



La découverte de Fourier : même le feu est régi par les nombres

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

9 février 2011

Conférence BnF - Un texte, un mathématicien

Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 09/02/2011

Même le feu est régi par les nombres

Joseph Fourier, en habit d'académicien



Joseph Fourier
en habit d'académicien
1768 – 1830

Jean-Pierre Demailly (Grenoble I), 09/02/2011

Même le feu est régi par les nombres

La maison natale de Fourier à Auxerre



La maison natale de (Jean-)Joseph Fourier à Auxerre.
Son père est un très modeste tailleur d'habits.
Sa mère décède alors qu'il a 8 ans, et il devient **orphelin** à 10 ans

La vie de Joseph Fourier en bref

- 1768 : naissance à Auxerre
- 1777 : études à **l'école militaire d'Auxerre** (Bénédictins)
- 1784 : **professeur à l'Ecole Militaire (à 16 ans 1/2 ...)**
- 1785 : mémoire sur les équations algébriques
- 1792 : président de la Société Populaire d'Auxerre
- 1794 : la Terreur ; **arrestation / prison / il échappe à la guillotine**
- fin 1794 : élève de l'École Normale de Paris
- 1795–1796 : **professeur à Normale et à Polytechnique !**
- 1798 : Expédition d'Egypte, comme conseiller scientifique
- 1798–1802 : **diplomate, secrétaire de l'Institut d'Égypte au Caire**
- 1802–1815 : Napoléon le nomme **Préfet de l'Isère** à Grenoble
- 1811 : travaux sur la **propagation de la chaleur**
introduction des **séries trigonométriques**

La vie de Joseph Fourier : la consécration

1815 : à la Restauration, il est destitué de son mandat de préfet;
il poursuit activement ses travaux sur la chaleur

1817 : Fourier est élu membre de l'Académie des Sciences

1822 : publication de la "Théorie Analytique de la Chaleur"

1822 : élu Secrétaire Perpétuel de l'Académie des Sciences

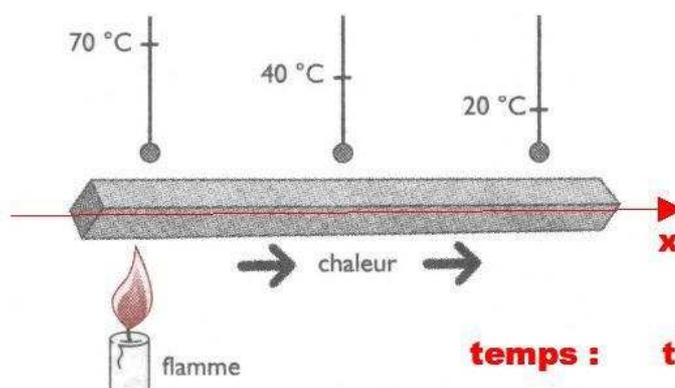
1824 : il présente l'effet de serre, qu'il décrit prémonitoirement

1826 : élu membre de l'Académie française

1830 : décès de Fourier, à l'âge de 62 ans

1831 : publication posthume de son dernier ouvrage
"Analyse des équations déterminées"

L'équation de la chaleur



On pose : $\theta(x, t)$ = température au point x et au temps t

$$\theta'_t(x, t) = D\theta''_{xx}(x, t) + \frac{P}{\rho c} \quad \text{où}$$

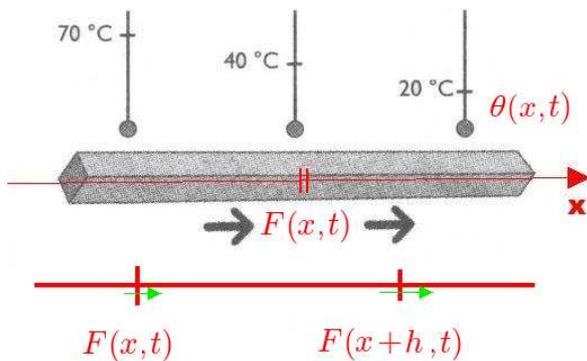
D = coefficient de diffusivité thermique (en m^2s^{-1})

P = apport volumique interne/externe de chaleur (en $W.m^{-3}$)

ρ = masse volumique du matériau (en $kg.m^{-3}$)

c = chaleur spécifique massique du matériau (en $J.kg^{-1}K^{-1}$).

