Navier-Stokes regularization of multidimensional Euler shocks

O. Guès, G. Métivier, M. Williams, K. Zumbrun

Ann. Sci. ENS, 2006, p. 75-175

(1) Équation visqueuse (Navier-Stokes compressible)

$$\partial_t f_0(u) + \sum_1^d \partial_j f_j(u) = \varepsilon \sum_{j,k=1}^d \partial_j\big(B_{jk}(u)\partial_k u\big) \qquad \begin{matrix} d = 3 \\ N = 5 \end{matrix}$$

$$u(t,x) : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}^N;\ f_j : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N;\ B_{jk} : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{N\times N}$$

(1) Équation visqueuse (Navier-Stokes compressible)

$$\partial_t f_0(u) + \sum_1^d \partial_j f_j(u) = \varepsilon \sum_{j,k=1}^d \partial_j\big(B_{jk}(u)\partial_k u\big) \qquad \begin{matrix} d = 3 \\ N = 5 \end{matrix}$$

$$u(t,x) : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}^N;\ f_j : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N;\ B_{jk} : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{N\times N}$$

(2) Équation non visqueuse (Euler compressible) $\ldots = 0$

(1) Équation visqueuse (Navier-Stokes compressible)

$$\partial_t f_0(u) + \sum_1^d \partial_j f_j(u) = \varepsilon \sum_{j,k=1}^{d} \partial_j\big(B_{jk}(u)\partial_k u\big) \qquad \begin{matrix} d = 3 \\ N = 5 \end{matrix}$$

$$u(t,x) : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}^N;\ f_j : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N;\ B_{jk} : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{N\times N}$$

(2) Équation non visqueuse (Euler compressible) $\ldots = 0$

Onde de choc: solution discontinue le long d'un "front"

$$u(x_0, x_1, \ldots, x_d) \text{ ou } u(t,x',x_d) = \begin{cases} u_-(t,x',x_d) \text{ pour } x_d < \psi(t,x') \\ u_+(t,x',x_d) \text{ pour } x_d > \psi(t,x') \end{cases}$$

(1) Équation visqueuse (Navier-Stokes compressible)

$$\partial_t f_0(u) + \sum_1^d \partial_j f_j(u) = \varepsilon \sum_{j,k=1}^d \partial_j\big(B_{jk}(u)\partial_k u\big) \qquad \begin{array}{l} d = 3 \\ N = 5 \end{array}$$

$u(t,x) : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}^N$; $f_j : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$; $B_{jk} : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^{N\times N}$

(2) Équation non visqueuse (Euler compressible) $\ldots = 0$

Onde de choc: solution discontinue le long d'un "front"

$$u(x_0, x_1, \ldots, x_d) \text{ ou } u(t, x', x_d) = \begin{cases} u_-(t,x',x_d) \text{ pour } x_d < \psi(t,x') \\ u_+(t,x',x_d) \text{ pour } x_d > \psi(t,x') \end{cases}$$

(2') $\begin{cases} f_0'(u)\partial_t u_\pm + \sum f_j'(u)\partial_j u_\pm = 0 \\ \sum_0^{d-1} \partial_j\psi\,\big[f_j(u)\big]_-^+ = \big[f_d(u)\big]_-^+ \quad \text{(Rankine-Hugoniot)} \end{cases}$

$\square$

Equation de Navier-Stokes compressible

inconnues: ρ (densité); (v^1, v^2, v^3) (vitesse); θ (température)

$$\rho_t + \sum_{j=1}^{3} (\rho v)^j_{x_j} = 0$$

$$(\rho v^i)_t + \sum_{j=1}^{3} (\rho v^i v^j + P\delta_{ij})_{x_j} = \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \mu(v^i_{x_j} + v^j_{x_i}) + \lambda\Big(\sum_{k=1}^{3} v^k_{x_k}\Big)\delta_{ij} \Big\}_{x_j}$$

$$\Big\{\rho\Big(E + \frac{|v|^2}{2}\Big)\Big\}_t + \sum_{j=1}^{3} \Big\{\rho v^j\Big(E + \frac{|v|^2}{2}\Big) + P v^j\Big\}_{x_j}$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \mu \sum_{i=1}^{3} v^i (v^i_{x_j} + v^j_{x_i}) + \lambda u^j \sum_{k=1}^{3} v^k_{x_k} + \kappa \theta_{x_j} \Big\}_{x_j}$$

