Introduction aux séries de Fourier.

Idée fondamentale. Représenter un signal périodique comme une somme de sinus et de cosinus.

1. Fonctions périodiques.

Définition. Soient $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $T > 0$. f est T–périodique si

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad f(t+T) = f(t).$$

Si f est une fonction T–périodique, $\omega = 2\pi/T$ s'appelle la pulsation de f ($\nu = 1/T$ est la fréquence de f).

Exemple. $t \longmapsto \sin t$ est 2π–périodique. Si $\omega > 0$, $t \longmapsto \cos(\omega t)$ est $2\pi/\omega$–périodique.

Rappelons qu'une fonction f est continue par morceaux sur $[0, T]$ si elle est continue sauf en un nombre fini de points où elle possède une limite à droite et à gauche. f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si elle est continûment dérivable sauf en un nombre fini de points où f et f' possèdent une limite à droite et à gauche. Une fonction T–périodique est continue par morceaux ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux si elle l'est sur $[0, T]$.

Si f est une fonction T–périodique et continue par morceaux, on a

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \qquad \int_0^T f(t)\,dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt.$$

En particulier pour $\alpha = -T/2$,

$$\int_0^T f(t)\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt.$$

2. Coefficients de Fourier.

2.1. Coefficients réels. Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux ; $\omega = 2\pi/T$ la pulsation associée. Les coefficients de Fourier de f sont définies par

$$c_0 = c_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt,$$

et pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt,$$
$$b_n = b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt.$$

Dans toute la suite T est un réel strictement positif et $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation associée. Toutes les fonctions considérées seront T–périodiques et continues par morceaux.

Remarque. Si f est une fonction paire – pour tout réel t, $f(-t) = f(t)$ –, pour tout $n \geq 1$, $b_n(f) = 0$ et

$$a_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt, \qquad c_0(f) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t)\, dt.$$

Si f est une fonction impaire – pour tout réel t, $f(-t) = -f(t)$ –, $c_0(f) = 0$, pour tout $n \geq 1$, $a_n(f) = 0$, et

$$b_n(f) = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\, dt.$$

Exemple. **1.** *Signal en escalier.* Soit f la fonction T–périodique suivante :

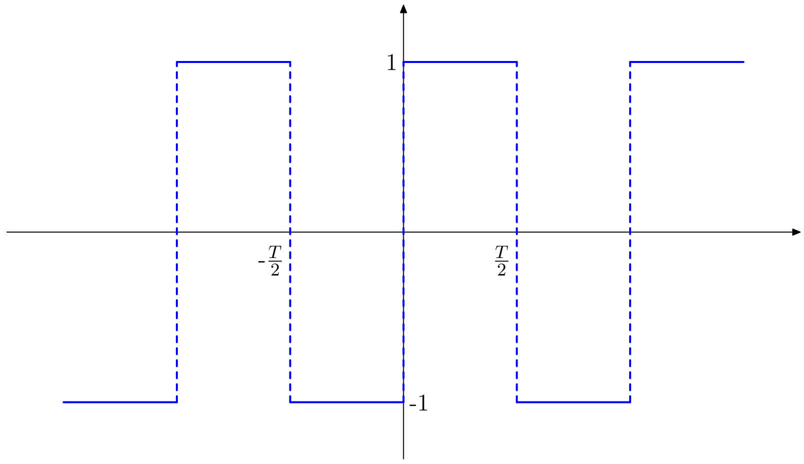

FIG. 1 – Signal en escalier : graphe de f

f est impaire et on a $f(t) = 1$ pour $t \in]0, T/2[$. Par suite, $c_0 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout n. Calculons b_n.

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \sin(n\omega t)\, dt = \frac{4}{T} \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{4}{n\omega T} \left(1 - \cos(n\omega T/2)\right).$$

Comme $\omega T = 2\pi$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on obtient

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. *Signal triangulaire.* On considère la fonction g T–périodique dont le graphe est