Équation de la chaleur : explication



temps t fixé.

Le flux de chaleur $x \mapsto F(x, t)$ à cet instant est d'autant plus grand que la température $x \mapsto \theta(x, t)$ varie plus vite avec x , proportionnel à la dérivée par rapport à x (coefficient < 0) :

$$F(x, t) = -a\theta'_x(x, t)$$

Quantité de chaleur $\delta Q/\delta t$ pénétrant dans un tronçon $[x, x + h]$

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = F(x, t) - F(x + h, t) \simeq -F'_x(x, t)h = ah\theta''_{xx}(x, t)$$

Équation de la chaleur : conclusion

Reprenons : nous avons trouvé

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = ah\theta''_{xx}(x, t)$$

Or, la variation dans le temps de la température du tronçon $[x, x + h]$ est proportionnelle à la quantité de chaleur que ce tronçon a reçu et inversement proportionnelle à sa masse, donc

$$\theta'_t(x, t) = b \times \frac{1}{\rho h} \times \frac{\delta Q}{\delta t} = \frac{ab}{\rho} \theta''_{xx}(x, t)$$

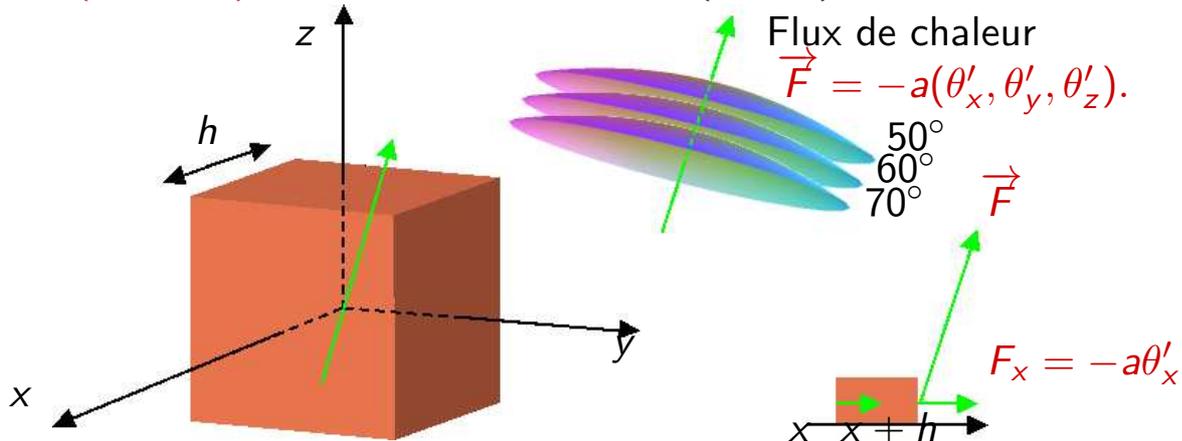
En posant $D = ab/\rho$, on trouve l'équation de la chaleur

$$\theta'_t(x, t) = D\theta''_{xx}(x, t)$$

pour le cas où $P = 0$ (pas de production interne de chaleur).

Équation de la chaleur en 3 dimensions

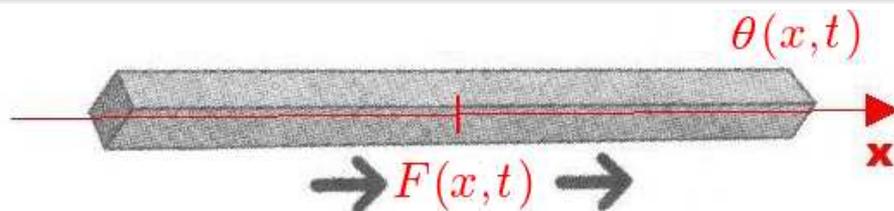
$\theta(x, y, z, t)$ = température au point (x, y, z) et au temps t .



