraiment objet de science que quand il est mesuré... ...Pour saisir les différences avec exactitude, il faut comparer ; pour comparer, il faut abstraire. L'enfant est inhabile à l'abstraction. Il n'a point d'unité, de mesure fixe, et les apparences les plus diverses se présentent confusément à son esprit. En fait de grandeur, il ne distingue que le grand, le petit et le moyen ; en fait de temps, que le passé, le présent et le futur ; en fait de poids, que le lourd, le léger et ce qui n'est ni l'un ni l'autre. Quand il emploie les nombres, il y gagne peu, parce qu'il ne se fait aucune idée du contenu réel des grands nombres : toute évaluation est donc pour lui une affaire d'impression, et la somme est faite avant que le détail des éléments ait été parcouru. Il vit dans un perpétuel à peu près. L'exactitude est le dernier de ses soucis, et quand il a commencé à observer les qualités des choses, la quantité, ce caractère abstrait et seul vraiment scientifique de nos perceptions, lui reste longtemps encore inaccessible. »⁽⁸⁾

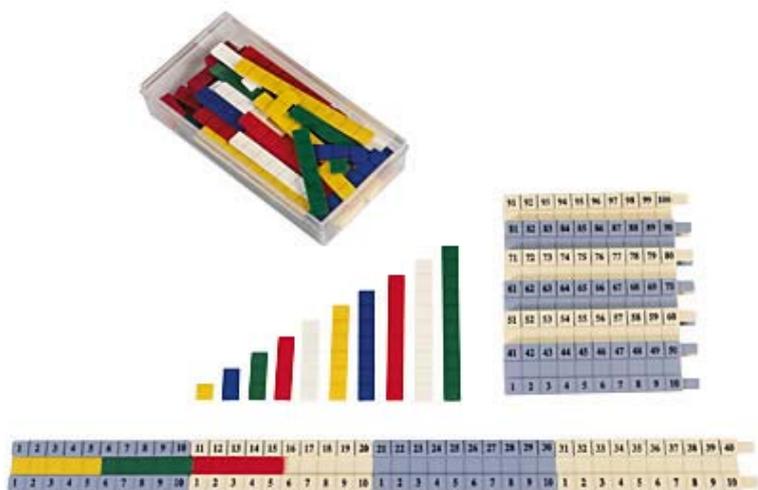
On introduira donc le plus tôt possible les unités de mesure fixes du système métrique, d'une part pour conforter ce que l'on a appelé la « connaissance intime du nombre », d'autre part pour construire de front au CE et au CM la numération décimale et les systèmes d'unités physiques avec leurs multiples et sous-multiples. En appliquant le nombre à ces mesures physiques, on élargit considérablement le champ de la représentation mentale : boulier, bâchettes et jetons donnaient une vision de 10, 50, 100 éléments, l'enfant aura désormais une image kinesthésique de 10m, 50m, 100m quand il courra, de 10g, 50g, 100g quand il soulèvera une masse marquée, d'1 minute, 30 minutes, 60 minutes quand il chronométrera une activité.

Pour les mesures de longueur on pourra utiliser les barres graduées dont il a été question précédemment (attention il existe un matériel multibase identique au matériel concret de Lubienska de Lenval qui n'est pas métrique) ou les baguettes Cuisenaire (de 1cm à 10cm). L'originalité de ces dernières est de remplacer les graduations par une différence de couleurs. Ceci permet certes d'autres types d'exercices, mais en introduisant une qualité n'ayant plus rien à voir avec la longueur des barres, on risque d'entraîner certaines confusions (blanc+rouge=vert?)