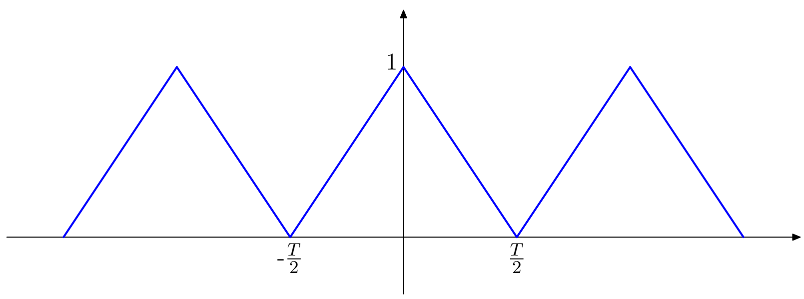

FIG. 2 – Signal triangulaire : graphe de g

g est paire et on a $g(t) = 1 - \frac{2}{T}t$ pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$. $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. De plus,

$$c_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}(1-2t/T)\,dt = 1 - \frac{4}{T^2}\int_0^{T/2} t\,dt = 1 - \frac{4}{T^2}\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}(1-2t/T)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_0^{T/2} - \frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\,dt.$$

Comme $\omega T = 2\pi$ et $\sin(n\pi) = 0$, on a

$$a_n = -\frac{8}{T^2}\int_0^{T/2} t\cos(n\omega t)\,dt.$$

Faisons une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos(n\omega t)$: $u'(t) = 1$ et $v(t) = \sin(n\omega t)/(n\omega)$. Il vient ($\sin(n\pi) = 0$)

$$-\frac{T^2}{8}\,a_n = [t\sin(n\omega t)/(n\omega)]_0^T - \int_0^{T/2}\sin(n\omega t)/(n\omega)\,dt = 0 - \left[-\frac{\cos(n\omega t)}{(n\omega)^2}\right]_0^{T/2}$$

c'est à dire, comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$,

$$a_n = \frac{8}{(nT\omega)^2}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right) = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2}, & \text{si n est impair,} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2. Coefficients complexes. On note, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-in\omega t}\,dt.$$

On retrouve bien évidemment la définition précédente de $c_0(f)$. Puisque f est une fonction réelle, on a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $c_n(f) = \overline{c_n(f)}$. D'autre part,

$$\forall n \geq 1, \qquad c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, \qquad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

soit encore

$$\forall n \geq 1, \qquad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \qquad b_n(f) = i\left(c_n(f) - c_{-n}(f)\right).$$

Exemple. Signal en dents de scie. Soit h la fonction T–périodique définie par $f(t) = \frac{2}{T}t$ pour $|t| < \frac{T}{2}$; le graphe de h est donné à la FIG. 3.

Déterminons les coefficients c_n de h. Puisque h est impaire, $c_0 = 0$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, une primitive de $2te^{-in\omega t}/T$ est de la forme $(at+b)e^{-in\omega t}$. En dérivant cette dernière expression on obtient la relation

$$-in\omega(at+b) + a = 2t/T, \qquad a = 2/(-in\omega T) = i/(n\pi), \quad b = a/in\omega = 1/(n^2\omega\pi)$$

Par conséquent, comme $e^{-in\omega T/2} = e^{in\omega T/2} = (-1)^n$

$$c_n = \frac{1}{T}\left[(at+b)e^{-in\omega t}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{i(-1)^n}{n\pi}.$$

On déduit immédiatement les coefficients a_n et b_n : pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = (c_n + c_{-n}) = 0, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

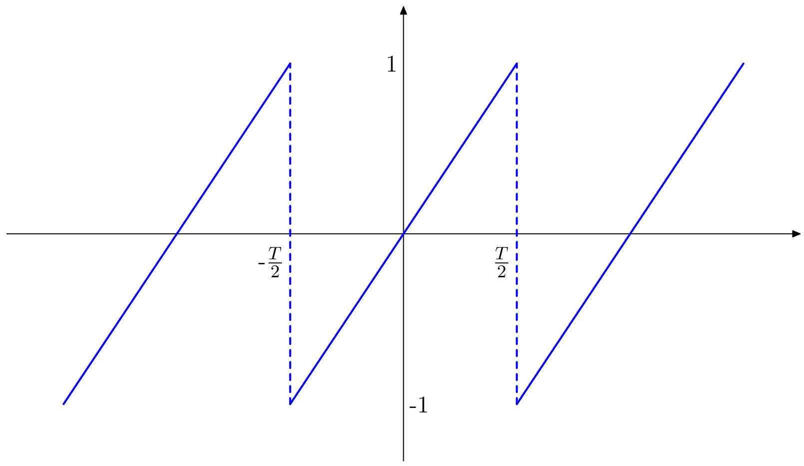

Fig. 3 – Signal en dents de scie : graphe de h

2.3. Propriétés des coefficients de Fourier. Soient f et g deux fonctions T–périodiques continues par morceaux, λ un réel.