$P = P(\rho, \theta)$ (pression), $E = E(\rho, \theta)$ (énergie interne) données

$(\varepsilon\lambda, \varepsilon\mu)$ (viscosité); $\varepsilon\kappa$ (conductibilité thermique)

TH. — Soit u_0 une solution de (2) de type onde de choc

front : $x_d = \psi(t, x')$

Sous des hypothèses ... portant sur u_0

(OK pour un choc de Lax de faible amplitude)

il existe une famille u_ε de solutions régulières de (1_ε) t.q.

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{1/p}$$

- Description plus précise de u_ε ...

$\square$

$\varepsilon = 0$ — On rectifie le choc : $\tilde{x} = x_d - \psi(t, x')$

$$
(2'') \qquad \begin{cases} \sum_0^{d-1} A_j(u)\partial_j u + A_d(u, d\psi)\partial_{\tilde{x}} u = 0 & \text{pour } \tilde{x} \lesseqgtr 0 \\ \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi [f_j(u)]_-^+ = [f_d(u)]_-^+ & \text{sur } \tilde{x} = 0. \end{cases}
$$

$\varepsilon = 0$ — On rectifie le choc : $\tilde{x} = x_d - \psi(t, x')$

$$(2'')\qquad \begin{cases} \sum_0^{d-1} A_j(u)\partial_j u + A_d(u, d\psi)\partial_{\tilde{x}} u = 0 & \text{pour } \tilde{x} \lessgtr 0 \\ \sum_{j=0}^{d-1} \partial_j \psi [f_j(u)]_-^+ = [f_d(u)]_-^+ & \text{sur } \tilde{x} = 0. \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ — On introduit un front "fantôme" (inconnu)

$x_d = \psi^\varepsilon(t, x')$ et $\tilde{x} = x_d - \psi^\varepsilon(t, x')$

$$(1''_\varepsilon)\qquad \begin{cases} \sum_0^{d-1} A_j(u^\varepsilon)\partial_j u^\varepsilon + A_d(u^\varepsilon, d\psi^\varepsilon)\partial_{\tilde{x}} u^\varepsilon = \varepsilon \sum \partial_j (B_{jk}(u^\varepsilon, d\psi^\varepsilon)\partial_k u^\varepsilon) \\ [u^\varepsilon]_-^+ = 0\,; \quad [B_{dd}(u^\varepsilon, d\psi^\varepsilon)\partial_{\tilde{x}} u^\varepsilon]_-^+ = 0 \end{cases}$$

$\square$

Stratégie — 1. Construire une hiérarchie de solutions approchées vérifiant ($1''_\varepsilon$) à O(ε^{M+1}) près

$$u_{\mathrm{app}}^{\varepsilon M} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \mathcal{U}_j(t, x', \tilde{x}, \tilde{x}/\varepsilon); \quad \psi_{\mathrm{app}}^{\varepsilon M} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \Psi^j(t, x')$$

Ψ^0 est la fonction ψ du choc non visqueux u_0

$\mathcal{U}_0 - u_0$ à décroissance rapide en la "variable" $\tilde{x}/\varepsilon$

Stratégie — 1. Construire une hiérarchie de solutions approchées vérifiant ($1''_\varepsilon$) à O(ε^{M+1}) près

$$u^{\varepsilon M}_{\text{app}} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \mathcal{U}_j(t, x', \tilde{x}, \tilde{x}/\varepsilon); \quad \psi^{\varepsilon M}_{\text{app}} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \Psi^j(t, x')$$

Ψ^0 est la fonction ψ du choc non visqueux u_0

$\mathcal{U}_0 - u_0$ à décroissance rapide en la "variable" $\tilde{x}/\varepsilon$

2. Par un argument de point fixe, en partant de $u^{\varepsilon M}_{\text{app}}$, obtenir une vraie solution u^ε de ($1''_\varepsilon$).

Schéma itératif: corriger chaque solution approchée en résolvant l'équation linéarisée.

