INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ
GRENOBLE 1

Non simplicité du groupe de Cremona, d'après Cantat et Lamy

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

31 mai 2011 / Académie des Sciences de Paris

Transformations rationnelles de l'espace projectif

Les transformations rationnelles (= méromorphes) f du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dans lui-même sont données par

$$f\ :\ \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},$$
$$[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [f_0(x_0,x_1,x_2) : f_1(x_0,x_1,x_2) : f_2(x_0,x_1,x_2)],$$

les $f_j(x_0,x_1,x_2)$ étant des polynômes homogènes de même degré, non tous nuls.

(Si les f_j sont des fractions rationnelles, il suffit de multiplier par un dénominateur commun.)

On peut de même supposer les f_j sans facteurs communs.
Dans ce cas, on note

$$\deg(f) = \deg(f_0) = \deg(f_1) = \deg(f_2).$$

Degré topologique, groupe de Cremona

On peut bien sûr définir de même pour toute dimension n les transformations rationnelles

$$f = [f_0 : f_1 : \ldots : f_n] : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}.$$

L'ensemble d'indétermination $\mathrm{I}(f)$ est l'ensemble des zéros communs $\bigcap\{f_j = 0\}$, $0 \le j \le n$, il est de codimension ≥ 2.

Le degré topologique $\deg_{\mathrm{top}}(f)$ est le nombre d'antécédents $\# f^{-1}(w)$ d'un point générique $w \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Théorème et définition

Une transformation rationnelle f admet une inverse pour la composition si et seulement si $\deg_{\mathrm{top}}(f) = 1$. On dit alors que f est une transformation birationnelle.

On notera $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Le groupe de Cremona est par définition $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.

Exemples d'éléments du groupe de Cremona

L'involution de Cremona est la transformation

$$\sigma : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left[\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}\right],$$

ou encore

$$\sigma : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1].$$

On a clairement

$$\deg(\sigma) = 2, \quad \deg_{\mathrm{top}}(\sigma) = 1.$$

Son ensemble d'indétermination est formé des 3 points ayant deux coordonnées nulles, i.e. $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$.

Les transformations de de Jonquières se définissent par action du produit croisé $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(y)) \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \simeq_{\mathrm{bir}} \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \ni (x, y) \longmapsto \left(\frac{a(y)x + b(y)}{c(y)x + d(y)}, \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}\right).$$

Théorème de décomposition de Noether

Théorème (Noether, 1872 / Castelnuovo, 1901)

Le groupe de Cremona $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *est engendré (au choix) par*

- $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ *et les transformations de de Jonquières*
- *les transformations quadratiques*
- $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ *et l'involution* σ.

On a donc un morphisme surjectif

$$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C}) * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}),$$

et des systèmes de relations ont été donnés par Gizatullin (1982) et Iskovskikh (1985). Il n'y a pas d'analogue pour $n \geq 3$:

Théorème (Pan 1999)

Tout ensemble de générateurs de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$, $n \geq 3$, *doit contenir une infinité non dénombrable d'éléments de degré* $d > 1$.

Les résultats de Cantat et Lamy

Théorème (Serge Cantat - Stéphane Lamy, juillet 2010)

Le groupe de Cremona $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *n'est pas simple.*

Plus précisément :

Théorème

Il existe un entier k ($k = 86611$ *convient !*) *ayant la propriété suivante : soit* $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *un élément général de degré* $d \geq 2$. *Alors pour* $n \geq k$, *le plus petit sous-groupe distingué de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *contenant* g^n *ne possède aucun élément de degré* $< \deg(g^n)$ *autre que l'identité.*

La question de la simplicité du groupe de Cremona était posée au moins depuis les années 1960, et avait été mentionnée en particulier par Manin, Dolgachev et Mumford.