1. $c_n(f+\lambda g) = c_n(f) + \lambda c_n(g)$, $a_n(f+\lambda g) = a_n(f) + \lambda a_n(g)$, $b_n(f+\lambda g) = b_n(f) + \lambda b_n(g)$;
2. Si f est **continue** sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors $c_n(f') = in\omega c_n(f)$, $a_n(f') = n\omega b_n(f)$ et $b_n(f') = -n\omega a_n(f)$;
3. Si $g(t) = f(t-\tau)$, $c_n(g) = e^{-in\omega\tau} c_n(f)$;
4. $\lim_{n\to+\infty} \left(|c_n(f)| + |b_n(f)| + |a_n(f)|\right) = 0$.

La seconde propriété montre que plus la fonction f est régulière – disons pour simplifier plus on peut calculer de dérivées successives de f – plus les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 rapidement.

Exemple. On peut remarquer que la fonction f – cf. Fig. 1 – est à peu près la dérivée de la fonction g (Fig. 2). Plus précisément,

$$g'(t) = \begin{cases} -\frac{2}{T}, & \text{si } t \in]0, T/2[, \\ +\frac{2}{T}, & \text{pour } t \in]-T/2, 0[\end{cases} = -\frac{2}{T} f(t).$$

Comme g est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a les relations

$$a_n(f) = -\frac{T}{2} a_n(g') = -\frac{n\omega T}{2} b_n(g) = -n\pi b_n(g), \quad b_n(f) = -\frac{T}{2} b_n(g') = \frac{n\omega T}{2} a_n(g) = n\pi a_n(g)$$

ce qui est cohérent avec les résultats trouvés précédemment.

On peut également remarquer que g est continue alors que f ne l'est pas : g est plus régulière que f. Ceci se traduit sur les coefficients de Fourier : ceux de g convergent vers 0 comme $1/n^2$ tandis que ceux de f le font comme $1/n$ donc plus lentement.

3. Série de Fourier.

3.1. Définition. Pour tout $N \geq 1$, on désigne par $S_N[f]$ la *somme partielle de Fourier d'ordre N* c'est à dire la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad S_N[f](t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\big).$$

Compte tenu des relations entre les coefficients réels et complexes, on a

$$a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t) = c_n(f)e^{in\omega t} + c_{-n}(f)e^{-in\omega t}$$

et par suite

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad S_N[f](t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\omega t}.$$

On introduit également la *série de Fourier* de f, $S[f]$, définie par

$$S[f](t) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)\big) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f)e^{in\omega t}.$$

Il s'agit d'une somme infinie et il faut donner un sens à cette écriture ; ce point sera abordé plus tard.

Exemple. Reprenons l'exemple de la fonction g cf. FIG. 2. On a trouvé

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}, \text{ si } n \text{ impair}, \quad a_n = 0, \text{ sinon.}$$

La série de Fourier de g est

$$S[g](t) = \frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1,\ \text{impair}} \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}\cos((2p+1)\omega t).$$

3.2. Spectre. Écrivons différemment le terme d'ordre n de la série de Fourier de f.

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin(n\omega t)\right)$$

c'est à dire, notant $A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2} = 2|c_n|$,

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n\left(\frac{a_n}{A_n}\cos(n\omega t) + \frac{b_n}{A_n}\sin(n\omega t)\right)$$

Puisque $(a_n/A_n)^2 + (b_n/A_n)^2 = 1$, il existe un réel φ_n tel que $\cos\varphi_n = a_n/A_n$ et $\sin\varphi_n = b_n/A_n$. On a alors

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = A_n\left(\cos\varphi_n \cos(n\omega t) + \sin\varphi_n \sin(n\omega t)\right) = A_n\cos(n\omega t - \varphi_n).$$

On voit donc apparaître l'amplitude A_n, la pulsation $n\omega$ et le déphasage φ_n.

Le graphe $n \longmapsto A_n$ – on trouve parfois $n \longmapsto A_n^2$ – s'appelle le spectre. Le spectre permet de visualiser les termes qui comptent dans la série de Fourier : si A_n est grand le terme d'ordre n compte beaucoup dans la série de Fourier ; si A_n est petit la contribution du terme d'ordre n est faible.

4. Convergence de la série de Fourier.

Il s'agit d'un problème mathématique assez délicat et nous donnerons seulement deux résultats élémentaires.