La quantité de chaleur circulant à travers les 2 faces d'abscisses $x, x + h$ vaut $\frac{\delta Q}{\delta t}$ = variation de $F_x = -a\theta'_x$ entre x et $x + h$, soit $a h \theta''_{xx} h$ lorsque h est petit. En faisant la somme sur les 3 paires de faces opposées on trouve ainsi

$$\theta'_t(x, y, z, t) = D(\theta''_{xx} + \theta''_{yy} + \theta''_{zz})(x, y, z, t) + \frac{P}{\rho c}$$

Résolution de l'équation en dimension 1



On regarde l'évolution de la température d'un barreau unidimensionnel de longueur ℓ , soit $[0, \ell]$, à partir d'un instant $t_0 = 0$ où il n'y a plus d'apport extérieur de chaleur (ni production interne) : dans ce cas

$$\theta'_t(x, t) = D \theta''_{xx}(x, t).$$

Le flux de chaleur est

$$F(x, t) = -a \theta'_x(x, t).$$

Il doit être nul en $x = 0$ et $x = \ell$:

$$F(0, t) = F(\ell, t) = 0 \implies \theta'_x(0, t) = \theta'_x(\ell, t) = 0.$$

Résolution de l'équation en dimension 1 (II)

Fourier a alors l'idée lumineuse de regarder des séries trigonométriques de la forme

$$\theta(x, t) = \sum_{0 \leq n \leq N} a_n(t) \cos(n\pi x/\ell), \quad (N \text{ très grand})$$

On calcule facilement

$$\theta'_t(x, t) = \sum_{0 \leq n \leq N} a'_n(t) \cos(n\pi x/\ell),$$

$$\theta'_x(x, t) = \sum_{0 \leq n \leq N} a_n(t) (-n\pi/\ell) \sin(n\pi x/\ell),$$

$$\theta''_{xx}(x, t) = - \sum_{0 \leq n \leq N} a_n(t) (n\pi/\ell)^2 \cos(n\pi x/\ell),$$

donc on a bien $\theta'_x(0, \ell) = \theta'_x(\ell, t) = 0$, et l'équation $\theta'_t = D\theta''_{xx}$ est satisfaite si

$$a'_n(t) = -D(n\pi/\ell)^2 a_n(t).$$

Résolution de l'équation en dimension 1 (III)

Or, on sait facilement résoudre l'équation $a'_n(t) = \lambda a_n(t)$ avec $\lambda = -D(n\pi/\ell)^2$: la solution est

$$a_n(t) = \alpha_n e^{\lambda t} = \alpha_n e^{-D(n\pi/\ell)^2 t}.$$

Ceci donne des solutions de l'équations de la chaleur, à savoir

$$\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-D(n\pi/\ell)^2 t} \cos(n\pi x/\ell)$$

quand $N \rightarrow +\infty$. La question est de savoir si on obtient bien ainsi toutes les solutions lorsque les coefficients α_n sont choisis quelconques ... Or, au temps $t = 0$, on a

$$\theta(x, 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \cos(n\pi x/\ell), \quad x \in [0, \ell]$$

La question est de savoir si cela représente **toutes les fonctions températures possibles** au temps initial ??

Ce sont les séries de la forme

$$(*) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$$

On peut aussi les écrire avec des coefficients complexes

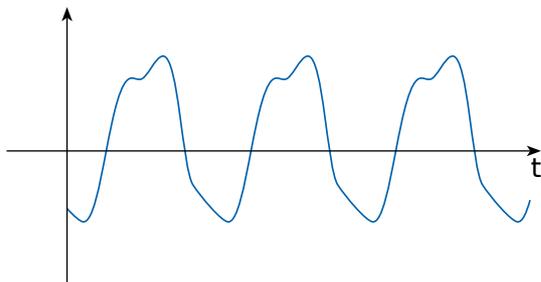
$$(**) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad c_n \in \mathbb{C},$$

du fait que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (relation d'Euler). On remarque que la fonction f est **périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$** .