Résultats antérieurs

Résultats en "direction opposée" :

Théorème (Julie Deserti, 2006)

$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *est un groupe parfait, i.e. égal à son groupe de commutateurs.*

Théorème (Jérémy Blanc, 2009)

$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *est topologiquement simple, i.e. n'a pas de sous-groupe distingué non trivial qui soit fermé pour la topologie de Zariski. Il est également connexe.*

Résultats allant dans la même direction :

Théorème (Vladimir Danilov, 1974)

Le groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ *de jacobien égal à* 1 *est simple.*

Action de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ sur un certain espace hyperbolique

L'une des idées essentielles de la preuve est la

Proposition

$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ *agit fidèlement sur un certain espace hyperbolique de dimension infinie.*

Pour le voir, on considère toutes les surfaces rationnelles obtenues par éclatements successifs d'un nombre fini de points $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, et on s'intéresse à "l'espace de Zariski" défini comme étant leur limite projective :

$$\mathcal{X} = \varprojlim (X, \pi_{X' \to X}).$$

Si X' est obtenu à partir de X par éclatement d'un point, on a

$$H^2(X', \mathbb{R}) = H^2(X, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}[E]$$

où $[E]$ est la classe du diviseur exceptionnel, telle que $[E]^2 = -1$.

Espace de Picard-Manin

Si X est obtenu à partir de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par éclatement de n points, on a donc $H^2(X,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n+1}$, muni d'une forme d'intersection de type Minkowski

$$\alpha_0^2 - (\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2).$$

La limite projective $\mathcal{X}$ admet un groupe $\widehat{H}^2(\mathcal{X},\mathbb{R})$ "virtuel" qui est le complété de la limite inductive des $H^2(X,\mathbb{R})$, à savoir un espace de Minkowski de dimension infinie (non séparable, la dimension est celle du continu !).

Pour toute application birationnelle $g : \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et tout éclatement $X \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, on a un relèvement $\tilde{g} : X' \to X$ à un certain éclatement X'. Par passage à la limite inductive, les applications

$$(\tilde{g})^* : H^2(X,\mathbb{R}) \to H^2(X',\mathbb{R})$$

induisent une isométrie g^* de l'espace de Picard-Manin $\widehat{H}^2(\mathcal{X},\mathbb{R})$.

Représentation dans l'espace de Picard-Manin

On obtient ainsi une représentation canonique (covariante)

$$\rho : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{Isom}\left(\widehat{H}^2(\mathcal{X},\mathbb{R})\right), \qquad g \mapsto g_* := (g^{-1})^*.$$

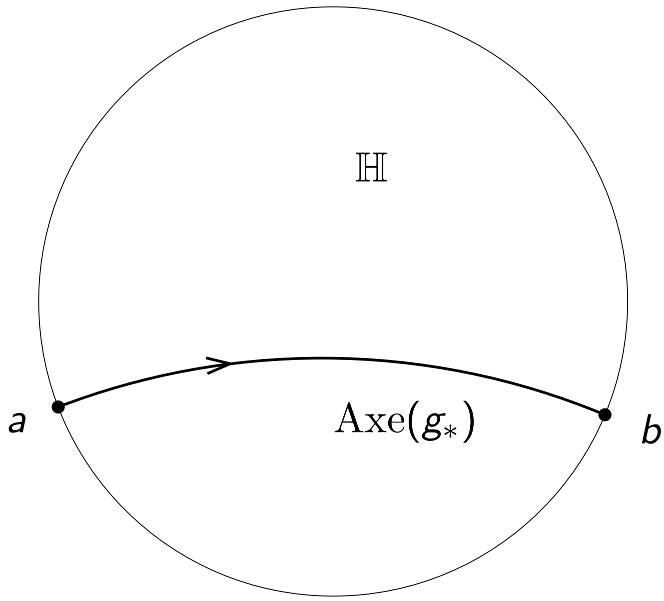
On se restreint en fait à l'espace noté ici $\mathbb{H}$, constitués de la composante connexe de "l'hyperboloïde à 2 nappes" des éléments de carré 1 dans $\widehat{H}^2(\mathcal{X},\mathbb{R})$ qui contient la classe hyperplane $h = c_1(\mathcal{O}(1))$ de $H^2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}},\mathbb{R})$.

Proposition

ρ induit une représentation fidèle sur $\mathrm{Isom}(\mathbb{H})$.

L'étape suivante consiste à identifier les transformations de Cremona g telle que l'isométrie induite g_* soit hyperbolique.

Transformation hyperbolique



g_* agit par translation hyperbolique sur son axe.

