Tenseur de Ricci

Dans le cadre de la théorie de la Relativité générale[1], le champ de gravitation est interprété comme une déformation de l'espace-temps. Cette déformation est exprimée à l'aide du **tenseur de Ricci**, dont le nom a été attribué d'après son inventeur, Gregorio Ricci-Curbastro.

Le tenseur de Ricci est un tenseur d'ordre 2, obtenu comme la trace du tenseur de courbure complet. On peut le considérer comme le laplacien du tenseur métrique riemannien dans le cas des variétés riemaniennes.

Le tenseur de Ricci occupe une place importante notamment dans l'équation d'Einstein, équation principale de la relativité générale. C'est aussi un objet fondamental en géométrie différentielle.

Sommaire

Construction mathématique

Le tenseur de Ricci s'obtient à partir du tenseur de courbure de Riemann R, qui exprime la courbure de la variété (dans le cas de la Relativité générale, de l'espace-temps), à l'aide d'une réduction d'indices du tenseur.

Il peut s'exprimer notamment à partir des symboles de Christoffel, qui représentent l'évolution des vecteurs de base d'un point à l'autre de l'espace-temps, due à la courbure de ce dernier. Ces coefficients dépendent alors directement de la métrique de l'espace (de la variété), qui est un outil mathématique permettant de définir les distances au sein de l'espace.

D'un point de vue mathématique, on parvient aux résultats suivant, en utilisant la convention de sommation d'Einstein[2].

Les symboles de Christoffel s'expriment par :

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta g_{\alpha\beta})$$

Ces coefficients sont notamment utilisés pour écrire l'équation d'une géodésique, c'est-à-dire le *chemin le plus court* entre deux points de l'espace courbe – qui n'est pas toujours une ligne droite :

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}s}=0$$

Le tenseur de courbure s'exprime à partir de ces mêmes coefficients de Christoffel:

$$R^\delta{}_{\alpha\beta\gamma}=\partial_\alpha\Gamma^\delta{}_{\beta\gamma}-\partial_\beta\Gamma^\delta{}_{\alpha\gamma}+\Gamma^\delta{}_{\alpha\varepsilon}\Gamma^\varepsilon{}_{\beta\gamma}-\Gamma^\delta{}_{\beta\varepsilon}\Gamma^\varepsilon{}_{\alpha\gamma}$$

Nous obtenons enfin le tenseur de Ricci par réduction (attention à l'ordre des indices) :

$$R_{\alpha\beta}=R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$$

Par la suite, la courbure scalaire se déduit à l'aide d'une nouvelle réduction :

$$R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$$

La divergence du tenseur d'Einstein $R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R$ est nulle :

$$\left[R^{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right]_{;\alpha\beta}=0$$

Cette équation fondamentale se démontre en mettant en jeu la nullité de la dérivée covariante du tenseur métrique.

C'est en identifiant le tenseur d'Einstein et le tenseur d'énergie-impulsion que l'on obtient l'équation d'Einstein qui fonde la relativité générale.

Tenseurs d'une surface en coordonnées de Riemann

Tenseur de Riemann

Gauss a trouvé une formule de la courbure *K* d'une surface par un calcul assez compliqué mais plus simple en coordonnées de Riemann où elle est égale au tenseur de Riemann R_{xyxy} qui s'écrit alors, en deux dimensions[3,4].

$$R_{xyxy}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 g_{yy}}{\partial x^2}\right)$$

où g_{xx} et g_{yy} sont les coefficients de la métrique en coordonnées de Riemann, c'est-à-dire des coordonnées cartésiennes locales. Pour prendre un exemple, on ne peut utiliser le même système de coordonnées en Australie qu'en France sinon les Australiens auraient la tête en bas (pour nous)! Le tenseur de Ricci est formé, en fonction de la métrique inverse g^{ij} indices supérieurs) et du tenseur de Riemann dit « entièrement covariant », (indices inférieurs), R_{ijkl}, par la relation générale

Tenseur de Ricci

$$R_{ik}=g^{mn}R_{mink}=\Sigma g^{mn}R_{mink}$$

$g^{xx} = 1/g_{xx}$ et $g^{yy} = 1/g_{yy}$ sont les éléments de la métrique inverse de la métrique directe, également diagonale. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe Σ, avec quelques restrictions. En deux dimensions ces relations s'explicitent en :

$$R_{xx} = g^{xx} R_{xxxx} + g^{yy} R_{xyxy}$$

$$R_{yy} = g^{xx} R_{xyxy} + g^{yy} R_{yyyy}$$

L'identité de Bianchi du tenseur de Riemann s'écrit :

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}$$

Elle devient, lorsque a = b = c = d = x (ou y) :

$$R_{xxxx} = -R_{xxxx} = -R_{yyyy} = 0$$

On a donc

$$R_{xxxx} = R_{yyyy} = 0$$

En deux dimensions, il reste

$$R_{xx} = g^{yy} R_{xyxy} = \frac{1}{g_{yy}} R_{xyxy}$$
$$R_{yy} = g^{xx} R_{xyxy} = \frac{1}{g_{xx}} R_{xyxy}$$

Le tenseur de Ricci d'une surface de métrique diagonale a donc deux composantes différentes bien que celui de Riemann n'en ait qu'une seule, non nulle et au signe près.

Notes et références

1. **(fr)** La théorie de la Relativité (http://www.astrosurf.com/luxorion/relativite-concepts-tenseur-rc.htm) sur *www.astrosurf.com*. Consulté le 14 septembre 2010.
2. Cette convention stipule que les indices répétés seront des indices de sommation : $x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu$
3. Bernard Schaeffer, *Relativités et quanta clarifiés*, Publibook, 2007
4. En toute rigueur on devrait utiliser ici u et v au lieu de x et y car il s'agit de coordonnées de Gauss (voir Tenseur de Riemann)

Voir aussi

Riemannian geometry (http://www.mathpages.com/rr/s5-07/5-07.htm)

- Tenseur de Riemann
- Courbure scalaire
- Relativité générale

- Mathématiques
- Flot de Ricci