(photo catalogue Celda)

Voici matériel un peu plus coûteux (13,50 € la boîte) mais qui allie au mieux exercices de mesure, de calcul et de numération :

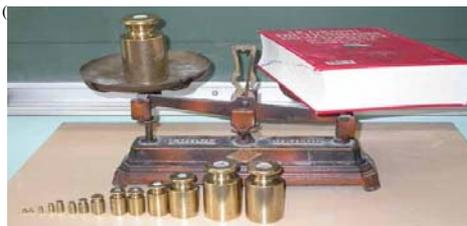


10 “règles dizaines” en plastique peuvent s'assembler pour constituer une grande règle de 1 mètre de long, graduée dans sa partie supérieure de 1 jusqu'à 100 (dans la partie inférieure chaque dizaine l'est de 1 à 10). La boîte contient également 50 réglettes représentant les nombres de 1 à 10 (5 de chaque couleur) ces réglettes peuvent coulisser dans la rainure centrale.

(photo catalogue Celda)

Le papier quadrillé 10x10, moins coûteux lui, est un bon support aux activités de mesure, repérage, traçage mais il est beaucoup plus exigeant en soin et en application, il faudra donc adapter son utilisation en fonction des classes et des enfants.

Les mesures de masse demandent un matériel plus important et moins facile d'utilisation au CP, la traditionnelle Balance Roberval sera avantageusement remplacée par des modèles mieux adaptés aux petites mains, surtout pour la manipulation des petites masses en laiton qui disparaissent facilement (il existe des masses marquées en plastique).



(photos catalogue Celda)



Les manipulations avec les longueurs et les masses entraîneront des exercices de comparaison « plus long que, plus court que, plus léger que, plus lourd que... » qu'il sera indispensable de bien

mettre en place à l'oral avant d'entreprendre une traduction en langage mathématique.

Ainsi l'égalité, qui est introduite avec les opérations en début d'année, va trouver d'autres applications qu'il faudra amener de façon graduée. La situation la plus simple correspond à une histoire qui se déroule dans le temps : on a une collection d'éléments « a », un événement se produit, cette collection se trouve augmentée ou diminuée de « b » éléments et maintenant on a « c » éléments, on peut alors écrire l'histoire : « $a+b=c$ » ou « $a-b=c$ ». Pour ne pas confondre les signes on conservera ce schéma suffisamment longtemps, l'écriture se déroule de gauche à droite, comme celle d'un récit et l'égalité est d'autant plus facile à admettre qu'on a bien les mêmes éléments à droite et à gauche du signe « égal ». La comparaison de longueurs de réglettes ou de masses marquées fait appel à un degré d'abstraction supérieur, si une masse de 2g et une autre de 3g s'équilibrent bien avec une masse de 5g, je pourrai bien écrire $2g+3g=5g$, mais là, il ne s'agit plus d'une succession d'évènements et les masses de gauche ne sont ni les mêmes, ni en même nombre que la masse de droite, on est passé du comptage d'éléments concrets à celui d'unités physiques abstraites. C'est aussi ce qui permettra d'écrire $5g=2g+3g$, abstraction qui n'est pas forcément évidente pour le petit enfant et qui justifie à la fois la manipulation et l'écriture des unités de mesure quand on va commencer à les employer.

L'unité monétaire ne fait pas partie des unités physiques et elle en est d'autant plus abstraite : l'enfant ne peut comparer ni à l'oeil, ni au toucher la valeur de 2 objets différents. Elle est cependant celle qui est la plus utilisée dans la vie quotidienne du plus grand nombre. L'intérêt d'employer la monnaie factice dans les exercices de calcul, outre le fait qu'elle renvoie à la vie courante, c'est d'avoir comme support des objets représentant les nombres « ronds » les plus utiles pour le calcul mental et la numération : 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100. Multiplications et divisions seront aussi mobilisées pour calculer la valeur de tant de pièces de 2€ ou de billets de 5€, ou pour connaître le nombre nécessaire de pièces ou de billets pour avoir telle somme (on aborde ainsi de manière intuitive la division comme calcul du nombre de parts).