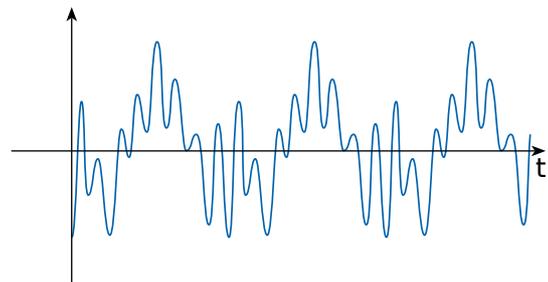
À ce point, Fourier affirme – mais ceci ne sera démontré que près de 20 ans plus tard par Dirichlet en 1829 – que :

Toutes les fonctions périodiques f suffisamment régulières de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ peuvent s'écrire sous la forme (*) ou (**).

Séries de Fourier : signaux sonores



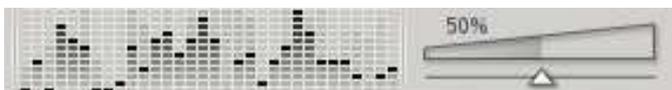
flûte



violon

Le problème est de calculer les coefficients c_n (ou a_n, b_n) qui correspondent à ces signaux sonores.

On parle de **décomposition spectrale** du signal sonore; c'est précisément le spectre (suite des coefficients) qui caractérise le **timbre** de l'instrument.



Séries de Fourier : calcul des coefficients

Les coefficients sont donnés par les formules

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

ou, de façon équivalente $a_0 = c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$ et

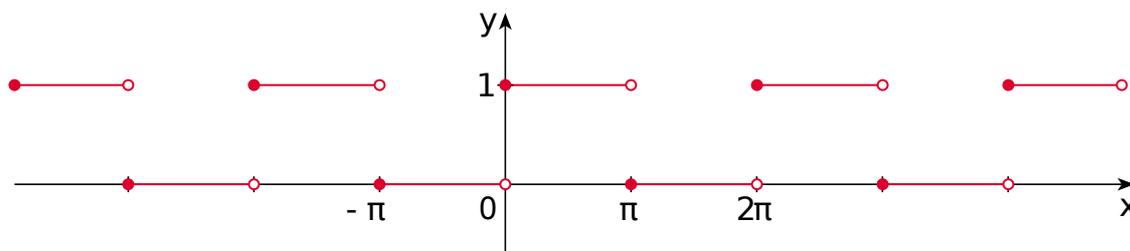
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x dx \quad \text{si } n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x dx \quad \text{si } n \geq 1.$$

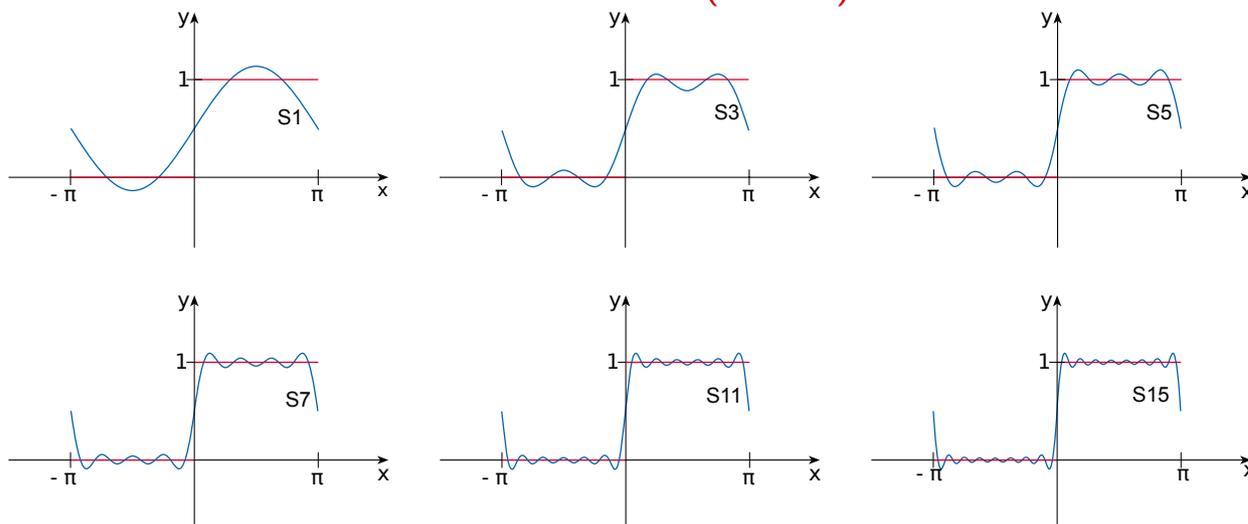
Ceci résulte de la "propriété d'orthogonalité"