4.1. Approche ponctuelle. Commençons par donner un sens précis à la série de Fourier de f.

Définition. On dit que la série de Fourier de f converge en un point t lorsque la limite quand $N \to +\infty$ de $S_N[f](t)$ existe. On note dans ce cas $S[f](t)$ cette limite.

La série de Fourier est donc définie comme la limite quand N tend vers $+\infty$, si cette limite existe, des sommes partielles de Fourier. Il faut donc voir les sommes partielles de Fourier $S_N[f]$ comme des approximations de la série de Fourier $S[f]$. Plus les coefficients de Fourier tendent rapidement vers 0, meilleure est l'approximation. Concrètement, ceci signifie que lorsque les coefficients vont rapidement vers 0, on n'est pas obligé de prendre N très grand pour que $S_N[f]$ soit une bonne approximation de $S[f]$. Le spectre permet de visualiser la vitesse de convergence vers 0 des coefficients. Il reste à voir le lien entre la série de Fourier $S[f]$ et le signal de départ f.

Rappelons que $f(t+)$ et $f(t-)$ désignent les limites à droite et à gauche de f au point t soit

$$f(t+) = \lim_{x \overset{x>t}{\to} t} f(x), \qquad f(t-) = \lim_{x \overset{x<t}{\to} t} f(x).$$

Théorème (Dirichlet). *Soit f une fonction T-périodique $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

Pour tout réel t, la limite de $S_N[f](t)$ quand $N \to +\infty$ existe et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \qquad S[f](t) = \lim_{N \to +\infty} S_N[f](t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

En particulier, si f est continue au point t, $S[f](t) = f(t)$.

Toute fonction f continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et périodique peut donc être approchée par une somme finie de sinus et de cosinus $S_N[f]$ et égale à une somme infinie de sinus et de cosinus $S[f](t)$.

D'une certaine manière, on peut remplacer à l'aide des coefficients de Fourier tout signal continu même très compliqué par une somme de signaux sinusoïdaux.

Exemple. Reprenons la fonction f de la Fig. 1. Si $0 < t < T/2$, f est continue au point t et on a $1 = f(t) = S[f](t)$. Par contre au point $t = 0$, $S[f](0) = (f(0+) + f(0-))/2 = 0$. On a donc, pour $t = T/4$, d'après les coefficients de f,

$$1 = S[f](T/4) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impair} \geq 1} \frac{1}{n} \sin(n\omega T/4) = \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{2p+1} \sin((2p+1)\pi/2)$$

et comme $\sin((2p+1)\pi/2) = \sin(p\pi + \pi/2) = \cos(p\pi) = (-1)^p$, on en déduit que

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1}, \qquad \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$

La fonction g dont le graphe est donné à la Fig. 2 est continue. On a donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $S[g](t) = g(t)$ c'est à dire

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos((2p+1)\omega t).$$

Pour $t = 0$, on obtient

$$\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4.2. Approche « énergie ». On appelle *énergie moyenne* de la fonction f la quantité

$$E(f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt.$$

$E(f)$ joue le rôle pour les fonctions périodiques de la norme euclidienne au carré des vecteurs du plan ou de l'espace. On peut ainsi aborder les série de Fourier sous un angle plus géométrique. Par exemple, si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 .$$

Pour les séries de Fourier c'est un peu pareil : $S_N[f]$ et $f - S_N[f]$ sont orthogonaux pour E et

$$E(f) = E\left(f - S_N[f]\right) + E\left(S_N[f]\right), \qquad E\left(f - S_N[f]\right) = E(f) - E\left(S_N[f]\right).$$

De ce point de vue, la convergence de la série de Fourier est plus simple puisqu'on a le résultat suivant.

Théorème (Bessel-Parseval)**.** *Soit f une fonction T–périodique et continue par morceaux.*

Alors, $\lim_{N\to+\infty} E\left(f - S_N[f]\right) = 0$*. De plus,*

$$E(f) = E\left(S[f]\right) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Exemple. Pour la fonction f (Fig. 1) qui est impaire, l'égalité de Parseval s'écrit

$$E(f) = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}|b_n|^2$$

c'est à dire compte tenu des calculs faits avant

$$1 = \frac{1}{2}\frac{16}{\pi^2}\sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2}, \qquad \sum_{p\geq 0}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Si on prend la fonction h de la Fig. 3, on a $c_0 = a_n = 0$ et $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$. De plus

$$E(f) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{2t}{T}\right)^2 dt = \frac{8}{T^3}\int_0^{T/2} t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

et l'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2\pi^2}, \qquad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$