Aperçu des travaux de Frédéric Campana : cœur des variétés orbifoldes

Jean-Pierre Demailly

Institut Fourier, Université de Grenoble I, France

4 mars 2008 / Académie des Sciences de Paris

Morphismes et ramification

- Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés algébriques projectives.
- On suppose $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y = n$ et f surjectif.

Morphismes et ramification

- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques projectives.
- On suppose $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y = n$ et f surjectif.
- On note $K_Y = \Lambda^n T_Y^*$ le fibré en droites canonique de Y.
- Ses sections s'écrivent localement

$$\alpha(y) = a(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

Morphismes et ramification

- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques projectives.
- On suppose $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y = n$ et f surjectif.
- On note $K_Y = \Lambda^n T_Y^*$ le fibré en droites canonique de Y.
- Ses sections s'écrivent localement

$$\alpha(y) = a(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

- Posant $y = f(x)$, on trouve

$$f^*\alpha(x) = a(f(x)) Jf(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

où Jf est le déterminant jacobien de f.

Morphismes et ramification

- Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques projectives.
- On suppose $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y = n$ et f surjectif.
- On note $K_Y = \Lambda^n T_Y^*$ le fibré en droites canonique de Y.
- Ses sections s'écrivent localement

$$\alpha(y) = a(y)\, dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n.$$

- Posant $y = f(x)$, on trouve

$$f^*\alpha(x) = a(f(x)) Jf(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

  où Jf est le déterminant jacobien de f.
- On voit que

$$f^*K_Y = K_X \otimes \mathcal{O}(-R)$$

  où $R = \mathrm{div}(Jf)$ est le diviseur de ramification de f.

La formule de Riemann-Hurwitz

- Cas des courbes $n = 1$ (surfaces de Riemann compactes):
  On a $\deg(K_X) = -\chi(X) = 2g_X - 2$ où $g_X =$ genre de X.
  La formule $K_X = f^* K_Y \otimes \mathcal{O}(R)$ se récrit

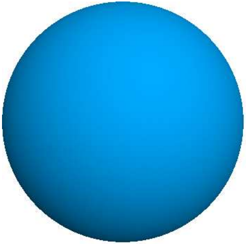
$$-\chi(X) = -d\,\chi(Y) + \sum_{p \in |R|} (m_p - 1)$$

  où d est le degré de f, p décrit les points de ramification et m_p leur indice de ramification, $R = \sum (m_p - 1)[p]$.

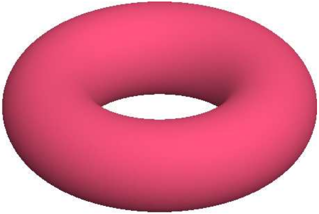
La formule de Riemann-Hurwitz

- Cas des courbes $n = 1$ (surfaces de Riemann compactes): On a $\deg(K_X) = -\chi(X) = 2g_X - 2$ où $g_X =$ genre de X. La formule $K_X = f^* K_Y \otimes \mathcal{O}(R)$ se récrit
$$-\chi(X) = -d\,\chi(Y) + \sum_{p \in |R|} (m_p - 1)$$
où d est le degré de f, p décrit les points de ramification et m_p leur indice de ramification, $R = \sum (m_p - 1)[p]$.
- Diviseur de multiplicité de f: c'est le plus grand diviseur effectif $\Delta = \Delta(f)$ sur Y tel que $f^*\Delta \leq R$. On a
$$\Delta(f) = \sum (1 - 1/m_j) D_j$$
où $|\Delta| = \bigcup D_j$ est l'ensemble des composantes divisorielles du lieu des points $y \in Y$ tel que la fibre $f^{-1}(y)$ ne soit pas lisse, et m_j la multiplicité minimale de $f^* D_j$ sur les composantes de $f^{-1}(D_j)$.

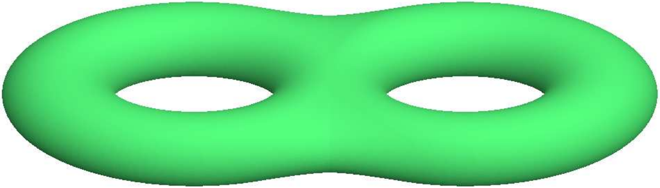
Genre et courbure



$g = 0\,,\ \ K_X < 0$
(courbure positive)



$g = 1\,,\ \ K_X = 0$
(courbure nulle)



$$\deg(K_X) = 2g - 2$$

$g > 1\,,\ \ K_X > 0$
(courbure négative)

- Pour X de dimension n quelconque, la dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(L)$ d'un fibré en droites L est définie par

$$\dim H^0(X, L^{\otimes m}) \sim Cm^{\kappa(L)}, \qquad m \gg 1$$

On pose $\kappa(L) = -\infty$ s'il n'y a pas de sections non nulles, et sinon $\kappa(L) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Dimension de Kodaira/morphismes pluricanoniques

- Pour X de dimension n quelconque, la dimension de Kodaira-Iitaka $\kappa(L)$ d'un fibré en droites L est définie par

$$\dim H^0(X, L^{\otimes m}) \sim C m^{\kappa(L)}, \qquad m \gg 1$$

On pose $\kappa(L) = -\infty$ s'il n'y a pas de sections non nulles, et sinon $\kappa(L) \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

- Si $V = H^0(X, L^{\otimes m})$, on a alors des morphismes

$$\Phi_{L^{\otimes m}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N = P(V^*), \quad x \mapsto H_x = \{\sigma \in V,\, \sigma(x) = 0\}.$$

de rang générique $\kappa(L)$ (Kodaira-Siegel-Serre).
Pour $L = K_X$, on parle de morphismes pluricanoniques.