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{ip\omega x} e^{-in\omega x} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \\ 0 & \text{si } n \neq p \end{cases}$$

Séries de Fourier : exemple du "signal carré"



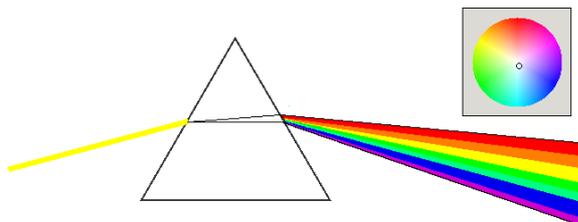
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \dots + \frac{2}{(2n+1)\pi} \sin(2n+1)x + \dots$$



Transformation de Fourier

La théorie de Fourier est la théorie fondamentale permettant de décomposer les ondes de toute nature en fonction de leur fréquence. Dans le cas de la lumière ou des ondes électromagnétiques, on a affaire à un **spectre continu de fréquences**.

Pour la lumière visible, les longueurs d'onde vont de $0,4 \mu m$ (violet) à $0,75 \mu m$ (rouge).



Dans ce cas, on utilise une **transformation de Fourier**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

La transformée de Fourier rapide (FFT)

Elle permet le calcul très rapide par ordinateur de **transformées de Fourier "discrètes" (finies)**

$$\hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-\frac{2\pi i}{N} nk},$$

On utilise alors en général pour N une puissance de 2, soit $N = 2^p$, et on fait une sorte de récurrence sur p , c'est-à-dire qu'on cherche à passer de $N' = N/2$ à N . On écrit

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= \sum_{m=0}^{N'-1} u_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N} (2m)k} + \sum_{m=0}^{N'-1} u_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N} (2m+1)k} \\ &= \sum_{m=0}^{N'-1} u_{2m} e^{-\frac{2\pi i}{N'} mk} + e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \sum_{m=0}^{N'-1} u_{2m+1} e^{-\frac{2\pi i}{N'} mk} \end{aligned}$$

Ceci permet un calcul récurrent rapide par dichotomie.

La transformée de Fourier est utilisée dans de très nombreuses applications technologiques, très souvent à l'aide de l'algorithme de **transformée de Fourier rapide FFT**.

Etant donné 2 suites finies $u = (u_n)_{0 \leq n < N}$ et $v = (v_n)_{0 \leq n < N}$, on appelle **convolution** de u et v la suite notée $w = u * v$ telle que

$$w_n = \sum_{p+q=n \pmod N} u_p v_q \implies \sum u_p 10^{-p} \sum v_q 10^{-q} = \sum w_n 10^{-n}$$

pour des nombres décimaux ayant moins de $N/2$ décimales. La transformée de Fourier a la propriété essentielle (exercice!) que

$$\widehat{w}_n = \widehat{u * v}_n = \widehat{u}_n \widehat{v}_n$$

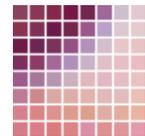
En utilisant de l'arithmétique (congruences), ceci permet d'obtenir un algorithme de multiplication des nombres décimaux beaucoup plus rapide que l'algorithme de multiplication habituel \implies **applications cryptographiques**.