Digression : degrés intermédiaires de $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$

Si f est une transformation rationnelle $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, on définit son p-degré $\delta_p(f)$ comme étant le degré de l'image inverse $f^{-1}(L)$ d'un sous-espace linaire L générique de codimension p, c'est-à-dire le nombre d'intersection

$$\delta_p(f) = f^{-1}(L) \cdot L', \qquad \dim L = n - p, \quad \dim L' = p$$

avec L, L' génériques. On a en particulier

$$\delta_1(f) = \deg(f), \quad \delta_n(f) = \deg_{\mathrm{top}}(f).$$

Pour des morphismes réguliers f, g (i.e. $\mathrm{I}(f) = \mathrm{I}(g) = \emptyset$), il est facile de voir que

$$\delta_p(f) = (\deg(f))^p \quad \text{et} \quad \deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

Ceci résulte de la structure très simple de l'algèbre de cohomologie $H^\bullet(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$.

Degrés dynamiques des transformations de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

En revanche, lorsque $\mathrm{I}(f) \neq \emptyset$, il se peut que $\delta_p(f) < (\deg(f))^p$, et on introduit le *p*-ième degré dynamique par

$$\lambda_p(f) = \limsup_{k \to +\infty} \delta_p(f^k)^{1/k} \leq (\deg(f))^p.$$

On a en général $\lambda_n(f) = \delta_n(f) = \deg_{\mathrm{top}}(f)$, de sorte qu'en dimension 2, le seul degré dynamique intéressant est

$$\lambda_1(f) = \limsup_{k \to +\infty} \deg(f^k)^{1/k} \leq \deg(f).$$

Théorème (Cantat)

Pour $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$, l'isométrie induite $g_* \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ est hyperbolique si et seulement si $\lambda_1(g) > 1$.

Théorie géométrique des groupes

Soit $G = \rho(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})) \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$.

Définition (une propriété de rigidité...)

Soit $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. L'élément $g_* = \rho(g) \in G$ sera dit tendu si

- *$g_* \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$ est hyperbolique*
- *Il existe $B \gg 0$ ayant la propriété suivante : si $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2$ est tel que $f_*(\mathrm{Axe}(g_*))$ contient deux points à distance B qui sont à distance ≤ 1 de $\mathrm{Axe}(g_*)$, alors $f_*(\mathrm{Axe}(g_*)) = \mathrm{Axe}(g_*)$.*
- *Si $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$, $f_*(\mathrm{Axe}(g_*)) = \mathrm{Axe}(g_*)$, alors $f \circ g \circ f^{-1} = g$ ou g^{-1}.*

Théorème

Soit $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Si g_* est tendu, il existe un entier $k \geq 1$ tel que le plus petit sous-groupe distingué contenant g^k soit non trivial.

Fin de la démonstration

Pour conclure, il suffit de prouver le théorème suivant.

Théorème

Soit $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ un élément générique de degré $d \geq 2$. Alors g_* est tendu.

On montre que le sous-ensemble $\mathrm{Bir}_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ des transformations birationnelles de degré d est une variété algébrique de dimension $4d + 6$ ayant comme unique composante de dimension maximale les transformations $h_1 \circ f \circ h_2$ où $h_1, h_2 \in \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ et f est une transformation de de Jonquières de degré d.

La preuve du théorème repose sur des calculs explicites des itérées des transformations de de Jonquières, en utilisant des idées issues de la dynamique complexe.

Références

[Blanc2010] Blanc, J.: *Groupes de Cremona, connexité et simplicité*. À paraître aux Ann. Sci. ENS, 2010.

[CaLa2010] Cantat, S., Lamy, S.: *Normal subgroups in the Cremona group*, arXiv: math.AG/1007.0895.

[Cas1901] Castelnuovo, G.: *Le trasformationi generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 36:861874, 1901.

[CeDe2008] Cerveau, D., Déserti, J.: *Transformations birationnelles de petit degré*, arXiv: math.AG/0811.2325v2

[Dani1974] Danilov, V.I.: *Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane*, Mat. Zametki, 15:289293, 1974.

[Des2006] Déserti, J.: *Groupe de Cremona et dynamique complexe: une approche de la conjecture de Zimmer*, Int. Math. Res. Not., pages Art. ID 71701, 27, 2006.

[Giz1982] Gizatullin, M.Kh.: *Defining relations for the Cremona group of the plane*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 46(5):909970, 1134, 1982.

[Isk1985] Iskovskikh, V.A.: *Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group*, Uspekhi Mat. Nauk, 40(5(245)):255256, 1985.

[Noe1872] Noether, M.: *Zur Theorie der eindentigen Ebenentrasformationen*, Math. Ann., 5(4):635639, 1872.

[Pan1999] Pan, I.: *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), 30(1):9598, 1999.