Définition. *On dit que X est une variété de type général si $\kappa(K_X) = \dim X$.*

Variétés orbifoldes / morphismes de type général

- On appelle variété orbifolde toute paire (X, Δ) où Δ est un diviseur de la forme

$$\Delta = \sum (1 - 1/m_j) D_j, \qquad m_j \geq 2.$$

- **Définition 1.** *On dit que la paire* (X, Δ) *est de type général si* $\kappa(K_X \otimes \mathcal{O}(\Delta)) = \dim X$.

Variétés orbifoldes / morphismes de type général

- On appelle variété orbifolde toute paire (X, Δ) où Δ est un diviseur de la forme

$$\Delta = \sum (1 - 1/m_j) D_j, \qquad m_j \geq 2.$$

- **Définition 1.** *On dit que la paire (X, Δ) est de type général si $\kappa(K_X \otimes \mathcal{O}(\Delta)) = \dim X$.*
- **Définition 2.** *On dit qu'un morphisme surjectif $f : X \to Y$ est (à base) de type général si la paire $(Y, \Delta(f))$ est de type général.*

Variétés orbifoldes / morphismes de type général

- On appelle variété orbifolde toute paire (X, Δ) où Δ est un diviseur de la forme

$$\Delta = \sum (1 - 1/m_j) D_j, \qquad m_j \geq 2.$$

- **Définition 1.** *On dit que la paire (X, Δ) est de type général si $\kappa(K_X \otimes \mathcal{O}(\Delta)) = \dim X$.*
- **Définition 2.** *On dit qu'un morphisme surjectif $f : X \to Y$ est (à base) de type général si la paire $(Y, \Delta(f))$ est de type général.*
- **Définition 3.** *On dit que X est une variété spéciale s'il n'existe pas de morphisme de type général $f : X \to Y$, $\dim Y > 0$.*

Cœur d'une variété projective

- **Théorème (Campana).** *Si X est une variété quelconque, il existe une unique fibration méromorphe $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ dont la fibre très générique F est spéciale, et telle que F soit la sous-variété spéciale de X la plus grande passant par un point quelconque $a \in F$.*

Cœur d'une variété projective

- **Théorème (Campana).** *Si X est une variété quelconque, il existe une unique fibration méromorphe $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ dont la fibre très générique F est spéciale, et telle que F soit la sous-variété spéciale de X la plus grande passant par un point quelconque $a \in F$.*
- Campana appelle $C(X)$ le cœur de X, et conjecture que le morphisme c_X est toujours de type général.

Cœur d'une variété projective

- **Théorème (Campana).** *Si X est une variété quelconque, il existe une unique fibration méromorphe $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ dont la fibre très générique F est spéciale, et telle que F soit la sous-variété spéciale de X la plus grande passant par un point quelconque $a \in F$.*
- Campana appelle $C(X)$ le cœur de X, et conjecture que le morphisme c_X est toujours de type général.
- Campana avait démontré au début des années 1990 l'existence d'une fibration "MRC" $X \dashrightarrow R(X)$ dont les fibres sont maximalement rationnellement connexes. On a toujours une factorisation $X \dashrightarrow R(X) \dashrightarrow C(X)$.

Théorème de Kobayashi-Ochiai généralisé

- **Théorème (Kobayashi-Ochiai).** *Soit X une variété de type général, et $\varphi : U \smallsetminus A \to X$ une application holomorphe de rang générique $n = \dim X$ définie sur le complémentaire d'un ensemble analytique A dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Alors φ se prolonge méromorphiquement à U (pas de singularités essentielles).*

Théorème de Kobayashi-Ochiai généralisé

- **Théorème (Kobayashi-Ochiai).** *Soit X une variété de type général, et $\varphi : U \smallsetminus A \to X$ une application holomorphe de rang générique $n = \dim X$ définie sur le complémentaire d'un ensemble analytique A dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Alors φ se prolonge méromorphiquement à U (pas de singularités essentielles).*
- **Théorème (Campana).** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type général de dimension n, et $\varphi : U \smallsetminus A \to X$ une application holomorphe de rang générique $n = \dim X$ définie sur le le complémentaire d'un ensemble analytique A dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Alors $f \circ \varphi : U \smallsetminus A \to Y$ se prolonge méromorphiquement à U.*

Théorème de Kobayashi-Ochiai généralisé

- **Théorème (Kobayashi-Ochiai).** *Soit X une variété de type général, et $\varphi : U \smallsetminus A \to X$ une application holomorphe de rang générique $n = \dim X$ définie sur le complémentaire d'un ensemble analytique A dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Alors φ se prolonge méromorphiquement à U (pas de singularités essentielles).*
- **Théorème (Campana).** *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type général de dimension n, et $\varphi : U \smallsetminus A \to X$ une application holomorphe de rang générique $n = \dim X$ définie sur le le complémentaire d'un ensemble analytique A dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$. Alors $f \circ \varphi : U \smallsetminus A \to Y$ se prolonge méromorphiquement à U.*
- C'est le départ d'une vaste théorie, encore en grande partie conjecturale ...