Stratégie — 1. Construire une hiérarchie de solutions approchées vérifiant ($1''_\varepsilon$) à $O(\varepsilon^{M+1})$ près

$$u^{\varepsilon M}_{\text{app}} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \mathcal{U}_j(t, x', \tilde{x}, \tilde{x}/\varepsilon); \quad \psi^{\varepsilon M}_{\text{app}} = \sum_{j=0}^{M} \varepsilon^j \Psi^j(t, x')$$

Ψ^0 est la fonction ψ du choc non visqueux u_0

$\mathcal{U}_0 - u_0$ à décroissance rapide en la "variable" $\tilde{x}/\varepsilon$

2. Par un argument de point fixe, en partant de $u^{\varepsilon M}_{\text{app}}$, obtenir une vraie solution u^ε de ($1''_\varepsilon$).

Schéma itératif: corriger chaque solution approchée en résolvant l'équation linéarisée.

TH. $\left\| u^\varepsilon - u^{\varepsilon M}_{\text{app}} \right\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{M+1}$ et $\left\| \psi^\varepsilon - \psi^{\varepsilon M}_{\text{app}} \right\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{M+1}$

$\square$

Chocs plans, profils plans, linéarisés. . .

$\varepsilon = 0$ solution du type $u(t,x) = \begin{cases} u^+ & \text{pour } x_d > \sum_0^{d-1} h_j x_j \\ u^- & \text{pour } x_d < \sum_0^{d-1} h_j x_j \end{cases}$

u^+, u^-, h constants, reliés par Rankine-Hugoniot

Chocs plans, profils plans, linéarisés...

$\varepsilon = 0$ solution du type $u(t,x) = \begin{cases} u^+ & \text{pour } x_d > \sum_0^{d-1} h_j x_j \\ u^- & \text{pour } x_d < \sum_0^{d-1} h_j x_j \end{cases}$

u^+, u^-, h constants, reliés par Rankine-Hugoniot

$\varepsilon > 0$ solutions du type $u(x_0, \ldots, x_d) = W\big((x_d - \sum_0^{d-1} h_j x_j)/\varepsilon\big)$

ODE non-linéaire d'ordre 2 sur W. R-H + (transversalité)

$\rightsquigarrow$ existence d'une solution avec $W(s) \to u^\pm$ pour $s \to \pm\infty$.

Chocs plans, profils plans, linéarisés...

$\varepsilon = 0$ solution du type $u(t,x) = \begin{cases} u^+ & \text{pour } x_d > \sum_0^{d-1} h_j x_j \\ u^- & \text{pour } x_d < \sum_0^{d-1} h_j x_j \end{cases}$

u^+, u^-, h constants, reliés par Rankine-Hugoniot

$\varepsilon > 0$ solutions du type $u(x_0, \ldots, x_d) = W\big((x_d - \sum_0^{d-1} h_j x_j)/\varepsilon\big)$

ODE non-linéaire d'ordre 2 sur W. R-H + (transversalité)

$\rightsquigarrow$ existence d'une solution avec $W(s) \to u^\pm$ pour $s \to \pm\infty$.

Linéarisation de $(1''_\varepsilon)$ autour d'un profil plan

Chocs plans, profils plans, linéarisés. . .

$\varepsilon = 0$ solution du type $u(t,x) = \begin{cases} u^+ & \text{pour } x_d > \sum_0^{d-1} h_j x_j \\ u^- & \text{pour } x_d < \sum_0^{d-1} h_j x_j \end{cases}$

u^+, u^-, h constants, reliés par Rankine-Hugoniot

$\varepsilon > 0$ solutions du type $u(x_0, \ldots, x_d) = W\Big((x_d - \sum_0^{d-1} h_j x_j)/\varepsilon\Big)$

ODE non-linéaire d'ordre 2 sur W. R-H + (transversalité)

$\rightsquigarrow$ existence d'une solution avec $W(s) \to u^\pm$ pour $s \to \pm\infty$.

Linéarisation de $(1''_\varepsilon)$ autour d'un profil plan

Linéarisation de $(1''_\varepsilon)$ autour d'un profil courbe

$\square$