Application technologique : images JPEG

On découpe l'image en carrés de $N \times N$ pixels (souvent, $N = 8$), et on associe à ces $N \times N$ pixels un tableau de $N \times N$ fréquences qui représentent des "ondes de couleur":

"Discrete Cosine Transform" $DCT(i, j) =$

$$\frac{2}{N} C(i) C(j) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} \text{pixel}(x, y) \cos \left[\frac{(2x+1)i\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2y+1)j\pi}{2N} \right]$$



où $C(0) = 1/\sqrt{2}$, $C(i) = 0$ si $i > 0$.

Le plus souvent, la variation de couleur des pixels est régulière, de sorte que de nombreux coefficients associés aux fréquences élevées sont nuls. On les néglige donc - typiquement 7 ou 8 coefficients suffisent pour un tableau de 64 pixels. Ceci permet d'obtenir un **grand coefficient de compression** et donc de **réduire la quantité de mémoire nécessaire**.

Références bibliographiques (I)

Le texte de la conférence :

Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Didot père et fils, 1822, XXII-639 p,

<http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-29061&M=telecharger>

L'oeuvre de Fourier

Oeuvres de Fourier, *publiées par les soins de M. Gaston Darboux, sous les auspices du ministère de l'Instruction publique...* - Paris : Gauthier-Villars, 1888-1890. - 2 vol. : fig., fac-similé, portr. gravé. magasin [4- R- 753 (1) et (2)]

François Arago, *Joseph Fourier*. Saint-Christophe-en-Bresse : les Caractères d'Ulysse, DL 2010, [39] p. magasin [2010- 171673]

Note : biographie lue en séance publique de l'Académie des sciences, le 18 novembre 1833

Références bibliographiques (II)

Jean-François Coblentz, *Introduction à l'analyse de Fourier*. [Paris] : Ed. Fréquences : diff. Eyrolles, 1988, 187 p. Salle C – Mathématiques – [515.243 3 COBL i]

Gilbert Demengel, *Transformations de Fourier généralisées : séries et transformations de Fourier et de Walsh, leurs extensions, transformations discrètes et rapides : cours et problèmes résolus*. Paris : Ellipses, 1999, 288 p. Salle C – Mathématiques – [515.723 DEME t]

Gilbert Demengel; Paul Benichou, Rosine [et al.] *Distributions et applications : outils pour l'ingénieur : séries de Fourier, transformations de Fourier et de Laplace*. Paris : Ellipses, 1996, 254 p. Salle C – Mathématiques – [515.243 3 DIST]

Références bibliographiques (III)

Jean Dhombres , Jean-Bernard Robert, *Fourier, Créateur de la physique mathématique*, Belin, 1998, Salle C - Histoire des sciences – [530.090 4092 FOUR 5 DH]

Réal Gélinas, *Suites et séries, séries et transformées de Fourier, variables complexes*. Trois-Rivières : Ed. SMG, 1984, XII-218 p. Salle C – Mathématiques – [515.24 GELI s]

Ivor Grattan-Guinness, *Joseph Fourier, 1768-1830 : a survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807*. Cambridge, Mass. ; London : M.I.T. Press, [cop. 1972], X-516 p. Note : contient un texte inédit de Fourier de 1807, intitulé : “Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides” .

Références bibliographiques (IV)

Jean Goret, *La pensée de Fourier*. Paris : Presses universitaires de France, 1974, 156 p. magasin [16- R- 4754 (112)]

John Herivel, *Joseph Fourier face aux objections contre sa théorie de la chaleur : lettres inédites, 1808-1816*. Paris : Bibliothèque nationale, 1980, 86 p. Salle C - Histoire des sciences – [530.090 4092 FOUR 5 HE]

John Herivel, *Joseph Fourier : the man and the physicist*. Oxford : Clarendon press, 1975, XI-350 p. magasin – [8- LN27- 91444]

Michel Hervé, *Transformation de Fourier et distributions*. Paris : Presses universitaires de France, 182 p. Salle C – Mathématiques – [515.723 HERV t]

Jean-Pierre Kahane, Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998

Jean-Pierre Kahane, Jean-Paul Fargier, *L'analyse de Fourier*, Mosaïque mathématique, série de films conçue par J.-M. Kantor, <http://www.math.jussieu.fr/~kantor/MOSAIQUE/mp4/>