La mesure du temps sur les pendules à aiguilles (les cadrans numériques ne présentent aucun intérêt à ce stade) permet d'aborder les notions de quart et de demi. Le calendrier du mois, présenté avec les jours en lignes ou en colonnes, offre lui des possibilités de comptage de 7 en 7.

Pour conclure avec les unités physiques nous évoquerons le litre sous la forme la mieux observable par les enfants : celle des emballages de produits liquides. Mis à part les exercices de transvasement de bouteilles ou flacons d'1l dans des bonbonnes ou jerricans de 5l ou 10l les manipulations de mesures graduées n'occasionnent guère de calculs. Elles apportent cependant des observations intéressantes sur les liquides : conservation du volume malgré le changement de forme, horizontalité de la surface...

Comme il vient d'être question d'emballages dans cet exposé sur les outils pour compter, j'ajouterai à cette liste les conditionnements qui permettent de visualiser des groupements par quantités autres que 10 : boîtes à oeufs, paquets de gâteaux, de crayons, ce sont des sources d'inspiration inépuisables pour trouver des problèmes concrets motivants.

8- Conclusion

Il faudra donc parmi ces ingrédients (et leurs nombreuses variantes) choisir ceux qui permettront au mieux d'exercer le « *grand art du véritable éducateur* », évoqué par Buisson, qui consiste à « *trouver pour chaque élève et pour chaque étude le moment précis où il convient de passer de la forme intuitive à la forme abstraite* ». Ce choix devra respecter plusieurs équilibres :

1. Varier les supports pour que la confusion ne s'installe pas entre la forme sensible et la forme abstraite, mais éviter les changements trop fréquents qui perturbent l'attention et la concentration. L'utilisation d'un même matériel sur une longue période permet par ailleurs de reprendre sans rupture une étape qui aurait été mal assimilée.
2. Ménager la fatigue de l'enfant tout en cultivant son goût de l'effort.
3. Et surtout organiser de façon méthodique et rationnelle des exercices qui font appel à une faculté qui ne l'est pas : l'intuition enfantine. Un soin tout particulier devra être apporté à la préparation, la distribution et le rangement du matériel utilisé. Pour éviter par exemple les déplacements et les pertes de temps, on pourra procurer à chaque élève une petite boîte de rangement individuelle qu'il aura toujours à sa disposition.

Tous ces outils pour calculer devront en outre être considérés comme le radeau de la parabole bouddhiste : un homme ayant construit un radeau pour traverser un fleuve ne doit pas continuer à le transporter un fois sur l'autre rive, mais l'abandonner sur la berge. Ainsi en sera-t-il de ces supports : quand les décompositions des nombres de 1 à 10 seront assimilées, plus de calcul sur les doigts, quand les tables d'addition, la numération de 1 à 100, les automatismes du calcul posé et du calcul mental seront installés (addition et soustractions de nombres à 2 chiffres), plus de recours au boulier, sauf exercice spécifique ou révision. Le grand art du véritable éducateur consistera aussi à retenir l'enfant qui veut saborder son embarcation avant l'arrivée et à délivrer de son fardeau celui qui refuse de s'en passer.

Références :

Dictionnaire de pédagogie de Ferdinand Buisson :

- (1) *article « Mathématiques » de Carlo Bourlet (édition de 1911)*
- (2) *article « Pape-Carpentier (Mme) » de Eugène Brouard (édition de 1911)*
- (3) *article « Calcul intuitif » de Ferdinand Buisson (édition de 1887)*
- (4) *article « Abstraction » de Ferdinand Buisson (édition de 1887)*
- (5) *article « Sens (éducation des) » de Gabriel Compayré (édition de 1911)*
- (6) *article « Intuition » de Ferdinand Buisson (édition de 1887)*
- (7) *article « Boulier » de Ferdinand Buisson (édition de 1887)*
- (8) *article « Observation » d'Alfred Espinas (édition de 1911)*
- (9) *article « Arithmomètre » (édition de 1887)*